МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2},\\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)}, \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25. \end{cases}$$

Пусть $a=x-2$, $b=y-1$, тогда: $x-2y=a-2b$ и имеем:

$$\begin{cases} (a-2b)^2=ab, \\ a-2b\geq 0, \\ a^2+9b^2=25, \end{cases}$$

Рассмотрим $(a-2b)^2=ab$:

$a^2-4ab+4b^2-ab=0$

$a^2-5ab+4b^2=0$ / пусть $b\neq 0$, разделим на b^2

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\left(\frac{a}{b}\right)+4=0$

$D=25-4\cdot 4=9$

$\frac{a}{b}=\frac{5\pm 3}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{a}{b}=\frac{8}{2}=4 \Rightarrow a=4b \\ \frac{a}{b}=1 \Rightarrow a=b \end{array}\right.$

Итак, имеем 3 случая:

I $b=0$, тогда $\begin{cases} a^2=a\cdot 0, \\ a^2+9\cdot 0=25, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0, \\ a=\pm 5, \end{cases}$ противоречие, значит $b\neq 0$

II $\begin{cases} a=b, \\ a^2+9b^2=25, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b, \\ a^2+9a^2=25, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b, \\ 10a^2=25, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b, \\ a^2=\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=\sqrt{\frac{5}{2}} \\ b=\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} a=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ b=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \end{array}\right.$

III $\begin{cases} a=4b, \\ a^2+9b^2=25, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4b, \\ 16b^2+9b^2=25, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4b, \\ 25b^2=25, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4b \\ b=\pm 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-4 \\ b=-1 \end{cases} \end{array}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Проверим получившиеся корни (удовлетворяют ли они $a-2b\geq 0$):

1) $\begin{cases} a=\sqrt{\frac{5}{2}}, \\ b=\sqrt{\frac{5}{2}}, \\ a-2b\geq 0, \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\frac{5}{2}}-2\sqrt{\frac{5}{2}}\geq 0$

$-\sqrt{\frac{5}{2}} \not\geq 0$, значит $a=b=\sqrt{\frac{5}{2}}$ не подходят.

2) $\begin{cases} a=-\sqrt{\frac{5}{2}}, \\ b=-\sqrt{\frac{5}{2}}, \\ a-2b\geq 0, \end{cases} \Rightarrow -\sqrt{\frac{5}{2}}+2\sqrt{\frac{5}{2}}\geq 0$

$\sqrt{\frac{5}{2}}\geq 0$, удовл., значит подходят, $\begin{cases} a=x-2 \\ b=y-1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{\frac{5}{2}}+2=x \\ -\sqrt{\frac{5}{2}}+1=y \end{cases}$

3) $\begin{cases} a=4, \\ b=1, \\ a-2b\geq 0, \end{cases} \Rightarrow 4-2\geq 0$

$2\geq 0$, удовл., $\begin{cases} a=x-2 \\ b=y-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$

4 $\begin{cases} a=-4, \\ b=-1, \\ a-2b\geq 0, \end{cases} \Rightarrow -4+2\geq 0$

$-2\not\geq 0$, неудовл., значит $a=-4$ и $b=-1$ не подходят

Ответ: $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};\ 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$, $(6;2)$.

Задание №1

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5} \end{cases}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}=-\frac{4}{5}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{4}{5}$ / но $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, подставим

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\cos 2\beta=-\frac{4}{5}$

$\cos 2\beta=-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{1}\right)=\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\beta=\pm\sqrt{1-\cos^2\beta}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

I случай: $\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$ и $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = \frac{-1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} + \frac{1}{\sqrt5} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \quad | \cdot \sqrt5$

$2 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha \cancel{- \sin^2\alpha} \cancel{+ \sin^2\alpha} + \cos^2\alpha = 0$

$2\cos\alpha \cdot 2\sin\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$

$2\cos\alpha(2\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l} 2\cos\alpha = 0, \\ 2\sin\alpha + \cos\alpha = 0, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2\sin\alpha = -\cos\alpha, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \text{ но при} \\ 2\operatorname{tg}\alpha = -1 \end{array}\right.$

та таком α $\operatorname{tg}\alpha$ неопред., значит остаётся $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$

II случай: $\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$ и $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin\alpha\cos\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} - \frac{1}{\sqrt5} \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt5} \quad / \cdot \sqrt5$

$4\sin\alpha\cos\alpha \cancel{- \cos^2\alpha} + \sin^2\alpha + \sin^2\alpha \cancel{+ \cos^2\alpha} = 0$

$2\sin\alpha \cdot 2\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$2\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0, \\ 2\cos\alpha + \sin\alpha = 0, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = 0, \\ \sin\alpha = -2\cos\alpha, \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = 0, \\ \operatorname{tg}\alpha = -2. \end{array}\right.$

Ответ: возможные значения: $0; -\frac{1}{2}; -2$.

Задача № 3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 + 18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$

Пусть $a = x^2+18x$, $a>0$ (из-за $\log_{12}(x^2+18x)$) имеем

$5^{\log_{12}a} + a \geq a^{\log_{12}13}$ / т.к. $a>0$ модуль сняли со знаком „+"

$a = a^{\log_{12}12}$

и т.к. $a^{\log_b c} = a^{\frac{\log_a c}{\log_a b}} = (a^{\log_a c})^{\log_b a} = c^{\log_b a}$, то $5^{\log_{12}a} = a^{\log_{12}5}$,

$a^{\log_{12}13} = 13^{\log_{12}a}$. Имеем:

$5^{\log_{12}a} + 12^{\log_{12}a} \geq 13^{\log_{12}a}$

функция $13^{\log_{12}a}$ монотонно возрастает

функция $5^{\log_{12}a}$ и $12^{\log_{12}a}$ монотонно возрастают, а значит и их сумма тоже, значит графики $5^{\log_{12}a} + 12^{\log_{12}a}$ ~~пересекутся~~ и $13^{\log_{12}a}$ пересекутся всего 1 раз, когда $\log_{12}a = 2$ (5; 12; 13 – пифагорова тройка). При $\log_{12}a > 2$ неравенство не будет исполняться, при $\log_{12}a < 2$ оно будет верно.

Таким образом нас интересуют все корни $\log_{12}a \leq 2$.

$\log_{12}a \leq \log_{12}144$ / $12>1$, значит $\log_{12}x$ - возрастает

$a \leq 144$ / $a = x^2+18x$, $a>0$

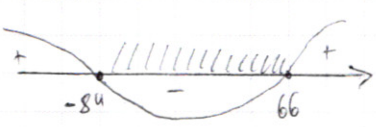
$$\begin{cases} x^2+18x-12^2 \leq 0, \\ x^2+18x > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-84; 66] \\ x \in (-\infty; 0) \cup (18; +\infty) \end{cases} \Rightarrow \cancel{x \in [-84;0) \cup (0;18;66]}$$
$x \in [-84; -18) \cup (0; 66]$

$x^2+18x-12^2 \leq 0$

$D = 18^2 + 4\cdot 12^2 = 6^2(\overbrace{3^2+4^2}^{25}) = (6\cdot 25)^2$

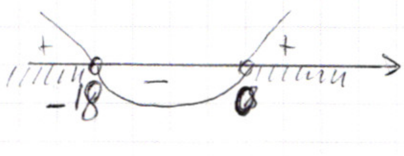
$x_1 = \frac{-18+150}{2} = 66$

$x_2 = \frac{-18-150}{2} = -84$



$x^2+18x > 0$

$x(x+18) > 0$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: ~~$x \in [-84; 0) \cup (18; 66]$~~ $x \in [-84; -18) \cup (0; 66]$

~~Задача №5~~

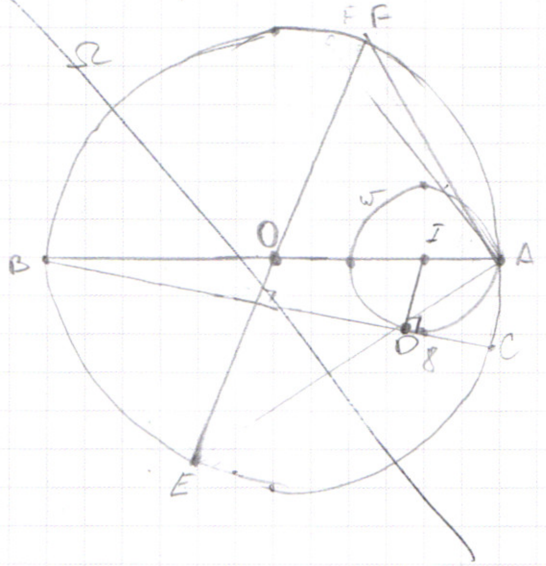
~~Ок-ти Ω и ω касаются в т. A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей ок-ти Ω, а хорда BC ок-ти Ω касается ω в т. D. Луч AD повторно пересекает Ω в т. E. Прямая, проходящая через т. E перпенд. BC, повторно пересекает Ω в т. F. Найдите радиусы ок-тей, угол AFE и площадь $\triangle AEF$, если известно, что CD = 8, BD = 17.~~

~~Если EF проходит через центр Ω, то тогда $\triangle AFE$ – прямоугольный~~

~~Если $\angle$ – искомый угол, то $\angle BOF = 2\angle$ (т. O – центр Ω)~~

~~$\angle DIA = 180 - 2\angle$ (т. I – центр ω)~~

~~$\angle EOA =$~~



Задача 5

$\frac{x}{y}$ может быть целым от 1 до 24, x и y взаимозамен.

$f(x/y) < 0$ если можно выделить простое число в произведение (например $\frac{5}{7} = 5 \cdot \frac{1}{7}$), тогда можно будет получить $f(5 \cdot \frac{1}{7}) = f(5) + f(\frac{1}{7}) = 1 + f(\frac{1}{7})$, но $f(\frac{5}{7}) < f(2)$, а значит $f(\frac{1}{7}) < 0$ $(f(2) = 0)$ $\Rightarrow$ нужны пары, сокращ. до простых больше ~~7.~~ Всего 7 чисел итак 49 пар Ответ: 49

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(2R-2r)2R = 17^2$

$4(R-r)R = 17^2$

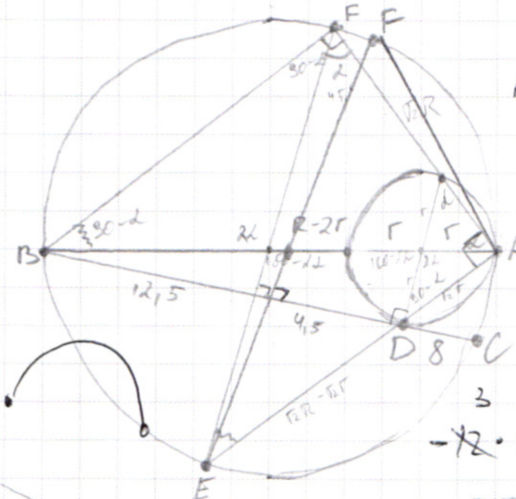
$x = 17 - x + 8$

$2x = 25$

$x = 12,5$

$17 \cdot 8 = R(R-r)$

$-3 \cdot 9 + 300 - 17$



$BF \cdot FA$ - ?

$AE^2 = 2R^2(1-\cos(180-22))$

$FA =$

$-3 \quad -\frac{4}{4} \quad -\frac{8}{4} \quad -\frac{4}{4} \quad -\frac{3}{4}$

$-36 + 4 = \frac{32}{9}$

$-12 + 3 \quad -9$

$-12 \cdot \frac{11}{4} +$

$-9 \cdot \frac{4}{4} + 3$

-8

-22

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

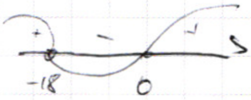
$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 18x$

$x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 5^{\log_{12}(x^2+18x)}$

$x^2+18x > 0$

$x(x+18) > 0$

$+\frac{22}{8} = \frac{11}{4}$



$a \geq a^{\log_{12}13} - 5^{\log_{12}a} \quad \frac{7}{5}$

$a \geq a^{\log_{12}13} - a^{\log_{12}5} \quad \frac{5}{5} = 1 + \frac{1}{5}$

$a^{\log_b c} = a^{\frac{\log_a c}{\log_a b}} = (a^{\log_a c})^{\log_b a}$

$c^{\log_b a}$

$a - a^{\log}$

$a^{\log_{12}12} - a^{\log_{12}13} + a^{\log_{12}5} \geq 0$

$12^{\log}$

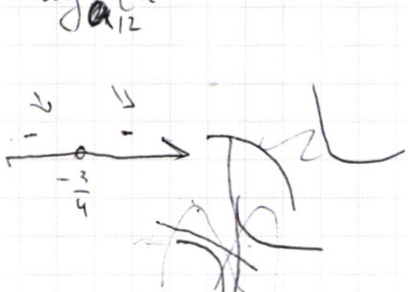
$a^{\log_{12}5} + a^{\log_{12}12} \geq a^{\log_{12}13} \quad \log_{a_{12}}(a$

$a^{\log_{12}5}(1 + a^{\log_{12}12 - \log_{12}5}$

$48x + 36 - 48x - 44$

$\frac{12x+4}{4x+3} = y \quad y' = \frac{12(4x+3) - 4(12x+11)}{(4x+3)^2} = -\frac{8}{(4x+3)^2}$

$-\frac{3}{4}$



$y = -8x^2 - 30x - 17 \quad D = 900 - 4 \cdot 8 \cdot 17$

$100 \cdot 9 \quad 4 \cdot 8 \cdot 17$

225

$-16x - 30 = 0$

$x = \frac{30}{-16} = \frac{15}{-8}$

$\frac{13}{12} \quad \frac{5}{12}$

$1 \geq a^{\log_{12}13 - 1} - a^{\log_{12}5 - 1}$

$a^{\log_{12}12} \geq a^{\log_{12}13} - a^{\log_{12}5} = a^{\log_{12}5}(a^{\log_{12}\frac{13}{5}} - 1)$

$12x+4$

$12^{\log_{12}a} \geq 13^{\log_{12}a} - 5^{\log_{12}a}$

$12^6 \geq 13^6 - 5^6$

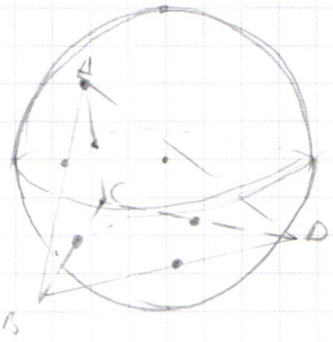
$12^{\log_{12}a} + 5^{\log_{12}a} \geq 13^{\log_{12}a}$

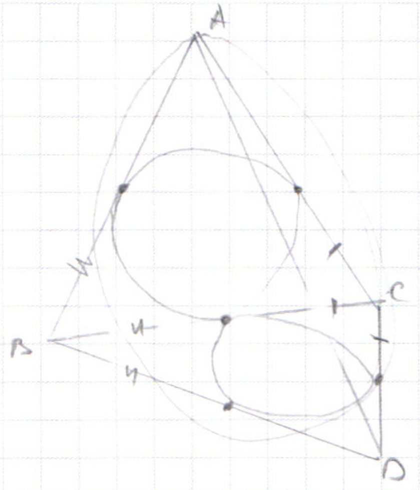
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)





$x_1+x_2=18$

$x_1 x_2 = 12^2$

$D=18^2+4\cdot 12^2$

$3^2\cdot 6^2 \quad (2\cdot 12)^2$

$6^2(3^2+4^2)=(6\cdot 25)^2$

$a^{\log_{12}5}-a^{\log_{12}13}+a\geq 0$

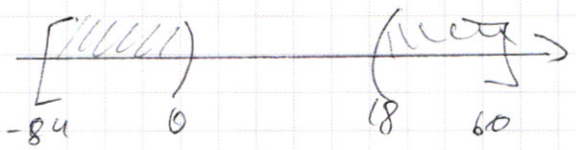
$5^{\log_{12}a}-13^{\log_{12}a}+12^{\log_{12}a}\geq 0$

$5^b+12^b\geq 13^b \qquad b=2$ - верно

$f(x)=3^{-x}+12^x \qquad 5^3+12^3 \qquad 5^3+12^3=125+$

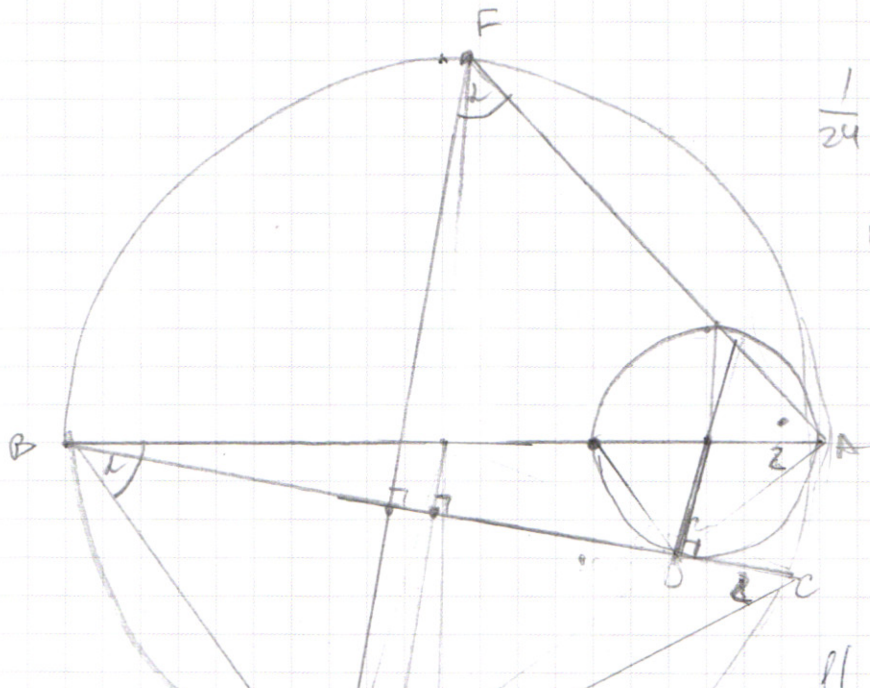
$5^b+12^b=13^b,\ b=2$

$f(x)=a^x \quad f'(x)=a^x\ln a$



24 … 1 … $\frac{1}{24}$

$\frac{x}{y}<0$



$\frac{1}{24}\cdot\frac{24}{1}$

$\frac{1}{12}\cdot\frac{24}{1}=2 \quad f\left(\frac{1}{12}\right)+f(24)$

$f(2)=\left[\frac{1}{2}\right]=0$

$f(24)=f(6)+f(4)$

$f(2)+f(2)+f(2)$

$\left[\frac{3}{4}\right]0+3\left[\frac{2}{4}\right]=0$

$5\cdot\frac{1}{2} \qquad f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=1$

$f\left(\frac{1}{a}\right) \qquad \frac{5}{5}=1+f\left(\frac{1}{5}\right)$

$f(1) \qquad f(1)=\left[\frac{1}{4}\right]=$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot$ $-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot 2\cdot\cos 2\beta = +\frac{4}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos$

$+\sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

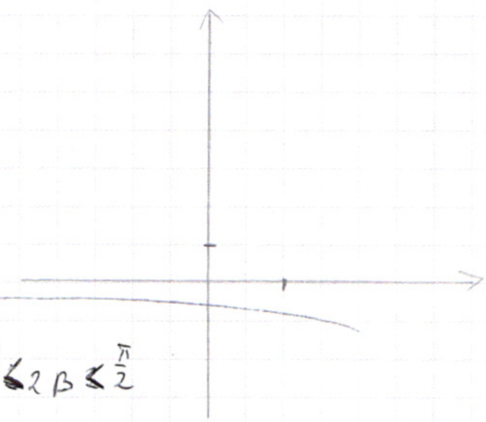
$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{x(y-1)-2(y-1)} = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ x^2+9y^2-4x-18y = 12 \end{cases}$$

$(x-2)(y-1) \geq 0$

$x^2-4x+4+(3y)^2-18y+9 = 12+4+9$

$(x-2)^2+(3y-3)^2 = 25$

$(x-2)^2+9(y-1)^2 = 5^2$



$\pi \leq 2\alpha+2\beta \leq 2\pi \quad -\frac{\pi}{2} \leq 2\beta \leq \frac{\pi}{2}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad 2\beta =$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$

$2\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha) = 0$

$\cos\alpha = 0$, но $tg\,\alpha$ неопред

$\sin\alpha + \cos\alpha = 0$

$\sin\alpha = -\cos\alpha$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -1 \quad tg\,\alpha = -1$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = -\frac{4}{5}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \qquad 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\beta = +\frac{4\sqrt{5}}{5\cdot 2} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta}$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin 2\beta = -\sqrt{1-\frac{4}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right.$$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

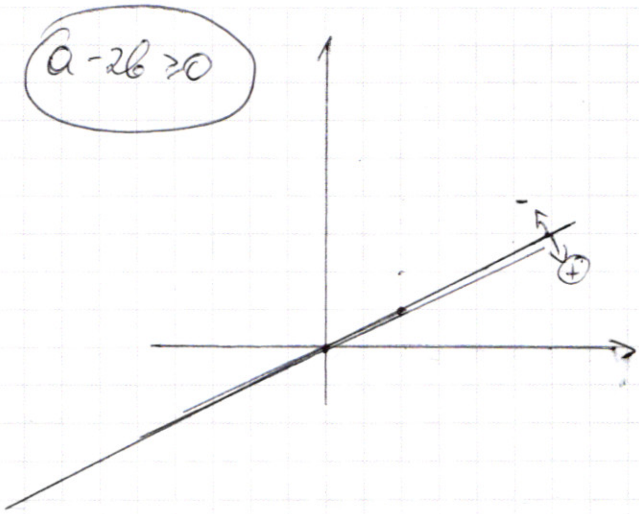
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$x \geq 2y \quad y \leq \frac{x}{2}$

$$\begin{cases} x-2y \geq 0 \\ (x-2y)^2 = xy - x - 2y + 2 \quad (x-2)(y-1) \\ (x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25 \end{cases}$$

$\boxed{a-2b \geq 0}$



$x^2 - 4xy + 4y^2 - xy + x + 2y - 2 = 0$

$x^2 - 5xy$

$a = x-2$
$b = y-1$

$x - 2y = x - 2 - 2(y-1) = a - 2b$

$$\begin{cases} (a-2b)^2 = ab \\ a^2 + 9b^2 = 25 \end{cases} \quad a^2 = 5^2 - 9b^2 = (5-3b)(5+3b)$$

$a^2 - 4ab + 4b^2 - ab = 0$

$a^2 - 5ab + 4b^2 = 0 \quad |:b^2$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5\frac{a}{b} + 4 = 0$

$D = 25 - 4 \cdot 4 = 9$

$\frac{a}{b} = \frac{5+3}{2} = 4 \quad a = 4b$

$\frac{a}{b} = \frac{5-3}{2} = 1 \quad a = b$

$\boxed{a - 2b \geq 0}$

провер

$16b^2 + 9b^2 = 25$

$25b^2 = 25$

$b = 1 \quad a = 4$

$b = -1 \quad a = -4$

$a^2 + 9b^2 = 25$

$a^2 + 9a^2 = 25$

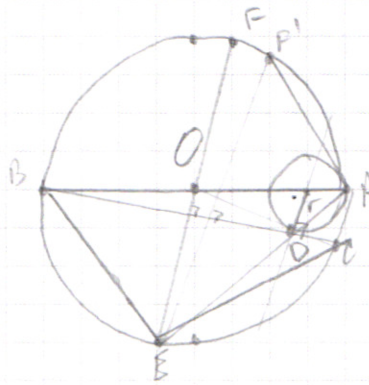
$10a^2 = 25$

$2a^2 = 5$

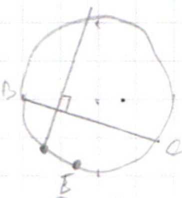
$a^2 = \frac{5}{2}$

$a = \sqrt{2,5} = b$

$a = -\sqrt{\frac{5}{2}} = b$



$r \perp BC$



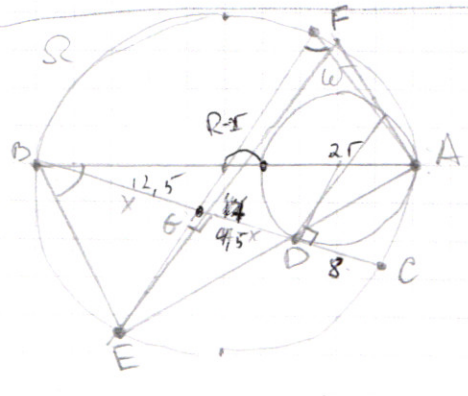
$R - ?$

$r - ?$

$\widehat{AFE} - ? \quad S'_{AEF} - ?$

$CD = 8$

$BD = 17$



$(R + R - r)(2R - 2r + 2r) = 17^2$

$\cancel{4R^2 - r^2 = 17^2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)