

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x - x^2)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC , повторно пересекает Ω в точке F . Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF , если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leq x \leq 28$, $4 \leq y \leq 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geq ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $(\frac{2}{3}; 2]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TU . Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

N2

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-6)-6(x-1) = \sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90 \end{cases}$$

Пусть $a=y-6$, $ab=x-1$, тогда

$$\begin{cases} a-6b = \sqrt{ab} \\ 9b^2+a^2=90 \end{cases} \quad \text{OДЗ: } a \geq 6b$$

$$\begin{cases} a^2 - 12ab + 36b^2 = ab \\ 9b^2 + a^2 = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-4b)(a-9b) = 0 \\ 9b^2 + a^2 = 90 \end{cases}$$

III. К. $a \geq 6b$, но $a \neq 4b$

$$\begin{cases} a = 9b \\ 9b^2 + a^2 = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 9b \\ b^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 9 \\ b = 1 \\ a = -9 \\ b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 15 \\ x = 2 \\ y = -3 \\ x = 0 \end{cases}$$

Система OДЗ имеет решение:

Ответ: (2; 15).

N1

$$\begin{aligned} \sin(2\alpha+2\beta) &= \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha \\ \sin(2\alpha+4\beta) &= \sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha = \\ &= \sin 2\alpha \cdot 2\cos^2\beta + 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha - \\ &\quad - \sin 2\alpha \Rightarrow \sin(2\alpha+4\beta) = \sin(2\alpha+2\beta) \times \\ &\quad \times 2\cos 2\beta - \sin 2\alpha \Rightarrow -\frac{2}{17} = 2\cos 2\beta - \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{\sqrt{17}}{17} \Rightarrow \cos \beta = \pm \sqrt{\frac{17+\sqrt{17}}{34}}, \\ \sin \beta &= \pm \sqrt{\frac{17-\sqrt{17}}{34}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm 2\sqrt{\frac{17-16}{34^2}} = \\ &= \pm \frac{4\sqrt{17}}{17} \cdot \sin 2\alpha \cdot \frac{\sqrt{17}}{17} + \left(\pm \frac{4\sqrt{17}}{17}\right) \cdot \cos 2\alpha = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha + 1 = 0 \\ \sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0 \\ 3\sin^2\alpha - 5\cos^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3\tg^2\alpha + 2\tg\alpha + 5 = 0 \\ 3\tg^2\alpha + 2\tg\alpha - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\tg\alpha+1)(\tg\alpha-3) = 0 \\ (\tg\alpha-1)(3\tg\alpha+5) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tg\alpha = \pm 1 \\ \tg\alpha = \pm \frac{5}{3} \end{cases}$$

Ответ: $\pm \frac{5}{3}; \pm 1$.

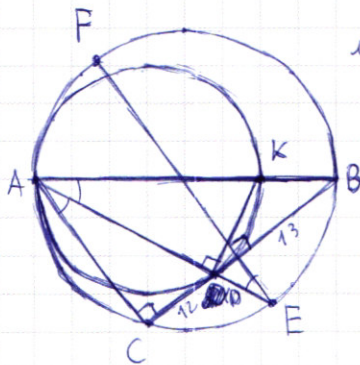
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Дано: $\omega \cap \Omega = A$, AB - диаметр Ω , BD - касательная к ω , $BD \perp \Omega = C$, $AD \cap \Omega = E$, $FE \perp \Omega$, $EP \perp BC$,
 $CD = 12$, $BD = 13$

Найти: R - радиус Ω , r - радиус ω , $\angle AFE$, S_{AEF} .

Решение: ПТ.к. AB - диаметр, то $\angle ACB = 90^\circ$ и центр ω лежит на AB , $\Rightarrow AK$ - диа-



метр ω , где $K = AB \cap \omega$. ПТ.к. $\angle ACB = 90^\circ$, то $AC \parallel EF \Rightarrow \angle CAE =$
 $= \angle AEF$. ПТ.к. BD - касательная, то $\angle ADC = \angle AKD = 90^\circ - \angle CAE$.

ПТ.к. AK - диаметр ω , то $\angle ADK = 90^\circ \Rightarrow \angle KAE = 90^\circ - \angle AKD =$

$= \angle CAE = \angle AEF \Rightarrow AD$ - биссектриса $\triangle ABC \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BD} = \cos \angle CAB \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos \angle CAE = \pm \sqrt{\frac{BD+CD}{2BD}} = \pm \frac{5}{\sqrt{26}} \Rightarrow \sin \angle CAE = \frac{1}{\sqrt{6}} = \sin \angle AEF$.

$\overset{\frown}{FE} = \overset{\frown}{CE} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{AF} = 2 \cdot \angle CAE + 2 \cdot (90^\circ - 2 \cdot \angle CAE) + 2 \cdot \angle AEF = 180^\circ - 2 \cdot \angle CAE + 2 \cdot \angle AEF = 180^\circ \Rightarrow FE$ - диаметр Ω

$\Rightarrow \angle EAF = 90^\circ \Rightarrow \cos \angle AFE = \sin \angle AEF = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow \angle AFE = \arccos \frac{1}{\sqrt{6}}$. Теорема Пифа-

гора для $\triangle ABC$: $(2R)^2 = \left(\frac{24}{13}R\right)^2 + BD^2 \Rightarrow AB^2 = BC^2 + AC^2 \Rightarrow AB^2 = \cos^2 \angle CAB \cdot AB^2 + (BD+CD)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4R^2 = \frac{4CD^2}{BD^2} R^2 + BD^2 + 2BD \cdot CD + CD^2 \Rightarrow R^2 = \frac{BD^2(BD+CD)^2}{4(BD^2 - CD^2)} \Rightarrow R = \frac{13^2 \cdot 25^2}{4 \cdot 25} \Rightarrow R = \frac{13 \cdot 5}{2} =$

$= 32,5$. По свойству касательной $BD^2 = BK \cdot AB = (2R - 2r)(2R) \Rightarrow r = R - \frac{BD^2}{4R} =$

$= 32,5 - \frac{169}{2 \cdot 65} = 32,5 - 1,3 = 31,2$. По свойству хорд $AD \cdot DE = BD \cdot CD \Rightarrow DE = \frac{BD \cdot CD}{AD} =$

$\sin \angle CAE = \frac{CD}{AB} \Rightarrow AD = \frac{CD}{\sin \angle CAB} \Rightarrow DE = BD \cdot \sin \angle CAE \Rightarrow AE = CD / \sin \angle CAB + BD \cdot \sin \angle CAB = 12\sqrt{6} + 0,5\sqrt{6} =$

$= 12,5\sqrt{6}$. $FE = 2R = 65$. $S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot FE \cdot \sin \angle AEF = 32,5 \cdot 12,5 = 406,25$.

Ответ: $32,5$; $31,2$; $\arccos \frac{1}{\sqrt{6}}$; $406,25$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$f\left(\frac{1}{p^2}\right) = f\left(\frac{1}{p}\right) + f\left(\frac{1}{p}\right) = 2f\left(\frac{1}{p}\right), \text{ где } p - \text{ простое число}$$

$$f\left(\frac{1}{p}\right) = f(p) + f\left(\frac{1}{p^2}\right) = [p/4] + 2f\left(\frac{1}{p}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{p}\right) = -[p/4]$$

Ит.д. для $f\left(\frac{1}{2}\right)$ и $f\left(\frac{1}{3}\right)$ $[p/4] = 0$, то ~~все остальные~~ значения f для всех степеней 2 и 3 также равно 0. Подсчитаем значение f для каждого из чисел от 4 до 28:

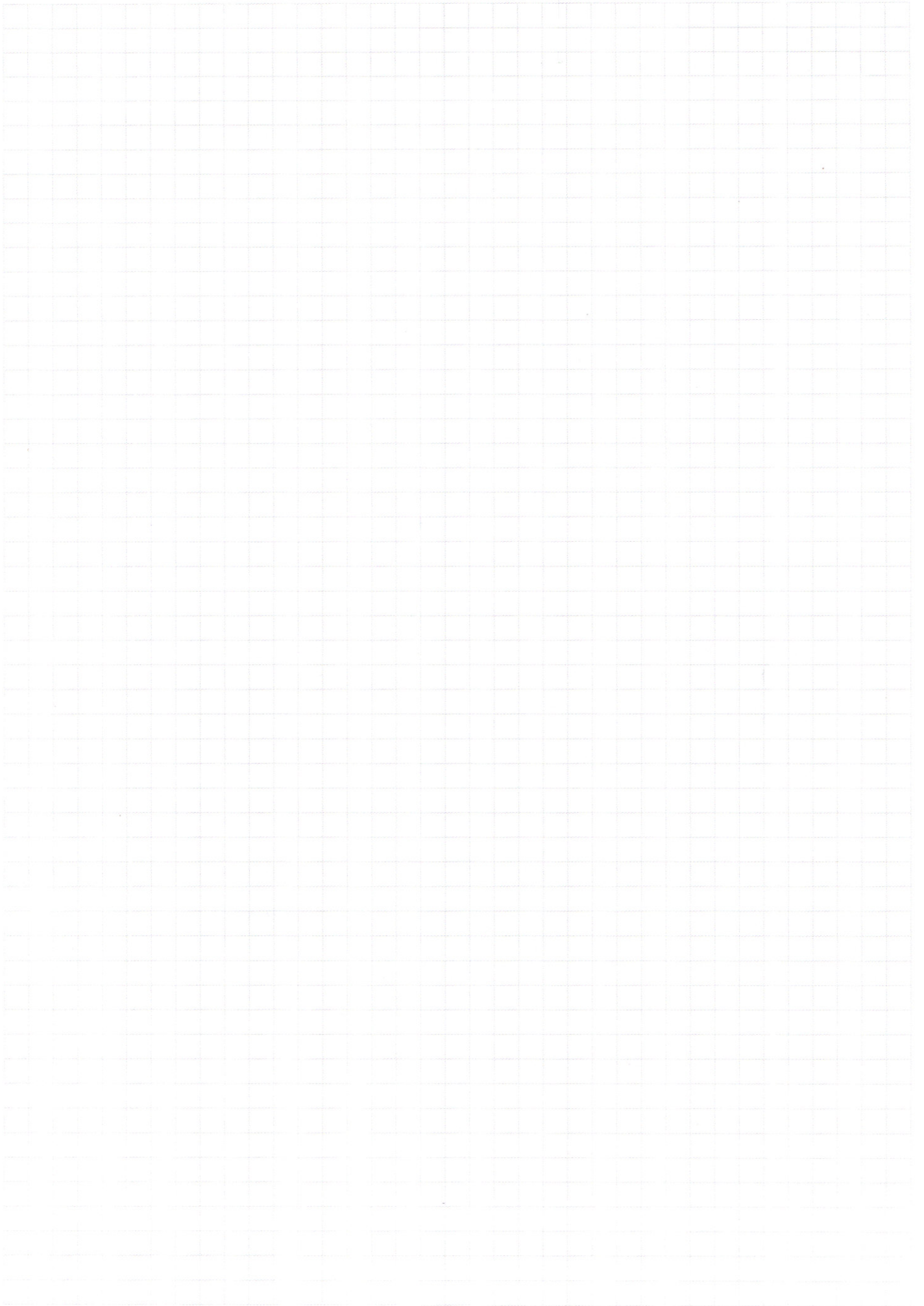
4 = 2·2 - 0	8 = 2·2·2 - 0	12 = 3·2·2 - 0	16 = 2·2·2·2 - 0	20 = 2·2·5 - 1	24 = 2·2·2·3 - 0
5 = 5 - 1	9 = 3·3 - 0	13 = 13 - 3	17 = 17 - 4	21 = 3·7 - 1	25 = 5·5 - 2
6 = 2·3 - 0	10 = 2·5 - 1	14 = 2·7 - 1	18 = 2·3·3 - 0	22 = 2·11 - 2	26 = 2·13 - 3
7 = 7 - 1	11 = 11 - 2	15 = 3·5 - 1	19 = 19 - 4	23 = 23 - 5	27 = 3·3·3 - 0

$$f\left(\frac{1}{x^2}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 2f\left(\frac{1}{x}\right), \text{ где } 4 \leq x \leq 28$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x^2}\right) = f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

Если число x в знаменателе, то при подсчёте значения функции нужно не прибавить $f(x)$, а вычитать его для получения $f\left(\frac{1}{x}\right)$. Ит.д. подходит под условие все простые x , у которых $f(x) < f(y)$. Если $f(x) = 0$, то для этого x подходит 16 чисел. Если $f(x) = 1 - 9$, если $f(x) = 2 - 5$, если $f(x) = 3 - 3$, если $f(x) = 4 - 1$, если $f(x) = 5 - 0$. Ит.д. есть 9 единиц, 7 двоек, 4 тройки, 2 четвёрки и 2 пятёрки, то общее число пар равно $9 \cdot 16 + 7 \cdot 9 + 4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 235$

Ответ! 235



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№ 3

$$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$$

Пусть $t = 26x - x^2$, тогда

$$|t|^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13}$$

$$t(t^{(\log_5 12)-1} + 1 - t^{(\log_5 13)-1}) \geq 0$$

III. r. $t \geq 0$, то

$$\left[\begin{array}{l} t \geq 0 \\ t^{(\log_5 12)-1} + 1 - t^{(\log_5 13)-1} \geq 0 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=26 \\ t^{\log_5 2,4} + 1 - t^{\log_5 2,6} \geq 0 \end{array} \right]$$

$$0 \leq 3: 26x - x^2 \geq 0$$

$$x^2 - 26x \leq 0$$

$$x(x-26) \leq 0$$

$$0 \leq x \leq 26$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

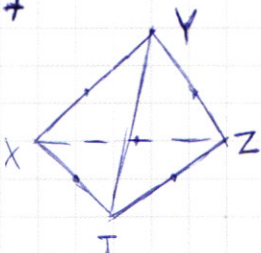
$$f\left(\frac{1}{p^2}\right) = f\left(\frac{1}{p}\right) + f\left(\frac{1}{p}\right) = 2f\left(\frac{1}{p}\right), \text{ где } p - \text{ простое число}$$

$$f\left(\frac{1}{p}\right) = f(p) + f\left(\frac{1}{p^2}\right) = [p/4] + 2 \cdot f\left(\frac{1}{p}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{p}\right) = -[p/4].$$

Ит.д. для 2 и 3 $[p/4] = 0$, то все стороны 2 и 3 также равны 0.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{4}\right) &= f(1) = f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 0, & f\left(\frac{1}{5}\right) &= f(4) + f\left(\frac{1}{5}\right) = 0 - 1 = -1, & f\left(\frac{1}{6}\right) &= f\left(\frac{2}{3}\right) = 0, & f\left(\frac{1}{7}\right) &= f(4) + f\left(\frac{1}{7}\right) = -1, & f\left(\frac{1}{8}\right) &= f\left(\frac{1}{2}\right) = 0, & f\left(\frac{1}{9}\right) &= \\ &= f(4) + f\left(\frac{1}{9}\right) = 0, & f\left(\frac{1}{10}\right) &= f\left(\frac{2}{5}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{5}\right) = -1, & f\left(\frac{1}{11}\right) &= f(4) + f\left(\frac{1}{11}\right) = -2, & f\left(\frac{1}{12}\right) &= f(4) + f\left(\frac{1}{12}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) = 0, & f\left(\frac{1}{13}\right) &= f(4) + f\left(\frac{1}{13}\right) = -3, & f\left(\frac{1}{14}\right) &= f\left(\frac{2}{7}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{7}\right) = -1, & f\left(\frac{1}{15}\right) &= f(4) + f\left(\frac{1}{15}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) = -1, & f\left(\frac{1}{16}\right) &= f\left(\frac{1}{4}\right) = 0, & f\left(\frac{1}{17}\right) &= f(4) + f\left(\frac{1}{17}\right) = -4, & f\left(\frac{1}{18}\right) &= f(4) + \\ &+ f\left(\frac{1}{9}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 0, & f\left(\frac{1}{19}\right) &= f(4) + f\left(\frac{1}{19}\right) = -4, & f\left(\frac{1}{20}\right) &= f\left(\frac{4}{5}\right) = -1, & f\left(\frac{1}{21}\right) &= f(4) + f\left(\frac{1}{21}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) = -1, & f\left(\frac{1}{22}\right) &= f\left(\frac{2}{11}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{11}\right) = -2, & f\left(\frac{1}{23}\right) &= f(4) + f\left(\frac{1}{23}\right) = -5, & f\left(\frac{1}{24}\right) &= f\left(\frac{1}{6}\right) = 0, & f\left(\frac{1}{25}\right) &= f(4) + 2f\left(\frac{1}{5}\right) = -2, & f\left(\frac{1}{26}\right) &= f(2) + f\left(\frac{1}{13}\right) = -3, & f\left(\frac{1}{27}\right) &= f(4) + f\left(\frac{1}{27}\right) = 0, & f\left(\frac{1}{28}\right) &= f\left(\frac{1}{7}\right) = -1. \end{aligned}$$

№7



$$t \log_5 12 \geq t \log_5 13$$

$$-t \log_5 12 + t \geq t \log_5 13$$

№8

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

$$(b^x)^y = (b^y)^x$$

$$\log_b a = x \Rightarrow a = b^x$$

$$\log_b c = y \Rightarrow c = b^y$$

$$\begin{aligned} x^2 - 26x + 26 &\leq 0 \\ x(x-26) &\leq 0 \\ 0 &\leq x \leq 26 \end{aligned}$$

$$t^{\log_5 12 - 1} + 1 \geq t^{\log_5 13 - 1}$$

$$t^{\log_5 12 - 1} + 1 - t^{\log_5 13 - 1} \geq 0$$

$$\begin{array}{r} 51 \\ \times 51 \\ \hline 255 \\ + 255 \\ \hline 2601 \\ \times 214 \\ \hline 1385 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 13 \\ \hline 224 \\ + 28 \\ \hline 304 \\ \times 4 \\ \hline 1216 \end{array}$$

$$a \geq 6b$$

№2

$$y - 6 - 6(x-1) = \sqrt{(x-1)}$$

$$y - 6 - 6(x-1) = \sqrt{(x-1)(y-6)}$$

$$9x^2 - 18x + 9$$

$$\sqrt{(y-6) - 6(x-1)} = \sqrt{(x-1)(y-6)}$$

$$9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$$

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ 9b^2 + a^2 = 90 \end{cases}$$

$$9b^2 + a^2 = 90$$

$$\begin{cases} a^2 - 12ab + 36b^2 = ab \\ 9b^2 + a^2 = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-4b)(a-9b) = 0 \\ 9b^2 + a^2 = 90 \end{cases}$$

$$9b^2 + a^2 = 90$$

$$\begin{cases} a = 4b \\ a = 9b \\ 9b^2 + a^2 = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 4b \\ b^2 = \frac{90}{25} \\ a = 9b \\ b^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 4b \\ b = \pm 0.6\sqrt{10} \\ a = 9b \\ b = \pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 4b \\ b = \pm 0.6\sqrt{10} \\ a = 9b \\ b = \pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 4b \\ b = \pm 0.6\sqrt{10} \\ a = 9b \\ b = \pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 4b \\ b = \pm 0.6\sqrt{10} \\ a = 9b \\ b = \pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 4b \\ b = \pm 0.6\sqrt{10} \\ a = 9b \\ b = \pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2.4\sqrt{10} \\ b = 0.6\sqrt{10} \\ a = -2.4\sqrt{10} \\ b = -0.6\sqrt{10} \\ a = 9 \\ b = 1 \\ a = -9 \\ b = -1 \end{cases}$$

Всегда $ab \geq 0$!

$$\frac{51}{36} = 1 \frac{15}{36}$$

$$\frac{24}{36}$$

$$y = 6 + 2.4\sqrt{10}$$

$$x = 1 + 0.6\sqrt{10}$$

$$y = 6 - 2.4\sqrt{10}$$

$$x = 1 - 0.6\sqrt{10}$$

$$y = 105$$

$$x = 2$$

$$y = 217 - 3$$

$$x = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{17}}$$

$$2\cos^2\beta - 1 \quad 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta \cdot (2 - \cos 2\beta) + (2 \cdot \cos 2\beta) (\sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha) = -\frac{2}{\sqrt{17}}$$

$$2 \cdot \cos 2\beta \cdot (\sin 2\alpha + 2\beta) = -\frac{2}{\sqrt{17}} - \frac{2}{\sqrt{17}}$$

$$\cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\cos 2\beta = \frac{\sqrt{17}}{17} = 2\cos^2\beta - 1 = 1 - 8\sin^2\beta$$

$$\cos \beta = \pm \sqrt{\frac{17 + \sqrt{17}}{34}}$$

$$\sin \beta = \pm \sqrt{\frac{17 - \sqrt{17}}{34}}$$

$$\sin 2\beta = 2\sin\beta \cdot \cos\beta = \pm 2 \sqrt{\frac{17 - 16}{34^2}} = \pm \frac{8\sqrt{17}}{34} = \pm \frac{4\sqrt{17}}{17}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{\sqrt{17}}{17} + \left(\pm \frac{4\sqrt{17}}{17}\right) \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad | \cdot \sqrt{17}$$

$$\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1 \\ \sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0 \\ 3\sin^2\alpha - 5\cos^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha + 5 = 0 \\ 3\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\operatorname{tg}\alpha + 1)(-3\operatorname{tg}\alpha + 5) = 0 \\ (\operatorname{tg}\alpha - 1)(3\operatorname{tg}\alpha + 5) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \pm 1 \\ \operatorname{tg}\alpha = \pm \frac{5}{3} \end{cases}}$$

$$\text{OдЗ: } (x-1)(y-6) \geq 0$$

$$y - 6x \geq 0$$

~~ОдЗ~~

$$y^2 - 12y + 9x^2 - 18x + 45 = 0$$

$$D = 144 - 4(9x^2 - 18x - 45) = -36x^2 + 72x + 224 =$$

$$= -36(x^2 - 2x + \frac{16}{3}) = (x-1)^2 \cdot 36 + 360$$

$$y = \frac{12 \pm 6\sqrt{(x-1)^2 + 10}}{2} = 6 \pm 3\sqrt{10 - (x-1)^2}$$

N5

Омлого 28: 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 7n, n.

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 2f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{4}\right) = 0 + f\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$f\left(\frac{4}{8}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f(4) + f\left(\frac{1}{8}\right) = f(4) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow f(4) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow f(4) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 2f\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = f(3) + f\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{25}\right) = 2f\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = f(5) + f\left(\frac{1}{25}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{25}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{25}\right) = -1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{25}\right) = -2$$

$$f\left(\frac{1}{10}\right) = 2f\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = f(5) + f\left(\frac{1}{10}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{10}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{5}\right) = -1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{10}\right) = -2$$

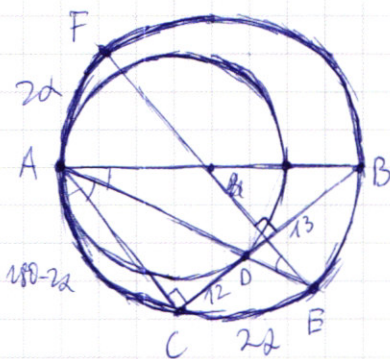
$$f\left(\frac{1}{20}\right) = 2f\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{10}\right) = f(10) + f\left(\frac{1}{20}\right) = [p/4] + 2f\left(\frac{1}{10}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{10}\right) = -[p/4]$$

$$f(1) = f(p) + f\left(\frac{1}{p}\right) = [p/4] - [p/4] = 0$$

- 4: 2-2-0-16
- 5: 5-1-9
- 6: 2-3-0-16
- 7: 7-2-5
- 8: 2-2-2-0-16
- 9: 3-3-0-16
- 10: 7-5-1-9
- 11: 11-2-5
- 12: 3-4-0-16
- 13: 13-3-9
- 14: 2-7-1-9
- 15: 3-5-1-9
- 16: 2-2-2-0-16
- 17: 17-4-1
- 18: 2-3-0-16
- 19: 19-4-1
- 20: 2-5-1-9
- 21: 3-7-1-9
- 22: 7-11-2-5
- 23: 23-5-0
- 24: 4-2-2-3-0-16
- 25: 5-5-2-5
- 26: 2-13-3-9
- 27: 3-3-0-16
- 28: 2-7-1-9
- 9: 16+7-9+4-5+2-3+2-1 = 14+6+20+6+2 = 235

N4



$$(2R-2r)(2R) = 13^2$$

$$(65-2r) \cdot \frac{65}{2} = 13^2$$

$$4R^2 - 4rR + 169 = 0$$

$$65-2r = \frac{26 \times 13}{5}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{12}{13} = \cos 2\alpha \Rightarrow 2\cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{5}{\sqrt{26}}$$

$$4R^2 = \frac{24^2}{169} R^2 + 625$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot 12.5 \sqrt{26} - 65 \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} = 12.5 \cdot 32.5 = 406.25$$

$$\frac{676-776}{169} R^2 = 625$$

$$R^2 = \frac{625 \cdot 169}{100} = \frac{25 \cdot 169}{4}$$

$$R = \frac{5 \cdot 13}{2} = 32.5$$

$$\frac{12}{AD} = \frac{1}{\sqrt{26}} \Rightarrow AD = 12\sqrt{26}$$

$$\frac{12 \cdot 13}{12\sqrt{26}} = \frac{13}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{2} \Rightarrow AE = EF = 2R = 65 = 12.5 \sqrt{26}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 23 \\ \times 9 \\ \hline 207 \\ + 23 \\ \hline 235 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12.5 \\ \times 32.5 \\ \hline 375 \\ 2500 \\ \hline 406.25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 65.0 \\ - 22.4 \\ \hline 42.6 \\ 31.2 \\ \hline 124 \\ \times 24 \\ \hline 496 \\ 576 \\ \hline 2976 \\ + 4 \\ \hline 676 \end{array}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)