МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} & (1) \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 & (2) \end{cases}$$

Разложим в ур-и (1) подкоренное выр-е на множители: $2xy-12y-x+6=$

$=2y(x-6)-(x-6)=(x-6)(2y-1)$. Замена: $\boxed{x-6=a}$ $\boxed{2y-1=b}$. Тогда:

$a-6b=(x-6)-12y+6=x-12y$, т.е. ур-е (1) можно обозначить

как $a-6b=\sqrt{a\cdot b}$.

В ур-и (2) выделим полные квадраты по x и y:

$$x^2+36y^2-12x-36y=(x^2-12x+36)-36+36\left(y^2-y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=45$$

$$(x-6)^2-36+9\cdot 4\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-36\cdot\frac{1}{4}=45$$

$$(x-6)^2+9(2y-1)^2=45+36+9$$

$a^2+9b^2=90$. Теперь, у нас другая система уравнений:

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{a\cdot b} & (I) \\ a^2+9b^2=90 & (II) \end{cases}$$

В ур-и (I): $\begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ \cancel{a-6b \Rightarrow 0} - \text{ОДЗ.} \\ a-6b\geq 0 \Rightarrow a\geq 6b \end{cases}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $a^2-13ab+36b^2=0$ Выражаем здесь a через b:

$$D=169b^2-4\cdot 36b^2=25b^2$$

$$a_{12}=\frac{13b\pm 5b}{2} \quad \boxed{a_1=9b} \quad \boxed{a_2=4b}$$

. Теперь a_1 и a_2 подставим в ур-е (II):

1) $a_1=9b \Rightarrow 81b^2+9b^2=90$, откуда $b=\pm 1$, а $a=\pm 9$. Т.к. по ОДЗ у нас $a-6b\geq 0$, то остаётся лишь вариант, где $a=9$, и $b=1$.

2) $a_2=4b \Rightarrow 16b^2+9b^2=90$. Тогда $b=\pm 3\sqrt{\frac{2}{5}}$, и $a=\pm 12\sqrt{\frac{2}{5}}$.

По ОДЗ: $a\geq 6b$, тогда единственный правильный вариант остаётся: $a=-12\sqrt{\frac{2}{5}}$, и $b=-3\sqrt{\frac{2}{5}}$.

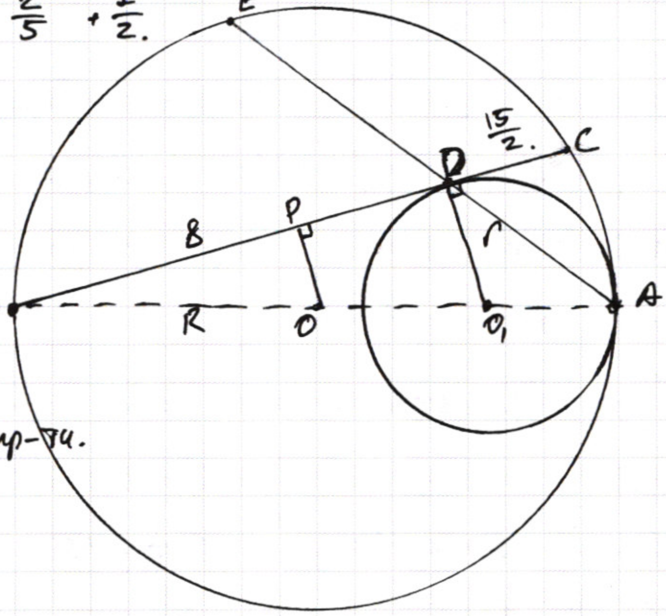
Через имеющиеся значения a и b найдём x и y.

№2 продолжение.

Через имеющиеся значения a и b найдём x и y:

$\begin{cases} a = x-6 \\ b = 2y-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a+6 \\ y = \frac{b+1}{2} \end{cases}$ Откуда $x_1 = 9+6 = 15$ и $y_1 = \frac{1+1}{2} = 1$, и $x_2 = -12\sqrt{\frac{2}{5}} + 6$ и $y = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{1}{2}$.

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 15 \\ y_1 = 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = -12\sqrt{\frac{2}{5}} \\ y_2 = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{1}{2}. \end{cases}$



№4.

1). хорда $BC = \frac{17}{2} + \frac{15}{2} = 16$

Пусть P - середина BC. $\Rightarrow BP = 8$. По св-ву окр-ти $\angle BPO = 90°$. O - центр ~~малой~~ большой окр-ти.

R - радиус большой окр-ти, r - радиус малой окр-ти.

тогда $BO = R$, $PO = \sqrt{R^2-64}$, $DO_1 = r$

Выведем подобие: $\frac{PO}{DO_1} = \frac{BP}{BD}$. т.е.:

$$\frac{\sqrt{R^2-64}}{r} = \frac{8}{\frac{17}{2}} = \frac{16}{17} \quad (1)$$

$OO_1 = R - r$, т.к. окр-ти касаются внутренне.

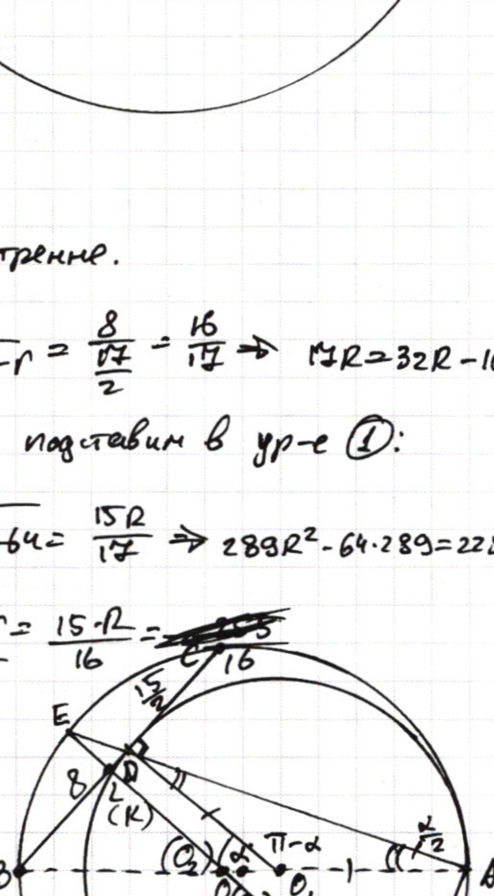
Выведем другое подобие: $\frac{BO}{BO_1} = \frac{BP}{BD}$, т.е. $\frac{R}{2R-r} = \frac{8}{\frac{17}{2}} = \frac{16}{17} \Rightarrow 17R = 32R - 16r$

$15R = 16r \Rightarrow r = \frac{15R}{16}$. Теперь известное r подставим в ур-е (1):

$\frac{\sqrt{R^2-64}}{\frac{15R}{16}} = \frac{16}{17} \Rightarrow \frac{16\sqrt{R^2-64}}{15R} = \frac{16}{17} \Rightarrow \sqrt{R^2-64} = \frac{15R}{17} \Rightarrow 289R^2 - 64\cdot289 = 225R^2$

$64R^2 = 64\cdot289 \Rightarrow \boxed{R = 17}$. Тогда $r = \frac{15\cdot R}{16} = \frac{255}{16}$

Ответ 1: $r = \frac{255}{16}$; $R = 17$.



~~2) Пусть $BO_1D = \alpha$, тогда смежный $OO_1A = \pi - \alpha$.~~
~~Из равнобедр. Δ-ка DO_1A ($DO_1 = AO_1 = r$)~~
~~$\angle O_1AD = O_1DA = \frac{\pi - DO_1A}{2} = \frac{\pi - (\pi-\alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}$~~
~~Пусть EF пересекает BC в т. (L), а BA в точке (O_2)~~
~~т.к. $O_2E \perp BC$, $O_1D \perp BC$ (т.к. O_1D - радиус, ⊥ BC касат.),~~
~~то $O_2E \parallel O_1D$ [Продолжение - на странице 4].~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ (1)

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{2}{5}$ (2)

В ур-и (2) сумму левой части представим как произведение: $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha =$
$= 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta = -\frac{2}{5}$

В полученное ур-е подставляем $\sin(2\alpha+2\beta)$ из 1-го как $\frac{1}{\sqrt5}$, т.е.
$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta = -\frac{2}{5} \Rightarrow 2\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos2\beta = -\frac{2}{5}$. Тогда $\boxed{\cos2\beta = \frac{1}{\sqrt5}}$ и $\boxed{\sin2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}}$

В 1-м ур-и: $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$. Подставим в ур-е (1) известные нам значения $\sin2\beta$ и $\cos2\beta$:

1 случай) $\cos2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$ и $\sin2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\cos2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin2\alpha+2\cos2\alpha = -1$. Выразим $\sin2\alpha$ и $\cos2\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{2(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -1$$

$2\operatorname{tg}\alpha+2-\operatorname{tg}^2\alpha = -1-\operatorname{tg}^2\alpha$; $\operatorname{tg}^2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha-3=0 \Rightarrow \underline{\operatorname{tg}\alpha_1 = 3;\ \operatorname{tg}\alpha_2 = -1}$. Т.к. мы нашли только 2 значения $\operatorname{tg}\alpha$, рассмотрим 2-й случай:

2) $\cos2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$; $\sin2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}-\cos2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin2\alpha-2\cos2\alpha = -1$. Подставим $\operatorname{tg}\alpha$ в $\sin2\alpha$ и $\cos2\alpha$:

$$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-\frac{2(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -1 \Rightarrow 2\operatorname{tg}\alpha-2+2\operatorname{tg}^2\alpha = -1-\operatorname{tg}^2\alpha \Rightarrow 3\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha-1=0 \Leftrightarrow$$

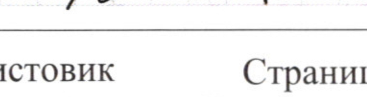
$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha_3 = -1$, $\operatorname{tg}\alpha_4 = \frac{1}{3}$.

Ответ: возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$: $\begin{cases}\operatorname{tg}\alpha_1 = 3\\ \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{1}{3}\\ \operatorname{tg}\alpha_3 = -1.\end{cases}$

№3.

$10x+|x^2-10x|^{\log_3(4)} \geqslant x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$; ОДЗ: $10x-x^2>0 \Rightarrow |x^2-10x| = 10x-x^2$.

Замена: $10x-x^2 = p$. $p>0$



откуда $x\in(0;10)$.

№3
$P>0 \Rightarrow \quad P + 4^{\log_3 P} \geq 5^{\log_3 P}.$

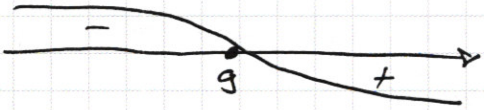
Так как $a^{\log_c b} = b^{\log_c(a)}$, то $4^{\log_3(P)} = P^{\log_3(4)}$ и $5^{\log_3(P)} = P^{\log_3(5)} \Leftrightarrow P + P^{\log_3(4)} \geq P^{\log_3(5)}$.

$P \geq P^{\log_3(5)} - P^{\log_3(4)}$

$P^{\log_3 3} \geq P^{\log_3 5} - P^{\log_3 4}$

$P^1\left(1 + P^{(\log_3 4 - \log_3 3)} - P^{(\log_3 5 - \log_3 3)}\right) \geq 0$

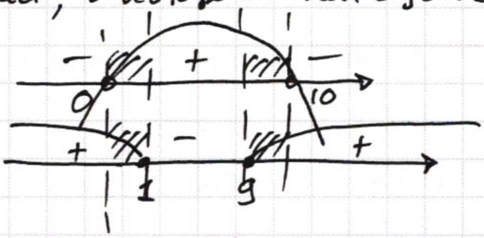
$P>0;\ P\left(1 + P^{\log_3\left(\frac{4}{3}\right)} - P^{\log_3\left(\frac{5}{3}\right)}\right) \geq 0.$ Единственно возможное здесь $P - P_0 = 9$.



Поэтому, т.к. $f(P)$ строго убывает при $P>1$, то $f(P) \geq 0$ при $P \in (1;9]$; $f(P)<0$ при $P>9$.

Поэтому в ответ подойдет только $P \in (1:9]$. Итого в ответ берем $P \in (0;9]$.

Нам известен интервал значений, в котором находятся P. Теперь через P выразим x: $\begin{cases} 10x - x^2 > 0 \\ 10x - x^2 \leq 9 \end{cases}$



$x^2 - 10x + 9 \geq 0$

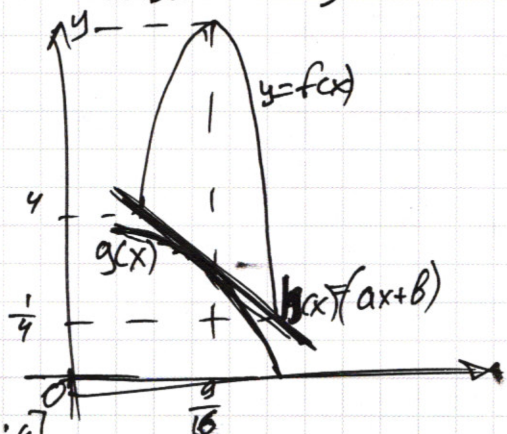
$x_1 = 9;\ x_2 = 1.$

Ответ: $x \in (0;1] \cup [9;10)$.

№6 $\quad \frac{16x-16}{4x-5} \leq ax+b \leq -32x^2 + 36x - 3.$

$f(x) = -32x^2 + 36x - 3$ — парабола, направленная ветвями вниз.

$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}.$



В точках $x = \frac{1}{4}$ и $x = 1$ $f(x)$ принимает значения 4 и 1 соответственно.

Данная парабола выпукла вверх, поэтому для того, чтобы $ax+b \leq -32x^2+36x-3$ для всех x на интервале $[\frac{1}{4};1]$ было верным, надо, чтобы прямая $ax+b$ на концах отрезка $[\frac{1}{4};4]$ была не выше параболы, т.е. $h(\frac{1}{4}) = \frac{a}{4} + b \leq 4$

$h(1) = a + b \leq 1.$

$g(x) = \frac{16x-16}{4x-5} = \frac{16x-20+4}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$ — гипербола, выпукла вверх.

Зная, что прямая $g(x)$ проходит точки с координатами $(\frac{1}{4};4)$ и $(1;1)$, мы можем выразить a и b.

☐ черновик ☑ чистовик Страница №4
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 продолжение.

Мы можем выразить а и в: $\begin{cases} \frac{a}{4}+b=4 \\ a+b=1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=5 \end{cases}$ т.е. прямая $h(x)$ принимает вид $\boxed{-4x+5}$

Если мы будем решать с-му:

$\begin{cases} y=-4x+5 \\ y=4+\frac{4}{4x-5} \end{cases}$ (ищем общие точки у графиков $g(x)$ и $h(x)$), то получим только одну общую точку: $x=\frac{3}{4}$, $y=2$, отсюда выходит, что прямая $h(x)$ – касательная к графику $g(x)$.

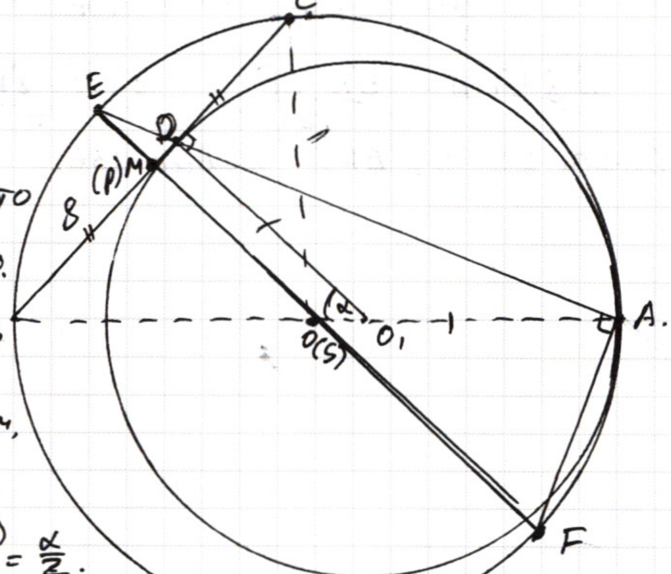
$h(\frac{1}{4})\leq 4$, $h(1)\leq 1$, следовательно любая прямая $h(x)=ax+b$ будет лежать на $[\frac{1}{4};1]$ и будет не выше прямой $h(x)=-4x+5$.

Никакой другой прямой быть не может, т.к. если $h(\frac{1}{4})<4$ или $h(1)<1$, то $h(x)=ax+b$ лежит ниже $h(x)=-4x+5$. и точка касания с $g(x)$ будет ниже $(\frac{3}{4};2)$, т.е. $h(\frac{3}{4})<2$, но на гиперболе $g(\frac{3}{4})=2$. что противоречит этому условию.

Поэтому нам подходит только одна прямая: $h(x)=-4x+5$.

Ответ: $a=-4$; $b=5$.

№4 Продолжение.



2) т.к. BC – касательная к окр-ти O_1, то BO_1D – прямоуг. Δ-к, где $\angle O_1DB=90$.

Возьмём $\angle BO_1D$ как α. Тогда смежный с ним будет (DO_1A) $\pi-\alpha$. В связи с тем, что DO_1 и O_1A – радиусы r и Δ-к DO_1A – равнобедренный, то $\angle O_1AD=\angle O_1DA=\frac{\pi-(\pi-\alpha)}{2}=\frac{\alpha}{2}$.

Допустим, что EF пересекает BC в точке M и AB в точке S.

№4 Продолжение.

Т.к. $SE \perp BC$ и $O_1D \perp BC$, то SE перпендикулярна ~~…~~ O_1D. и поэтому $\angle SEA = \angle O_1DA = \frac{\alpha}{2}$.

Но если мы проведём радиус OE, то заметим, что Δ-к AOE - равнобедренный и в нём $EO = OA = R$, а $\angle OAE = \frac{\alpha}{2}$, тогда $\angle OEA = \frac{\alpha}{2}$. Т.е. $\angle AEO = \angle AES$. Это значит, что точка O лежит на прямой ES, а исходя из того, что EP пересекает AB только в одной точке, мы получим, что точки O и S совпадают.

Тогда совпадают и точки P и M.

Треугольник BPO у нас прямоугольный, тогда $\sin BOP = \frac{BP}{BO} = \frac{8}{17}$; $\angle BOP = \angle\alpha$

$\sin\alpha = \frac{8}{17} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{15}{17} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{15}{17}}{2}} \sqrt{\frac{\frac{32}{17}}{2}} = \sqrt{\frac{16}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

тогда $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{17}}$.

Отрезок EF проходит через точку $O \Rightarrow EF$ - диаметр окружности O. $\Rightarrow$

~~Т.к. … BO …~~ $\Rightarrow$ $EF = 2R = 34$, причём $\angle EAF = 90°$, т.к. он вписанный и опирается на диаметр.

Т.к. $\angle OEA = \frac{\alpha}{2}$, то $\angle EFA = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, тогда $\sin\angle EFA = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = $

$= \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{\sqrt{17}}$ как мы вывели раньше, и тогда $\angle EFA = \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}$

Ответ 2: $\angle AFE = \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}$

Про Δ-к AEF нам известно то, что он прямоугольный, его гипотенуза $EF = 34$,

$\sin\angle FEA = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow AF = 2\sqrt{17}$, $\cos\angle FEA = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow EA = 8\sqrt{17}$

~~$\frac{x}{2\sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $x = \frac{8 \cdot 17}{\sqrt{17}} = 8\sqrt{17}$~~

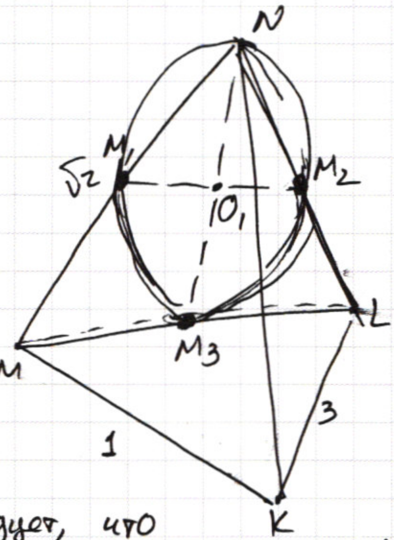
$S_\Delta EFA = \frac{EA \cdot AF}{2} = \frac{8\sqrt{17} \cdot 2\sqrt{17}}{2} = 8 \cdot 17 = 136$.

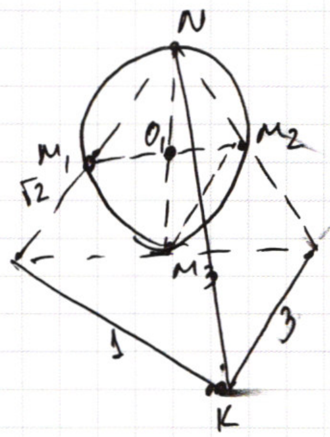
Ответ 3: $S_\Delta AFE$ равна 136.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

$KL=3,\ KM=1,\ MN=\sqrt{2}.$





Пусть M_1 - середина MN
M_2 - середина NL
M_3 - середина ML

Так как M_1M_2 - сред. линия Δ-ка MNL и M_2M_3 - сред. линия Δ-ка MNL, то

$\begin{cases} M_1N \parallel M_3M_2 \\ NM_2 \parallel M_1M_3 \end{cases}$ и отсюда следует, что $NM_1M_3M_2$ - параллелограм. Но $NM_1M_3M_2$ вписан в окружность O_1 $\Rightarrow$ этот параллелограм - ~~прямоугольник, а, следовательно~~ - квадрат.

$\angle N=\angle M_1=\angle M_3=\angle M_2=90$. NM_3 - диаметр окр-ти O_1.

Рассмотрим треугольники NM_2O_1 и NM_1O_1.

Т.к. NO_1, M_1O_1, M_2O_1 и M_3O_1 - радиусы окр-ти O_1, то $NO_1=M_1O_1=M_2O_1=M_3O_1$

Точка M_1 симметрична точке M_2 отн-но прямой NM_3, значит $\Delta NM_1O_1=\Delta NM_2O_1$.

M_1M_2 - диаметр окр-ти O_1 и средняя линия Δ-ка MNL $\Rightarrow$ отсюда следует, что $\Delta NMM_3=\Delta NLM_3$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $NM=NL$ $\Rightarrow$ ΔMNL - равнобедренный. Тогда

$NM=NL=\sqrt{2}\Rightarrow LM_2=NM_2=NM_1=MM_1=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Заметим, что LM - касательная к окр-ти O_1 и $LM_3=MM_3$.

Исходя из теоремы о касательной и секущей:

$$(LM_3)^2=LM_2\cdot LN=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}=1\Rightarrow LM_3=1\Rightarrow \underline{ML=2LM_3=2.}$$

Ответ 1: $LM=2$.

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

По условию: $BD = \frac{17}{2}$; $CD = \frac{15}{2}$

Радиус большей окр-ти Ω – R

Радиус меньшей окр-ти ω – r

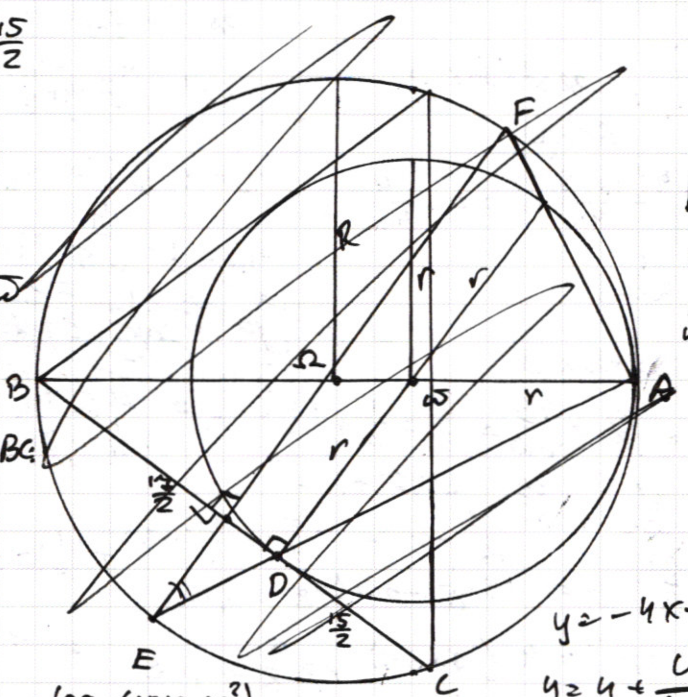
BC – касательная к окр-ти ω

и BC касается ω в точке D.

Проведём радиус окр-ти ω к BC.

$\omega D \perp BC$.

$\omega D \parallel EF$



$BD = \frac{17}{2} = 8{,}5$

$CD = \frac{15}{2} = 7{,}5$

$\omega D = r$

№3

$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + (10x-x^2)^{\log_3 5}$

$10x - x^2 + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geqslant (10x-x^2)^{\log_3 5}$

$x^2 - 10x = a$

$-a + |a|^{\log_3 4} \geqslant (-a)^{\log_3 5}$

$|a|^{\log_3 4} \geqslant a + (-a)^{\log_3 5}$

1) $a<0$:

$(-a)^{\log_3 4} \geqslant +a + (+a)^{\log_3 5}$

$(-a)^{\log_3 4} - a^{\log_3 5} \geqslant a^{\log_3 3}$

$y = -4x+5$

$y = 4 + \frac{4}{4x-5}$

$-4x+5 = 4 + \frac{4}{4x-5}$

$(1-4x)(4x-5) = 4.$

$4x - 5 - 16x^2 + 20x =$

$= 24x - 16x^2 - 5 =$

$= 4.$

$16x^2 - 24x + 9 = 0.$

$D = 576 - 4\cdot 9\cdot 16 =$

$= 0.$

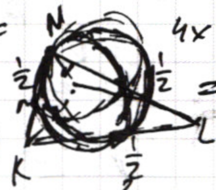
$(4x-3)^2 = 0$

$x_1 = \frac{3}{4}.$

$y = -4\cdot\frac{3}{4} + 5 =$

$= 2.$

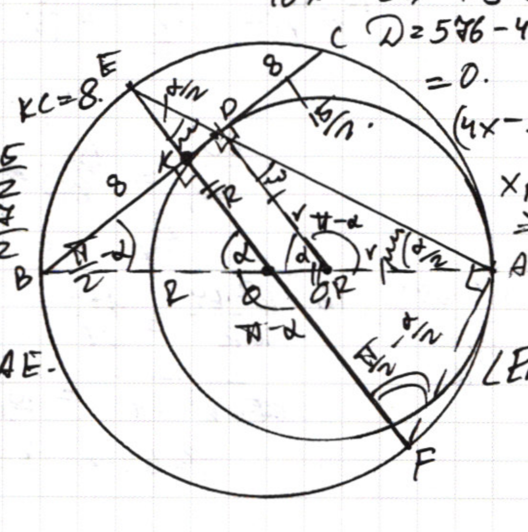
т. перес: $(\frac{3}{4}; 2)$



$BK = KC = 8.$

$DC = \frac{15}{2}$

$BO = \frac{17}{2}$



$KF \parallel DO_1$

$KF \perp BC$

$DO_1 \perp BC$

$\angle BO_1D = \alpha$

$\angle O_1DA = \frac{\alpha}{2} = \angle O_1AE.$

$\angle O_1AE = \angle OEA.$

$\angle EAF = \frac{\pi}{2}.$

☑ черновик ☒ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№6 $\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$$\begin{cases} \frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \\ ax+b \le -32x^2+36x-3 \\ \frac{16x-16}{4x-5} \le -32x^2+36x-3 \quad (1) \end{cases}$$

(1) $\frac{16(x-1)}{4(x-1)-1} \le -32x^2+36x-3$

$16x-20$

$\frac{16(x-1)}{4x-5} = \frac{4(4x-5)+4}{4x-5} = 4+\frac{4}{4x-5}$

$$\begin{cases} y_1 = 4+\frac{4}{4x-5} \\ y_2 = -32x^2+36x-3 \end{cases}$$

$x_в = -\frac{b}{2a} = \frac{36}{64} = \frac{4\cdot 9}{4\cdot 16} = \frac{9}{16} = \frac{1}{2}+\frac{1}{16} =$ $=0{,}5+\dots$

$y_в = -32\cdot\frac{81}{256} + 36\cdot\frac{9}{16} - 3 = -\frac{81}{8}+\frac{81}{4}-3 =$

$= \frac{81}{8}-3 = 10\frac{1}{8}-3 = 7\frac{1}{8} = 7{,}125$

$36x-32x^2 = 4x(9-8x)$ $x=\frac{9}{8}=1{,}125$

$y_{1,125} = 4+\frac{4}{4\cdot 1{,}125-5} = 4-\frac{4}{0{,}5} = -4.$

$ax+b = kx+b = y$

$y_2 = \frac{4}{4x-8}+4 =$

$= 4+\frac{4}{8-5} = 4+\frac{4}{3}$

$y_0 = 4+\frac{4}{-5} = 4-0{,}8 = 3{,}2$

$y_1 = 4+\frac{4}{4-5} = 4+-\frac{4}{1} = 0.$

$y_{0,5} = 4+\frac{4}{2-5} = 4-\frac{4}{3} = 2{,}67$

$y_3 = 4+\frac{4}{12-5} = 4+\frac{4}{7} = 4{,}57$

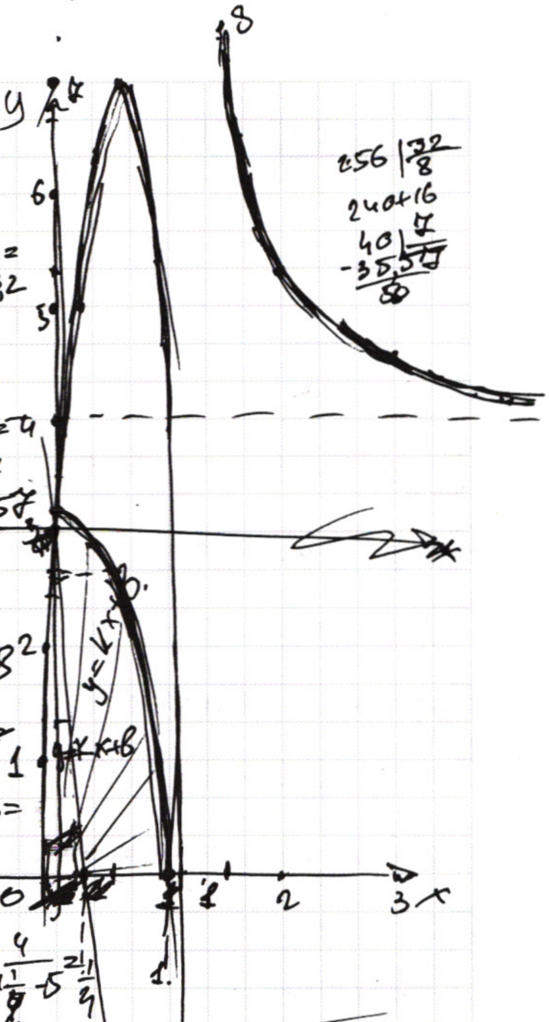
$y_4 = 4+\frac{4}{16-5} = 4+\frac{4}{11}$

$y_{1,5} = 4+\frac{4}{6-5} = 4+4 = 8$

~~$f(\frac{1}{4}) = 4+\frac{4}{4-5} = 4-\dots$~~

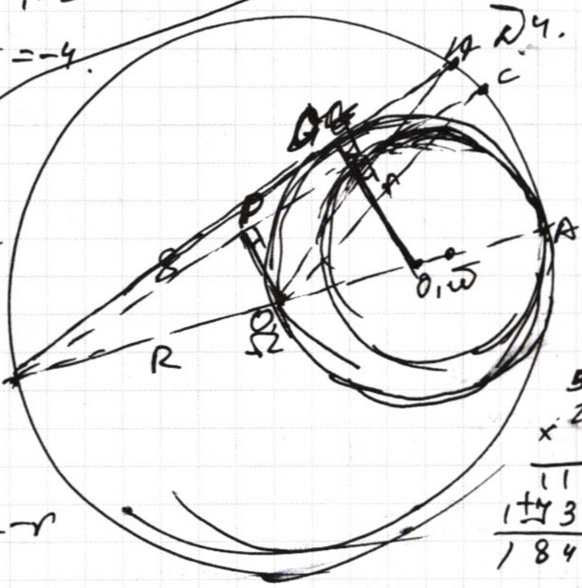
$f(\frac{1}{4})_2 = -\frac{32}{16}+\frac{36}{4}-3 = 9-3-2 = 5.$

$f(\frac{1}{4}) = 4+\frac{4}{4\cdot\frac{1}{4}-5} = 4+\frac{4}{-4} = 4-1 = 3$



$256 \mid \frac{32}{8}$ $240+16$

№4.



$BC=16$

$BO_1 = O_1A = O_1C = R$

$BP = \frac{\frac{17}{2}+\frac{15}{2}}{2} = 8$ $BP=8$ $OP = \sqrt{R^2-64}$

$\frac{\sqrt{R^2-64}}{r} = \frac{BP}{BO}$

$\frac{\sqrt{R^2-64}}{r} = \frac{8}{\frac{17}{2}} = \frac{16}{17}.$

$OO_1 = R-r$

$\frac{BO}{BO_1} = \frac{BP}{BD}$

$\frac{R}{2R-r} = \frac{8}{\frac{17}{2}} = \frac{16}{17}$

$17R = 32R-16r$ $15R$

$16r = 15R$

$r = \frac{15R}{16}.$

$\frac{\sqrt{R^2-64}}{\frac{15R}{16}} = \frac{16\sqrt{R^2-64}}{15R} = \frac{16}{17}$

$\sqrt{R^2-64} = \frac{15R}{17}$

$R^2-64 = \frac{225R^2}{289}$

$289R^2-225R^2-64=0$ $64R^2$ $\cdot 289$

$R^2 = 289$

$R=17$

$289 \times 64 = 1156 + 1734 = 18496$

$289 - 225 = 64$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} \frac{a}{4}+b=4 \\ a+b=1 \end{cases}$ $a=1-b$

$\frac{1-b}{4}+b=4$

$1-b+4b=16$

$3b=15 \Rightarrow b=5$

$a=1-b=-4$

$f(x)=-32x^2+36x-3$

$x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{-36}{-64}=\frac{9}{16}$

$y_0=-32\cdot\frac{81}{256}+36\frac{9}{16}-3=$

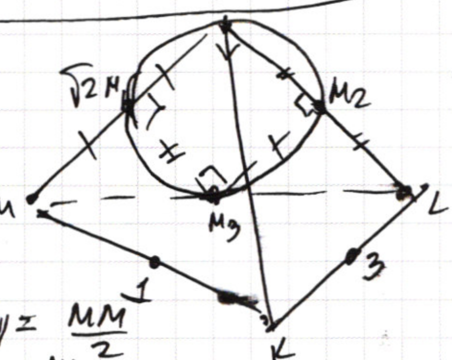
$=\frac{81}{4}-\frac{81}{8}-3=\frac{81}{8}-3=$

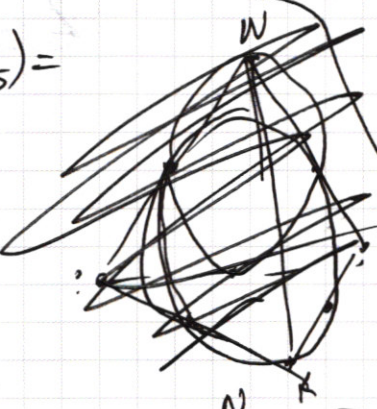
$=10,\frac{1}{8}-3=7\frac{1}{8}=$

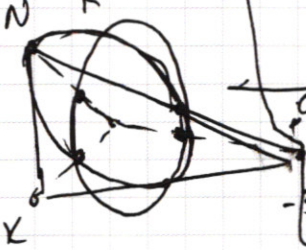
$=7,125$

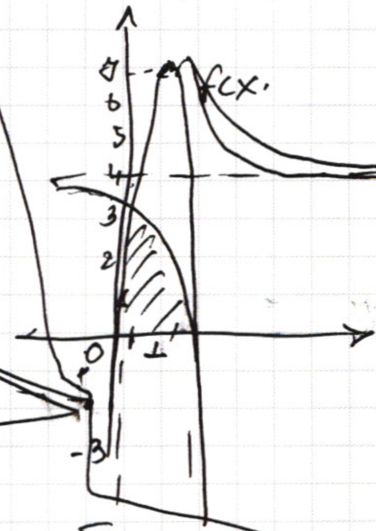
$-\frac{2}{5}=-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5}=-2\left(-\frac{1}{\sqrt5}\cdot-\frac{1}{\sqrt5}\right)=$

$=-2\sin^2(2\alpha+2\beta)\Rightarrow$









$M_1N=\frac{MM}{2}$

$M_2N=\frac{NL}{2}$

$M_3M=\frac{ML}{2}$

$M_3M_2=\frac{NM}{2}$

$M_1M_3=\frac{NL}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow M_3M_2=N_1N$

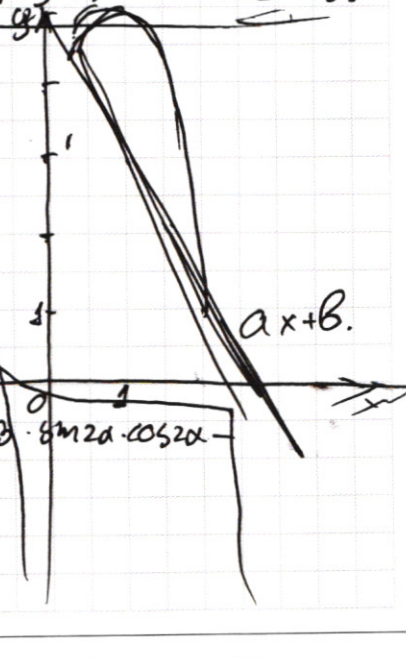
$=\frac{\sqrt2}{2}$

$M_1M_3=NM_2 \Rightarrow M_1N=NM_2=M_3M_2=M_1M_3 \Rightarrow MN=NL=\sqrt2.$

$f(\frac14)=-32\cdot\frac{1}{16}+36\cdot\frac14-3=$

$=9-3-2=5$

$f(1)=-32+36-3=1.$



$\Rightarrow \sin2\alpha\cdot\cos4\beta+\sin4\beta\cos2\alpha=-2\sin^2(2\alpha+2\beta)$

$-2\sin^2(2\alpha+2\beta)=-2(\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha)^2=$

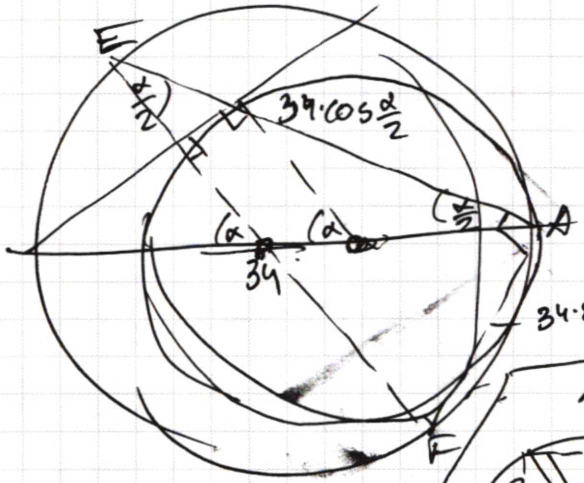
$=-2(\sin^2 2\alpha\cdot\cos^2 2\beta+2\cdot\sin2\beta\cdot\cos2\beta\cdot\sin2\alpha\cdot\cos2\alpha+$

$+\sin^2 2\beta\cdot\cos^2 2\beta)=-2\sin^2 2\alpha\cos^2 2\alpha-4\sin2\beta\cdot\cos2\beta\cdot\sin2\alpha\cdot\cos2\alpha-$

$-2\sin^2 2\beta\cdot\cos2\alpha.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



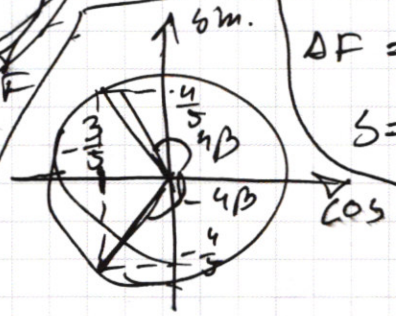
$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}.$

$AE = \frac{34 \cdot 4}{\sqrt{17}} = 8\sqrt{17}.$

$AF = \frac{34}{17} = 2\sqrt{17}.$

$S = \frac{2\sqrt{17} \cdot 8\sqrt{17}}{2}.$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)