МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

√

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

√

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

√

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

√

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases}$$

$$(1): \begin{cases} xy-x-2y+2=x^2-4xy+4y^2 \ (1.1) \\ x \geqslant 2y \end{cases}$$

(1.1): $x^2-5xy+x+2y-2+4y^2=0$

$x^2+(1-5y)x+4y^2+2y-2=0$

$D=1-10y+25y^2-16y^2-8y+8=$

$=9y^2-18y+9=(3y-3)^2$

$$x=\frac{5y-1\pm(3y-3)}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{8y-4}{2}=4y-2 \\ x=\frac{2y+2}{2}=y+1 \end{array}\right.$$

Подставим полученные x в (2) с условием $x \geqslant 2y$.

$$\begin{cases} x \geqslant 2y \ (У) \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y+1 \\ y^2+2y+1+9y^2-4y-4-18y-12=0 \end{cases} (I) \\ \begin{cases} x=4y-2 \\ 16y^2-16y+4+9y^2-16y+8-18y-12=0 \end{cases} (II) \end{array}\right. \end{cases}$$

$$(I): \begin{cases} x=y+1 \\ 10y^2-20y-15=0 \ (I.1) \ \big|:5 \end{cases}$$

$(I.1)$: $2y^2-4y-3=0$

$\frac{D}{4}=4+6=10$

$y=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=\frac{2+\sqrt{10}}{2} \\ x=\frac{4+\sqrt{10}}{2} \end{cases} \text{– не уд.} \\ \begin{cases} y=\frac{2-\sqrt{10}}{2} \\ x=\frac{4-\sqrt{10}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

$(У)$: $\frac{4+\sqrt{10}}{2} \geqslant 2+\sqrt{10}$

$4+\sqrt{10} \geqslant 4+2\sqrt{10}$ – неверно $\Rightarrow$ $\Rightarrow x, y$ не уд.

$(У)$: $\frac{4-\sqrt{10}}{2} \geqslant 2-\sqrt{10}$

$4-\sqrt{10} \geqslant 4-2\sqrt{10}$ – верно.

(II): $\begin{cases} x = 4y - 2 \\ 25y^2 - 50y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y-2) = 0 \\ x = 4y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0 \\ x = -2 \end{cases} \to (y): -2 \geq 0 \text{ – неверно} \text{ – не уд.} \\ \begin{cases} y = 2 \\ x = 6 \end{cases} \to (y): 6 \geq 4 \text{ верно.} \end{array} \right.$

Ответ: $(6; 2)$, $\left(\frac{4-\sqrt{10}}{2}; \frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$.

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12} 13} - 18x$$

Пусть $t = x^2 + 18x$, $t > 0 \Rightarrow |t| = t$.

$$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$$

$$t^{\log_{12} 13} - t^{\log_{12} 5} \leq t \quad | : t > 0$$

$$t^{\log_{12} \frac{13}{12}} - t^{\log_{12} \frac{5}{12}} \leq 1$$

Пусть $f(t) = t^{\log_{12} \frac{13}{12}} - t^{\log_{12} \frac{5}{12}}$.

$f(t) \uparrow \forall t > 0 \Rightarrow \exists!\, t : f(t) = 1$.

Т.к. $t > 0$, $\log_{12} \frac{13}{12} > 0$, $\log_{12} \frac{5}{12} < 0$, то $t^{\log_{12} \frac{13}{12}} \uparrow \forall t > 0$ и $-t^{\log_{12} \frac{5}{12}} \uparrow \forall t > 0 \Rightarrow f(t) \uparrow \forall t > 0$ как сумма $\uparrow$ функций.

Подберём $t = 12^2 = 144$!

$$f(12^2) = 12^{2\log_{12} \frac{13}{12}} - 12^{2\log_{12} \frac{5}{12}} = \left(\frac{13}{12}\right)^2 - \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{169 - 25}{144} = 1.$$

Значит, подходят все $t \in (0; 144]$.

$$\begin{cases} x^2 + 18x > 0 \\ x^2 + 18x \leq 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty) \\ x^2 + 18x - 144 \leq 0 \quad (*) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty) \\ (x-6)(x+24) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$(*)$: $x^2 + 18x - 144 = 0$

$\frac{D}{4} = 81 + 144 = 225$

$x = \frac{-9 \pm 15}{1}$

$\left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = -24 \end{array} \right.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-24; 6] \\ x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [-24; -18) \cup (0; 6].$$

Ответ: $[-24; -18) \cup (0; 6]$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

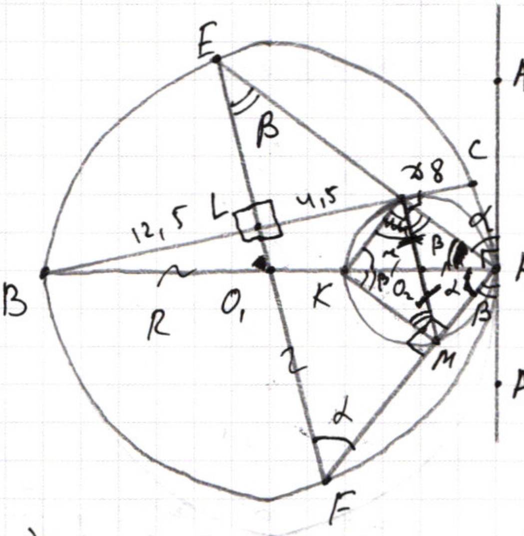
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Дано:
Ω и ω кас. внутр. в т. A,
$BD=17$,
$CD=8$,
$EF \perp BC$

Найти:
$R, r - ?$,
~~∠AEF-?~~
$\angle AFE - ?$,
$S_{AEF} - ?$



1) Проведём общ. внеш. кас-ую в т. A.
Тогда $\angle EAA_1 = \alpha$, $\angle FAA_2 = \beta$.

$\angle EFA = \alpha$, $\angle FEA_2 = \beta$.

~~2) ∠BAF = 90° - β~~
~~∠EFA = α.~~
~~∠EKA =~~

2) по т. о секущей и кас-ой:

$BD^2 = BK \cdot AB =$
$289 = 2(R-r) \cdot 2R \quad (1)$

3) Проведём DM.
$\angle MDA = \angle AKM = \beta$,
Тогда $EF \parallel DM$.

4) $EF \parallel DM \Leftrightarrow \angle DMK + 90^\circ + \angle EFA = 180^\circ$
$\beta + 90^\circ + \alpha = 180^\circ$
$\alpha + \beta = 90^\circ$.
Тогда DM - диаметр ω.

5) $\angle EAB + \angle BAF = \angle EAF = \alpha + \beta = 90^\circ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ EF - диаметр.

~~5) EF∥DM, AO₂ - медиана △ADM.~~
~~Тогда, если~~

6) Тогда $BL = LC$.
$BL = \frac{17+8}{2} = 12{,}5$,
$LD = 12{,}5 - 8 = 4{,}5$

7) $\triangle BDO_2 \sim \triangle BLO_1$.
$$\frac{R}{2R-r} = \frac{12{,}5}{17}$$
$17R = 25R - 12{,}5r$
$8R = 12{,}5r$
$R = \frac{25}{16}r$
$r = \frac{16}{25}R \quad (2)$

8) Подставим (2) в (1):
$289 = 4R^2 - 4Rr$
$289 = 4R^2 - 4R \cdot \frac{16}{25}R$
$289 = R^2\left(\frac{100-64}{25}\right)$
$R^2 = \frac{25 \cdot 289}{36}$
$R = \frac{5 \cdot 17}{6} = \frac{85}{6} \Rightarrow r = \frac{136}{15}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

9) Из подобия $\triangle B \mathcal{D} O_2$ и $\triangle BLO_1$:

$$\frac{O_1L}{r} = \frac{12,5}{17}$$

$$O_1L = \frac{12,5}{17} \cdot \frac{136}{15} = \frac{25}{2} \cdot \frac{8}{15} = \frac{5 \cdot 8}{2 \cdot 3} = \frac{40}{6}$$

10) $\angle BO_1L = \angle BO_2\mathcal{D} = 180° - 2\alpha$

~~cos∠F cos∠BO₁L = ...~~

$$\cos\angle BO_1L = \frac{40}{6} \cdot \frac{6}{85} = \frac{8}{17}$$

$$\cos\angle BO_1L = -\cos 2\alpha = \frac{8}{17}$$

$$2\sin^2\alpha - 1 = \frac{8}{17}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{25}{34}$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}} \\ \sin\alpha = -\frac{5}{\sqrt{34}} \text{ - не уд.} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \alpha = \arcsin\frac{5}{\sqrt{34}} = \angle AFE$$

~~$\sin\alpha = \cos\beta$~~

~~$\cos\beta = \frac{5}{\sqrt{34}}$~~

~~$\beta = \arccos\frac{5}{\sqrt{34}} = \angle$~~

10) $\sin\beta = \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$$FA = 2R\sin\beta = 2 \cdot \frac{85}{6} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{85}{\sqrt{34}}$$

11) $S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot \sin\alpha \cdot EF \cdot FA = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} \cdot 2 \cdot \frac{85}{6} \cdot \frac{85}{\sqrt{34}} = \frac{85^2 \cdot 5}{6 \cdot 34} =$

$= \frac{5^2 \cdot 17^2 \cdot 5}{6 \cdot 34} = \frac{5^3 \cdot 17}{6 \cdot 2} = \frac{2125}{12}$.

~~$= \frac{5 \cdot 8^2 \cdot 17^2}{17 \cdot 2 \cdot 6} = \frac{135 \cdot 8 \cdot 8}{4 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 17}{3} = \frac{80}{3} \cdot 17 = \frac{1360}{3}$~~

Ответ: $R = \frac{85}{6}$, $r = \frac{136}{15}$; $\angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}$; $S_{AFE} = \frac{2125}{12}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \quad (2) \end{cases}$$

(2): $2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$$-\frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

(1): $\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} \pm \sqrt{\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{4}{5}\right)} + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$-\frac{2}{5} \pm \frac{2}{5} + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

① $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$, $\cos 2\alpha = \pm\frac{3}{5}$

$2\cos^2\alpha - 1 = \pm\frac{3}{5}$

$\cancel{tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}}$

$\cancel{tg^2\alpha =}$

$$\left[\begin{array}{l} 2\cos^2\alpha = \frac{8}{5} \\ 2\cos^2\alpha = \frac{2}{5} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos^2\alpha = \frac{4}{5} \\ \cos^2\alpha = \frac{1}{5} \end{array}\right.$$

$$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\left[\begin{array}{l} tg^2\alpha = \frac{5}{4} - 1 \\ tg^2\alpha = 5 - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg^2\alpha = \frac{1}{4} \\ tg^2\alpha = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow tg\,\alpha \in \left\{\pm\frac{1}{2}; \pm 2\right\}.$$

② $\sin 2\alpha = 0.$

$\alpha = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$

$tg\,\alpha = 0.$

Ответ: $-2; 0; \frac{1}{2}; 2; -\frac{1}{2}.$

№6

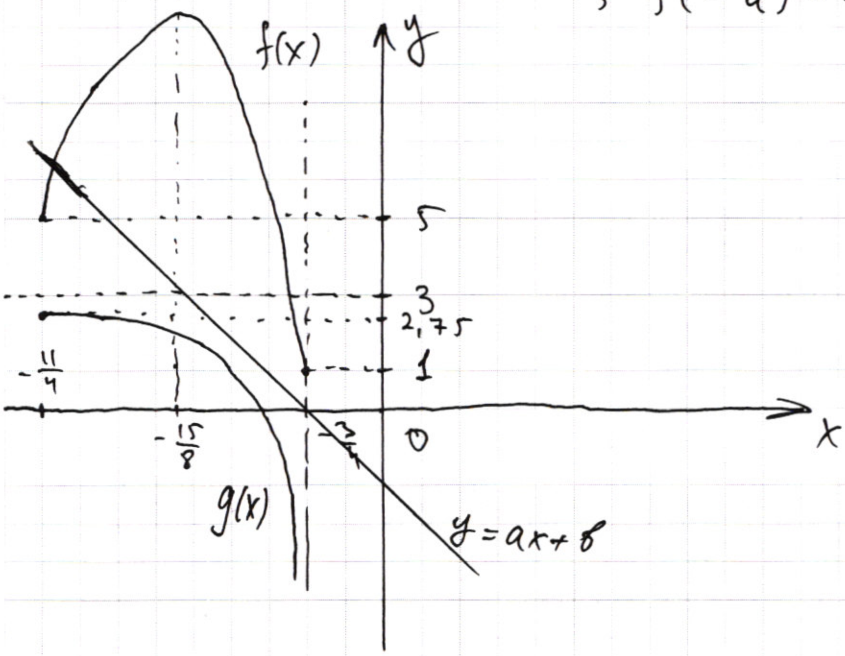
$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17, \quad x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$$

$$g(x) = \frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}; \quad g\left(-\frac{11}{4}\right) = 2{,}75.$$

вершина

$$f(x) = -8x^2-30x-17 \;; \quad f\left(-\frac{11}{4}\right) = 5, \quad f\left(-\frac{3}{4}\right) = 1, \cancel{f\left(-\frac{15}{8}\right)} = ,$$

$$x_0 = -\frac{15}{8}.$$



$y = ax+b.$

~~Если~~ Чтобы выполнилось условие, нужно по крайней мере:

$$\begin{cases} y\left(-\frac{3}{4}\right) \le 1 \\ y\left(-\frac{11}{4}\right) \le 5 \\ y\left(-\frac{11}{4}\right) \ge 2{,}75 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} -\frac{3}{4}a + b \le 1 & (1) \\ -\frac{11}{4}a + b \le 5 \\ -\frac{11}{4}a + b \ge 2{,}75 & (3) \end{cases}$$

$$\boxed{g'(x) = -\frac{8}{(4x+3)^2}, \quad f'(x) = -16x-30.}$$

$(1)+(3)$: $1 - \frac{11}{4}a + b \ge 2{,}75 - \frac{3}{4}a + b$

$2a \le -1{,}75$

$\underline{a \le -\frac{7}{8}}$

(2): $-\frac{11}{4}a + b \le \frac{77}{8\cdot 4} + b \le 5$

$b \le 5 - \frac{77}{32}$

$b \le \frac{83}{32}$

№5

$f(2) = f(3) = 0, \quad f(5) = 1, \; f(7) = 1, \; f(11) = 2, \; f(13) = 3, \; f(17) = 4,$

$f(19) = 4, \quad f(23) = 5.$

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2+(3y-3)^2=21 \\ x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2 \end{cases}$$

$$x^2-5xy+x+4y^2+2y-2=0$$

$$x^2+x(1-5y)+4y^2+2y-2=0$$

$$D=1-10y+25y^2-16y^2-8y+8=$$

$$=9y^2-18y+9=$$

$$=(3y-3)^2$$

$$x=\frac{5y-1\pm(3y-3)}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{8y-4}{2}=4y-2 \\ x=\frac{2y+2}{2}=y+1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^2+2y+1+9y^2-4y-4-18y-12=0 \\ x=y+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=4y-2 \\ 16y^2-16y+4+9y^2-16y+8-18y-12=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 10y^2-20y-15=0 \ (1) \quad |:5 \\ x=y+1 \end{cases} \\ \begin{cases} 25y^2-50y=0 \ (2) \\ x=4y-2 \end{cases} \end{array}\right. \\ x\geq 2y \end{cases}$$

(1): $2y^2-4y-3=0$

$\frac{D}{4}=4+6=10$

$y=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}$

160 $\quad \frac{83}{32}$

(2): $\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=2 \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases} \text{ — не уд.} \\ \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$$

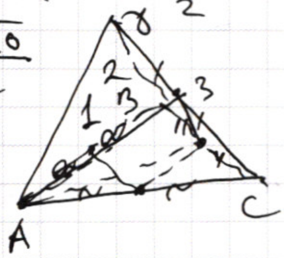
$10y^2-20y-15=0$

$25y^2-50y=0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{2+\sqrt{10}}{2}+1=\frac{4+\sqrt{10}}{2} \\ y=\frac{2+\sqrt{10}}{2} \end{cases} \text{ — не уд.} \\ \begin{cases} x=\frac{2-\sqrt{10}}{2}+1=\frac{4-\sqrt{10}}{2} \\ y=\frac{2-\sqrt{10}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \quad \frac{4+\sqrt{10}}{2}\geq 2+\sqrt{10}$

$4+\sqrt{10}\geq 4+2\sqrt{10}$



$\frac{4-\sqrt{10}}{2}\geq 2-\sqrt{10}$

$4-\sqrt{10}\geq 4-2\sqrt{10}$

Ответ: $(6;2)$; $\left(\frac{4-\sqrt{10}}{2};\frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$.

$\frac{4-\sqrt{10}}{2}-\frac{4-2\sqrt{10}}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$ $\quad 8-4\sqrt{10}-2\sqrt{10}+10=\frac{18-6\sqrt{10}}{4}=$

$=\frac{9-3\sqrt{10}}{2}$

$x^2-4x+9y^2-18y-12=0$

$\frac{D}{4}=4-9y^2+18y+12=\cancel{-9y^2+18y+16}$

черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$, $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\beta \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta \pm \sin 2\beta\sqrt{1-\frac{1}{5}} + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta - \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin\left(2\beta - \arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right) =$

$=$

$-\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta = \frac{4}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$2\beta = \pm\arccos\frac{2}{\sqrt5} + 2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$

$2\beta = \arccos\frac{2}{\sqrt5}$

$\frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha + \cos 2\alpha\cdot\left(\pm\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{2}{\sqrt5}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) \pm \sqrt{\left(1-\frac{4}{5}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)} + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin\left(2\alpha \pm \arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha - \frac{2}{5} \pm \frac{2}{5} = -\frac{4}{5}$

$2\alpha \pm \arcsin\frac{1}{\sqrt5} = -\arcsin$

1) $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$; $\cos 2\alpha = \pm\frac{3}{5}$

$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1$

$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

$\operatorname{tg}^2\alpha \in \left\{\frac{1}{4}; 4\right\}$

$\operatorname{tg}\alpha \in \left\{\pm\frac{1}{2}; \pm 2\right\}$

2) $\sin 2\alpha = 0$

$\alpha = \frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$

$\operatorname{tg}\alpha = 0$.

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha \pm \arcsin\frac{1}{\sqrt5} = -\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi n \\ 2\alpha \pm \arcsin\frac{1}{\sqrt5} = \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = -2\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi n \\ \alpha = \pi k \\ \alpha = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + \pi m \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi q \end{array}\right.$

$2\alpha = -2\arcsin\frac{1}{\sqrt5} +$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$t^{\log_{12}13} - t^{\log_{12}5} \le t$

$t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - t^{\log_{12}\frac{5}{12}} \le 1$

$f(19)=4$

$f(17)=4$

$f(13)=3$

$f(23)=5$ $f(11)=2$

$f(7)=1$

$f(2)=f(3)=0$

$f(5)=1$

$\log_{12}\frac{13}{12}\, t^{\log_{12}\frac{13}{144}} - \log_{12}\frac{5}{12}\, t^{\log\frac{5}{144}} > 0$

$\frac{13}{12}-\frac{5}{12}=\frac{8}{12}$ $\quad \frac{26}{12}-\frac{10}{12}=\frac{16}{12}$

$t=12^a$, $\frac{13}{12}a-\frac{5}{12}a\le 1$

$a=4:$ $\frac{13}{3}-\frac{5}{3}=\frac{8}{3}$

$a=3:$ $\frac{13}{4}-\frac{5}{4}=\frac{8}{4}=2$

$a=2:$ $\frac{13}{6}-\frac{5}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

$a=\frac{3}{2}:$ $\frac{13}{8}-\frac{5}{8}=$

$t\le 12^{\frac{3}{2}}$

$x^2+18x-12\sqrt{12}\le 0$

$\frac{D}{4}=81+12\sqrt{12}$

$x=-9\pm\sqrt{81+12\sqrt{12}}$

$\left[\begin{array}{l} x=72+12\sqrt{12} \\ x=-90-12\sqrt{12} \end{array}\right.$

$x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$,

$x\in[-90-12\sqrt{12};72+12\sqrt{12}]$

$-16x-30=\frac{30}{16}$? Ответ: $x\in[-90-12\sqrt{12};-18)\cup(0;72+12\sqrt{12}]$

$t^{\log_{12}5}+t\ge t^{\log_{12}13}$

$t\ge t^{\log_{12}13}-t^{\log_{12}5}$ $|:t>0$

$1\ge t^{\log_{12}13-\log_{12}12} - t^{\log_{12}5-\log_{12}12} = f(t)$

$f(t)=t^{\log_{12}\frac{13}{12}}-t^{\log_{12}\frac{5}{12}}$ $\uparrow$.

$f(t)=\left(\frac{13}{12}\right)^{\log_{12}t}-\left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12}t}$

$f(144)=\frac{169}{144}-\frac{25}{144}=1$.

$f(144)=12^{2\log_{12}\frac{13}{12}}-12^{2\log_{12}\frac{5}{12}}$

$=\frac{\cancel{225}}{8}$

$\frac{50+85}{16}$

$\frac{85}{6}$

86
$+56$

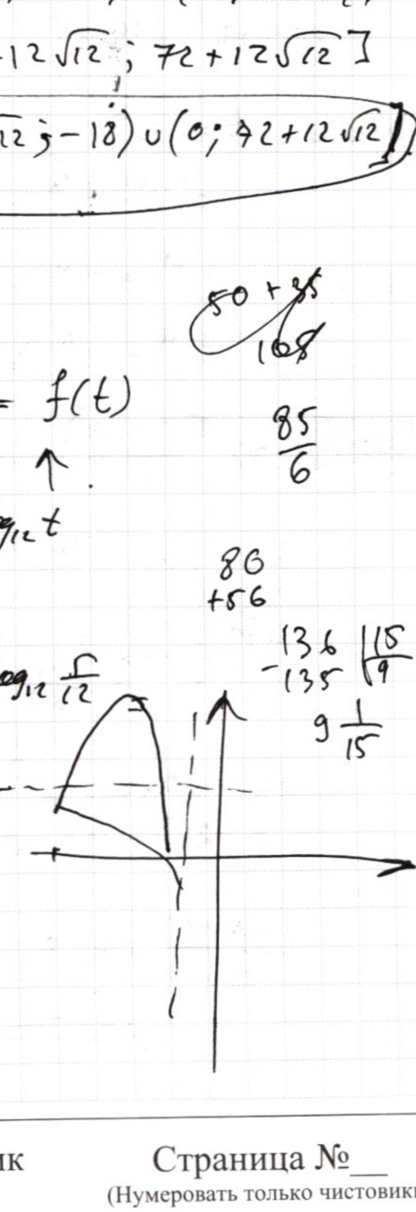
$-136 \mid 15$
$-135 \mid 9$
$9\frac{1}{15}$

	-8	-30	-17
$-\frac{15}{8}$	-8	-15	

8

$\frac{16}{25}\cdot\frac{5\cdot 17}{63}=$

$=\frac{8\cdot 17}{15}$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$5^{\frac{3}{2}} + 12\sqrt{12}$ ~~$5^{\sqrt{17}} + 12\sqrt{12}$~~ ~~$\le 13\sqrt{12}$~~ $13^{\frac{3}{2}}$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12} 13} - 18x$

$x(x+18)>0$

$x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$.

Пусть $t = x^2+18x$, $t>0 \Rightarrow |t| = t$.

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$ $\quad 5\sqrt{5} + 12\sqrt{12} \quad 13\sqrt{13}$ $\quad t + t^{\log_{12} 5} \geq t^{\log_{12} 13}$

$12^{\log_{12} 5 \cdot \log_{12} t} + t - t^{\log_{12} 13} \geq 0$ $\quad \geq 2\sqrt{t^{\log_{12} 60}} =$

$t^{\log_{12} 5} - t^{\log_{12} 13} + t \geq 0$

~~$f'(t) = \log_{12} 5 \, t^{\log_{12} \frac{5}{12}} - \log_{12} 13 \, t^{\log_{12} \frac{13}{12}} + 1$~~

$= t^{\log_{12} 13}$

$12^{\log_{12} t \cdot \log_{12} 5} + 12^{\log_{12} t} - 12^{\log_{12} 13 \cdot \log_{12} t} \geq 0$

	16	72	85	31
-1	16	56	29	2

$t^{\log_{12} 5} + t - t^{\log_{12} 13} \geq 0$.

Пусть $t = 12^a$.

$32x^3 + 144x^2 + 170x + 62 = 0$

$16x^3 + 72x^2 + 85x + 31 = 0$

$12^{a \log_{12} 5} + 12^a - 12^{a \log_{12} 13} \geq 0$

	16	72	85	31
$-\frac{1}{2}$	16	64	53	

$x^2 + 18x = 144$ $\quad 5^a + 12^a - 13^a \geq 0$

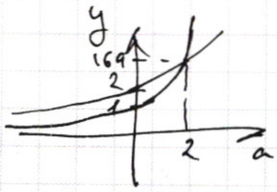
$169 \times 13 = 507 + 169 = 2197$

x $\quad 5^a + 12^a \geq 13^a$, $\quad 13^a = \left(\sqrt{12^2+5^2}\right)^a$

~~$\sqrt{\frac{25^a + 144^a}{2}} \geq \frac{5^a+12^a}{2}$~~ $a = 1!$

$144 \times 12 = 288 + 144 = 1728$ $\quad 1728 + 125 = 1853$

$5^a \ln 5 + 12^a \ln 12 \vee 13^a \ln 13$



$225 - 136 = 89$

$a=2: \; 5^2 + 144 = 169$

$a = 3: \; 125 +$

$8x^2 + 30x + 17 = 0$ $\quad \frac{t^{\log_{12} 5} + t}{2} \geq \sqrt{t^{\log_{12} 60}} = t^{\frac{1}{2}\log_{12} 60} =$

$\frac{D}{4} = 225 - 136 = 89$ $\quad = \log_{12}\sqrt{60} =$

$\geq 2t^{\log_{12}\sqrt{60}}$

$\frac{12x+11}{4x+3} + 8x^2 + 30x + 17 \leq 0$

$\frac{12x + 11 + 32x^3 + 120x^2 + 68x + 24x^2 + 90x + 51}{4x+3} \leq 0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Дано:

Ω, ω

кас. внутр. об. в т. A

AB - диам. Ω

CD = 8, BD = 17

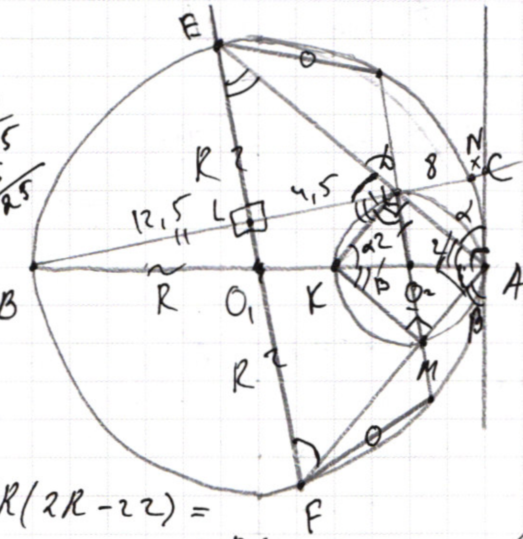
R_1 - ?

r - ?

$\angle AEF$ - ?

S_{AEF} - ?

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times 17 \\ \hline 875 \\ 125 \\ \hline 2125 \end{array}$$



1) $17^2 = 2R(2R - 2r) =$

$289 = 4R(R - r)$

$\boxed{4R^2 - 4Rr - 289 = 0}$

$ED \cdot DA = 8 \cdot 17 = 136$

2) $(2R - 2r)^2 = r^2 + 289$

$\begin{cases} 4R^2 - 8Rr + 4r^2 = r^2 + 289 \\ 4R^2 - 4Rr - 289 = 0 \end{cases}$

(1) $\begin{cases} 4R^2 - 8Rr + 3r^2 - 289 = 0 \\ 4R^2 - 4Rr - 289 = 0 \end{cases}$ (2)

(2) - (1): $4Rr - 3r^2 = 0$

$4R - 3r = 0$

$R = \frac{3}{4} r$

$2R(2R - 2r) =$

$4R(R - r) = 289$

$r = \frac{4R^2 - 289}{4R}$

$r = R - \frac{289}{4R}$

$DA = 2r\sin\alpha$

$DA =$

$r^2 = R^2 - \frac{289}{2} + \frac{289^2}{16R^2}$

$\frac{r}{R} = \frac{DA}{AE}$

$\frac{R}{r} = \frac{DA + ED}{DA}$

$DA^2 = 4r^2 - 4r^2\cos^2\alpha =$

EF || DM

$EO'A = \alpha + 90 - \beta$

$\frac{R}{r} = 1 + \frac{ED}{DA}$

$\pi - \alpha - \beta$

$90^\circ - \beta$

$90^\circ - \alpha$

2) $KD = 2r\cos\alpha$, $tg\,\alpha = \frac{2R}{9}$; $tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

3) $\triangle BKD$: т. cos'ов!

$289 = (2R - 2r)^2 + 4r^2\cos^2\alpha$

$289 = \left(\frac{289}{2R}\right)^2 + 4r^2\cos^2\alpha$

$289 = \frac{289^2}{4R^2} + 4r^2\cos^2\alpha$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{tg^2\alpha + 1} = \frac{1}{\frac{4R^2}{81} + 1} = \frac{81}{4R^2 + 81}$

$90^\circ -$

$\beta, 2\alpha, 90 - \alpha$

$\alpha + \beta + 90 = 180$

$90 - \beta + \alpha = 2\alpha$

$\alpha + \beta = 90^\circ$. ! =

$289 = (2R - 2r)^2 + 4r^2\cos^2\alpha + 2 \cdot (2R - 2r) \cdot 2r\cos^2\alpha$

$289 = 4R^2 - 8Rr + 4r^2 + 4r^2\cos^2\alpha + 8r(R - r)\cos^2\alpha$

$289 = 4R^2 - 8Rr + 4r^2 + \cos^2\alpha(4r^2 + 8Rr - 8r^2) = -\cos^2\alpha(4r^2 - 8Rr) \neq$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$289 = 4R^2 - 8Rr + 4r^2 + 4r^2\cos^2\alpha + 8(R-r)r\cos^2\alpha =$

$= 4(R-r)^2 + \cos^2\alpha(4r^2 + 8Rr - 8r^2) =$

$= 4(R-r)^2 - \cos^2\alpha(4r^2 - 8Rr) =$

$= 4((R-r)^2 - \cos^2\alpha(r^2 - 2Rr)) =$

$\cancel{= 4(R^2 - 2Rr + r^2) - \cos^2\alpha(r^2 - 2Rr)) =}$

$\cancel{= 4(R^2 + \sin^2\alpha(r^2 - 2Rr)) =}$

$\cancel{= 4R^2 + 4\sin^2\alpha\, r(r-2R)}$

$= 4\left(\frac{289^2}{16R^2} - \cos^2\alpha\right.$

	-8	-30	-17
$-\frac{11}{4}$	-8	-8	5

$\frac{12x+9+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3} \le ax + b \le -8x^2 - 30x - 17$ $f(x)$

$-16x - 30 = 0$ $\alpha + 90 - \beta$

$x = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8} = -\frac{7{,}5}{4}$

$f(-\frac{11}{4}) = -\frac{121}{16_2}\cdot 8 + 30^{15}\cdot\frac{11}{4_2} - 17 =$

$= \frac{165 - 121}{2} - 17 =$

$= 22 - 17 = 5$ $-\frac{11}{4}$

$+ \quad - \quad -\frac{15}{8}$ $\angle BO'E =$ $\beta + 90 - \alpha$

$f(-\frac{11}{4}) = 5$

	-8	-30	-17
$-\frac{3}{4}$	-8	-24	1

$f(-\frac{3}{4}) = 1.$

$180 - 180 + \alpha - 90 + \alpha$

$90 - \alpha$

$180 - \alpha$

$2\alpha - 90$

$3 + \frac{2}{4x+3}\downarrow$ $ax + b \le 1$

$16 \times 9 = 144$

$f(-\frac{11}{4}) = 3 + \frac{2}{-11+3} = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$

$16 \times 24 = 64 + 32 = 384$

$h(x) = \min(g(x) - f(x))$

$16x^2 + 24x + 9$

$\frac{3}{4}$

$h(x) = 3 + \frac{2}{4x+3} + 8x^2 + 30x + 17 =$

$h(x) = 16x + 30 + \frac{-8}{(4x+3)^2} = 0$

~~256 86~~

$256x^3 + 384x^2 + 144x + 480x^2 + 720x + 270 - 8 = 0$

$432 - 256 = 176$

$432 - 176 = 256$

$128x^3 + 432x^2 + 432x + 131 = 0$

$(4x+1)^2$

	128	432	432	131
-1	128	176	256	

$256x^3 + 864x^2 + 864x + 262$