МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

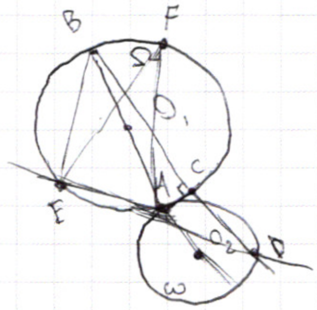
7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

МФТИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4



Сделаем с центром в точке A, чтоб $\omega \to \Omega$

Тогда $B \to E$, при этом, т.к. $O_2D \parallel BC$ и $EF \parallel BC$, то O_2D параллельно $EF \Rightarrow O_2D \to O_1E$, то есть EF — диаметр Ω.

Пусть радиус ω — r, радиус Ω — R.

Тогда $O_2D = r$, $AC = \frac{25}{17}\cdot r$ (из подобия $\triangle O_2BD$) и ($\triangle ABC$), т.к. $\angle ACB = \angle O_2DB = 90°$.

Значит:
$$\begin{cases} (2\cdot R - r)^2 - r^2 = 17^2 \\ \left(4\cdot R^2 - \left(\frac{25}{17}\right)^2 \cdot r^2\right) = 25^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4\cdot R^2 - 4\cdot r\cdot R = 17^2 \\ 4R^2 - \left(\frac{25}{17}\right)^2 \cdot r^2 = 25^2 \end{cases}$$

(5) $\forall a \quad f(a\cdot 1) = f(1) + f(a)$, $f(1) =$
Т.к. ~~сущ~~

$= 0$

$f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = f(1) = 0$, то есть $f\left(\frac{1}{x}\right) =$

$= -f(x)$

Пусть $\frac{y}{x} = \frac{b}{q}$ $(b;q) = 1$

$b = b_1^{\alpha_1} \cdot b_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot b_k^{\alpha_k}$ – разложение на простые

$q = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot q_n^{\beta_n}$ – разложение на простые

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{b}{q}\right) = \alpha_1 \cdot \left[\frac{b_1}{4}\right] + \ldots \alpha_k \cdot \left[\frac{b_k}{4}\right] - \beta_1\left[\frac{q_1}{4}\right] -$
$- \ldots - \beta_n\left[\frac{q_n}{4}\right]$.

При этом $f\left(\frac{x}{y}\right) = -f\left(\frac{y}{x}\right)$ => чтобы найти кол-во $(x;y)$, где $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ достаточно найти кол-во $(x;y)$, где $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$, вычесть его из кол-во всех пар (их 24^2) и это делить пополам.

~~Проверим~~ поделим числа от 2 до 25 на группы по значения f:

0: 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24 – 10 чисел

1: 5, 7, 10, 14, 15, 20, 21 – 7 чисел

2: 11, 22, 25 – 3 числа

3: 13 – 1 число

4: 17, 19 – 2 числа

5: 23 – 1 число

Значит пар $(x;y)$ таких что $f(x) = f(y)$, то есть $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$ всего $10^2 + 7^2 + 3^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Мах $(x;y)$: $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ всего $\frac{24^2 - 164}{2} = 206$

Ответ: 206.

(2).

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ x^2 + 9 \cdot y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$$

Заметим что $xy - x - 2y + 2 = (x-2)(y-1)$.

Обозначим $x-2$ за a, $y-1$ за b

$$\begin{cases} a + 2 - 2 \cdot (b+1) = \sqrt{a \cdot b} \\ a^2 + 9 \cdot b = 25 \end{cases}$$

Заметим, что $b=0$ не является корнем ни при каких a => можем обозначить $c = \frac{a}{b}$.

$$\begin{cases} cb - 2 \cdot b = \sqrt{c \cdot b^2} \\ (c^2 + 9)\, b^2 = 25 \end{cases}$$

Если $b > 0$, то $(c-2)b = \sqrt{c} \cdot b$ => $c - 2 = \sqrt{c}$.

$(\sqrt{c} + 1) \cdot (\sqrt{c} - 2) = 0$ => $\sqrt{c} = -1$, $\sqrt{c} = 2$.

Значит $c = 4$ если $b^2 = 1$ => $b = 1$,

Значит $a = 4$ => $x = 6$, $y = 2$.

Если же $b < 0$, то $c - 2 = -\sqrt{c}$ => $(\sqrt{c}+1)(\sqrt{c}+$

$+2) = 0 \Rightarrow \sqrt{c} = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow a^2 = 2,5 \Rightarrow b = \sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = -\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{\frac{5}{2}}, \quad y = 1 - \sqrt{\frac{5}{2}}.$

Ответ: $6; 2; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}; 2-\sqrt{\frac{5}{2}}$

(1) $\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

Пусть $\varphi = 2\alpha + 2\beta$

$\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(\varphi + 2\beta) + \sin(\varphi - 2\beta) = -\frac{4}{5}$

$2 \cdot \sin(\varphi)\cos(2\beta) = -\frac{4}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ (a) $\sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ (b)

(a): $\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$4 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$

$2 \cdot \cos\alpha(2\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$, $\cos\alpha \neq 0$, то есть $tg\,\alpha$ существует $\Rightarrow tg\,\alpha = -\frac{1}{2}$

(b): $\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \cos\alpha \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{-1}{\sqrt{5}}$

$2 \cdot \sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$4 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha - (1 - 2\sin^2\alpha) = -1$

$2 \cdot \sin\alpha \cdot (2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$\Rightarrow tg\,\alpha = 0$ или $tg\,\alpha = -2$

т.к. все три возможных значения достигаются то Ответ: $-2; -\frac{1}{2}; 0$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Черновик.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin 2\alpha \sin 2\beta + \cos 2\alpha \cos 2\beta$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha \sin 4\beta + \cos 2\alpha \cos 4\beta$

$2\cos\alpha \sin\alpha$

$tg\,\alpha - ?$

$2\sin\alpha\cos\alpha$

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$2\cos\alpha \sin\alpha = -\frac{4}{5} - \cancel{\sin(2\alpha+4\beta)}$

$2\cos\alpha\ \cos\beta$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{72}13} - 18x$

$\begin{cases} |x^2+18x|^{\log_{12}13} \geq 0 \\ 5^{\log_{12}x^2+18x} + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{72}13} - 18x \quad (1) \end{cases}$

(1) $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + 18x + x^2 \geq (x^2)^{\log_{72}13} + (18x)^{\log_{72}13}$

$18x + x^2 = t$

$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{72}13}$

$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$

$\begin{cases} x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0 \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y - 12 = 0 \end{cases}$

$5xy - 4y^2 - x - 2y + 2 = -9y^2 + 4x + 18y + 12$

$5y^2 + 5xy - 5x - 20y - 10 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{BCD} \cdot h$

$V_{ш} = \frac{4}{3} R^2 h$

$x - ?$

$\frac{12x+11}{4x+3} \leq -8x^2 - 30x - 17$

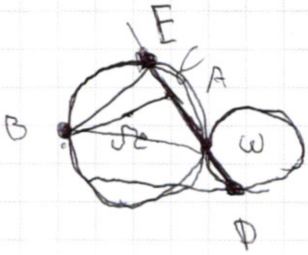
$12x + 11 \leq (-8x^2 - 30x - 17)(4x+3)$

$-8x^2 - 30x - 17 = 0$

$D = 900 - 544 =$

$= 366$

$$\begin{array}{r} \times\, 32 \\ 17 \\ \hline +\,224 \\ 32 \\ \hline 544 \end{array}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

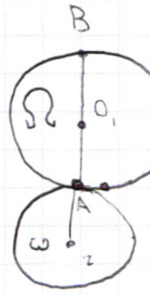
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



$4R^2 - 4\cdot\sqrt{\frac{(4R^2-625)319}{625}}$

$r = \sqrt{\frac{4R^2 - 25^2}{\left(\frac{25}{17}\right)^2}}$

$\begin{cases} 4R^2 - 4\cdot r\cdot R = 17^2 \\ 4R^2 - \left(\frac{25}{17}\right)^2 r^2 = 25^2 \end{cases}$

625

25 × 25 = 125 + 50 = 625

17 × 17 = 149 + 17 = 319

$4R^2 - \left(\frac{625}{319}\right)^2$

$4rR - \left(\frac{25}{17}\right.$

$R^2 - 4rR = 319$

$R(4R - 4r) = 17^2$

$4R^2 = 319 + 4rR$

$R = \frac{319}{4R - 4r}$

$319 - 4R^2$

$-4rR =$

$r = \frac{319 - 4R^2}{-4R}$

$\frac{319^2}{4R^2 - 4r^2}$

17 × 8 = 136

$319 + 4rR = 625 + \left(\frac{25}{17}\right)^2 \cdot r^2$

$1\frac{8}{17}$ $136r - 25r$

$2R - \frac{25}{17}\cdot r = 25$ $8R - 8r - \frac{25}{17}r = 25$ $\frac{136R - 111r}{17} = 25$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\frac{4R^2}{25^2} - \frac{r^2}{17^2} = 1$$

$4R = 306 - \frac{625r}{319}$

$-306r + \frac{625r^2}{319} = 319$

$625 - 319 - \frac{625}{319}$

$4R^2 - 4Rr + r^2$

$R(4R-4)$

$\left(\frac{25}{17}\right)^2 \cdot r^2 - r \cdot (306 - \frac{625}{319} r)$

17^2

$-r\,306 = -306$

$17^2 + 4rR = 25^2 + \frac{25^2}{17^2} \cdot r^2$

$r = 1$

$4R = \underline{25^2 + \frac{25^2}{17^2} \cdot r^2 - 17^2}$

$+16$

$17 \cdot 16 = 102$

$17^2 = 2\,7^2$

$319 - 625 = -306$

16

$272 + 16 = 288$

$4R^2 - 4R - 17^2 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА