МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a)+f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geqslant ax+b \geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \ (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \ (2) \end{cases}$

Т.к. $\sin x+\sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

То (2) перепишем в виде:

$\cancel{2}\cdot\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta\cancel{-2\alpha}}{2}\right) = -\frac{\cancel{2}}{17}$.

$\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{=-\frac{1}{\sqrt{17}}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{17}$. Из (1) подставим во полученное $-\frac{1}{\sqrt{17}}$:

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{17}$; $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin^2 2\beta+\cos^2 2\beta = 1$; $\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\sqrt{\frac{16}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$.

(1): $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\pm\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \ |\cdot\sqrt{17}$

$\sin 2\alpha\pm 4\cos 2\alpha = -1$. (3) Т.к. $tg\alpha$ определён, то $\cos\alpha\neq 0$.

(а) $\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$; (3): $\sin 2\alpha+4\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha+4\cdot(2\cos^2\alpha-1) = -1 \ |:\cos^2\alpha\neq 0$.

$2\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+8-\frac{4}{\cos^2\alpha} = -\frac{1}{\cos^2\alpha}$; $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $tg^2\alpha+1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$2tg\alpha+8 = 3\cdot(tg^2\alpha+1)$. Пусть $tg\alpha = t$: $3t^2+3 = 2t+8$

$3t^2-2t-5 = 0$ $(t+1)(3t-5) = 0$. $t=-1$ $t=\frac{5}{3}$.

$tg\alpha = -1$ $tg\alpha = \frac{5}{3}$.

(б) $\sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$; (3): $\sin 2\alpha-4\cos 2\alpha = -1$.

$2\sin\alpha\cos\alpha-4\cdot(2\cos^2\alpha-1) = -1 \ |:\cos^2\alpha\neq 0$

$2tg\alpha-8+4\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha} = -\frac{1}{\cos^2\alpha}$; $\frac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha+1$.

$2tg\alpha-8+5\cdot(tg^2\alpha+1) = 0$. $tg\alpha = t$: $2t-8+5t^2+5 = 0$.

$5t^2+2t-3=0$; $(t+1)(5t-3)=0$

$t=-1$; $t=\frac{3}{5}$; $\underline{tg\alpha=-1}$ $\underline{tg\alpha=\frac{3}{5}}$.

Ответ: $tg\alpha=-1$; $tg\alpha=\frac{3}{5}$; $tg\alpha=\frac{5}{3}$.

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \quad (1) \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \quad (2) \end{cases}$$

(2): $9x^2-18x+9-9+y^2-12y+36-36=45$

$(3x-3)^2+(y-6)^2=45+36+9$

$\underline{(3x-3)^2+(y-6)^2=90}$ (4)

(1): $y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}$

$$\begin{cases} y\geqslant 6x \\ (y-6x)^2=xy-6x-y+6. \end{cases} \qquad \begin{cases} y\geqslant 6x \quad (5) \\ y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6. \quad (3) \end{cases}$$

(3): $y^2+(1-13x)y+36x^2+6x-6=0.$

$D=(1-13x)^2-4\cdot(36x^2+6x-6)=1-26x+169x^2-144x^2-24x+24=$

$=25x^2-50x+25=25\cdot(x^2-2x+1)=25\cdot(x-1)^2.$

$y_{1,2}=\frac{13x-1\pm 5\cdot(x-1)}{2}$; $y_1=\frac{13x-1+5x-5}{2}=9x-3$

$y_2=\frac{13x-1-5x+5}{2}=4x+2.$

Подставим $y_{1,2}$ в (4): $(3x-3)^2+(9x-3-6)^2=90$ для y_1

$(3x-3)^2+(4x+2-6)^2=90$ для y_2.

y_1: $9\cdot(x-1)^2+81\cdot(x-1)^2=90$; $90(x-1)^2=90$; $(x-1)^2=1$ $\left[\begin{array}{l} x-1=1 \\ x-1=-1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \end{array}\right.$

$x=2$: $y_1=18-3=15.$

$x=0$: $y_1=-3$

Проверим (5): $15\geqslant 6\cdot 2$ верно; $-3\geqslant 0$ неверно.

Значит при $y=9x-3$ есть только 1 решение: $\begin{cases} x=2 \\ y=15. \end{cases}$

y_2: $9\cdot(x-1)^2+16\cdot(x-1)^2=90$; $25\cdot(x-1)^2=90$; $\cancel{100}\cdot(x-1)^2=36\cancel{0}$;

$(x-1)^2=\frac{36}{10}$; $x-1=\pm\frac{6}{\sqrt{10}}$ $x=1\pm\frac{6}{\sqrt{10}}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x = 1 + \frac{6}{\sqrt{10}}$ $\qquad$ $x = 1 - \frac{6}{\sqrt{10}}$

$y = 4x+2 = 6 + \frac{24}{\sqrt{10}}$ $\qquad$ $y = 4x+2 = 6 - \frac{24}{\sqrt{10}}$.

Проверим (5):

$6x = 6 + \frac{36}{\sqrt{10}}$ $\qquad$ $6x = 6 - \frac{36}{\sqrt{10}}$.

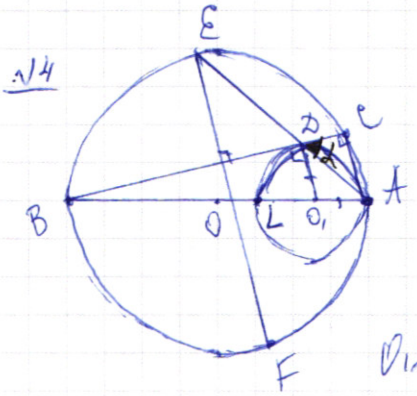
$\cancel{6} + \frac{24}{\sqrt{10}} \geqslant \cancel{6} + \frac{36}{\sqrt{10}}$ $\qquad$ $\cancel{6} - \frac{24}{\sqrt{10}} \geqslant \cancel{6} - \frac{36}{\sqrt{10}}$

$24 \geqslant 36$ неверно $\qquad$ $24 \leq 36$ верно.

Значит, если $y = 4x+2$, то есть 1 решение: $\begin{cases} x = 1 - \frac{6}{\sqrt{10}} \\ y = 6 - \frac{24}{\sqrt{10}} \end{cases}$.

Ответ: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 15 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 1 - \frac{6}{\sqrt{10}} \\ y = 6 - \frac{24}{\sqrt{10}} \end{cases}$

№4



O - центр Ω, O_1 - центр ω. R - радиус Ω, r - радиус ω.

$CD = 12$, $BD = 13$. $BC = 25$

1) Пусть $\angle ADC = \alpha$. $O_1D \perp BC$, т.к. BC - касательная. $\angle O_1DC = 90°$. $\angle O_1DA = 90 - \alpha$. $\angle BCA = 90°$, опир. на диаметр.

$O_1D = O_1A = r$. $\triangle O_1DA$ равнобедренный: $\angle O_1AD = \angle O_1DA$

$\angle O_1AD = 90 - \alpha$.

$\triangle DCA$: $\angle CAD = 90 - \alpha$.

$\angle CAB = \angle CAD + \angle DAO_1 = 180 - 2\alpha$. $\triangle CAB$; $\angle ABC = 90 - \angle CAB = 2\alpha - 90$.

$CA = DC \cdot tg\angle ADC = BC \cdot tg\angle ABC$; $12 tg\alpha = 25 \cdot tg(2\alpha - 90)$.

$12 \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 25 \cdot \frac{\sin(2\alpha-90)}{\cos(2\alpha-90)}$; $12 \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -25 \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = -25 \cdot \frac{2\cos^2\alpha - 1}{2\sin\alpha\cos\alpha}$

$2 \cdot 12 \cos\alpha \cdot \sin^2\alpha = -25\cos\alpha \cdot (2\cos^2\alpha - 1)$. $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos\alpha \neq 0, \sin\alpha \neq 0$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$2\cdot 12\cos\alpha\cdot(1-\cos^2\alpha) = -25\cos\alpha\cdot(2\cos^2\alpha-1) \mid : \cos\alpha \neq 0.$

$24-24\cos^2\alpha = -50\cos^2\alpha+25$; $26\cos^2\alpha = 1$; $\cos^2\alpha = \frac{1}{26}$.

$\sin^2\alpha = \frac{25}{26}$.

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$; $\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$\triangle ABC$: $AB\cdot\cos\angle ABC = BC$; $AB = 2R$; $2R\cdot\cos(2\alpha-90^\circ) = 25$.

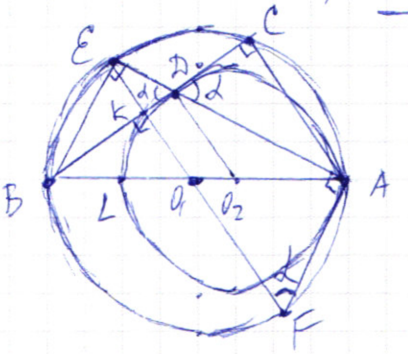
$R = \frac{25}{2\cdot\sin 2\alpha} = \frac{25}{2\cdot 2\cdot\cos\alpha\cdot\sin\alpha} = \frac{25}{4\cdot\frac{1}{\sqrt{26}}\cdot\frac{5}{\sqrt{26}}} = \frac{5\cdot 26}{4} = \frac{5\cdot 13}{2} = \frac{65}{2} = 32{,}5.$

BC-касательная к ω: $BD^2 = BL\cdot BA = (2R-2r)\cdot 2R = 4\cdot R\cdot(R-r)$.

$BL = AB - AL = 2R - 2r$.

$13^2 = \cancel{4}^{2}\cdot\frac{\cancel{65}^{5}}{2}\cdot\left(\frac{65}{2}-r\right)$; ~~169~~ $13 = 2\cdot 5\cdot\left(\frac{65}{2}-r\right)$

$13 = 5\cdot 65 - 10r$; $r = \frac{5\cdot 65-13}{10} = \frac{5\cdot 5\cdot 13-13}{10} = \frac{13\cdot 24}{10} = 31{,}2$.



2) $AD = \frac{DC}{\cos\alpha}$; $\angle BEA = 90^\circ$ - опирается на диаметр AB.

$\angle EDB = \alpha$. $ED = BD\cdot\cos\alpha$.

$AD = \frac{12}{\frac{1}{\sqrt{26}}} = 12\sqrt{26}$; $ED = 13\cdot\frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{13\sqrt{26}}{26} = \frac{\sqrt{26}}{2}$

$AE = AD + ED = \frac{24\sqrt{26}}{2} + \frac{\sqrt{26}}{2} = \frac{25\sqrt{26}}{2}$

$\triangle AEF$ вписан в Ω: по т. синусов: $\frac{AE}{\sin\angle AFE} = 2R$.

$\frac{AE}{2R} = \sin\angle AFE$; $\sin\angle AFE = \frac{25\sqrt{26}}{2\cdot 2\cdot\frac{65}{2}} = \frac{\cancel{25}^{5}\sqrt{26}}{2\cdot\cancel{65}_{13}} = \frac{5\sqrt{26}}{26} = \frac{5}{\sqrt{26}}$.

Заметим, что $\sin\angle AFE = \sin\alpha$. $\angle AFE$ и α - острые. $\Rightarrow \angle AFE = \alpha$.

3) $EF \perp BC$ по усл. $\triangle EDK$ ($K = BC\cap EF$): $\angle DEF = 90-\alpha$.

$\triangle EAF$: $\angle EAF = 180 - \angle AEF - \angle AFE = 90^\circ$. Значит, EF - диаметр ω.

$EF = 2R$; $\triangle AEF$: $AF = 2R\cdot\cos\angle EFA = 2R\cos\alpha = 2\cdot\frac{65}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{65}{\sqrt{26}}$

$S_{AEF} = \frac{1}{2}AF\cdot AE = \frac{1}{2}\cdot\frac{65}{\sqrt{26}}\cdot\frac{25\sqrt{26}}{2} = \frac{65\cdot 25}{4} = \frac{1625}{4}$

Ответ: $R_\Omega = 32{,}5$; $R_\omega = 31{,}2$; $\angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}$; $S_{AEF} = \frac{1625}{4}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28.$

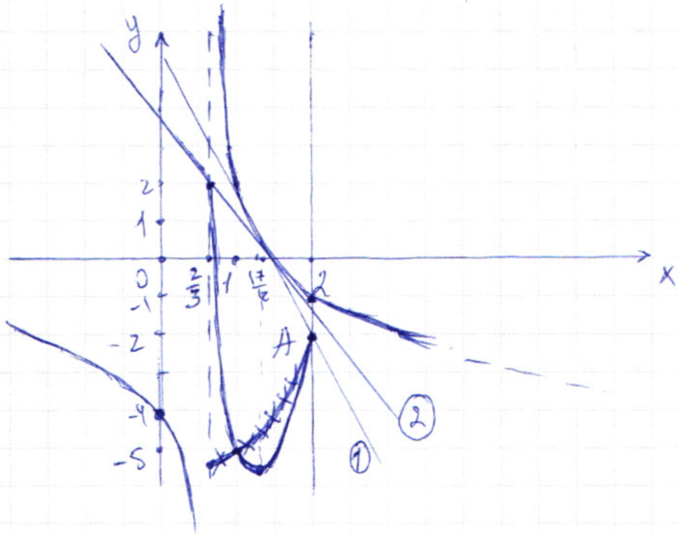
Пусть $f(x)=\frac{8-6x}{3x-2}=\frac{4}{3x-2}-2$; $f(0)=-4$; $f(1)=2$; $f(2)=-1$

$g(x)=18x^2-51x+28$; $g(0)=28$; $g(1)=-5$; $g(2)=-2$.

$f(x)\geq ax+b\geq g(x)$, $x\in(\frac{2}{3};2]$.

$g(\frac{2}{3})=\frac{18\cdot 4}{9}-\frac{51\cdot 2}{3}+28=8-34+28=$
$=2$

$g(x)\geq g(x_0)$, $x_0=\frac{51}{2\cdot 18}=\frac{17}{12}$



$y=ax+b$ – прямая.

1) $a=0$.
$y=b$. – прямая, $\parallel Ox$.
$g(x)\leq y\leq f(x)$ при всех $x\in[\frac{2}{3};2]$.
Такой прямой не существует.

2) $a>0$: $y=ax+b$.
$y\leq f(x) \Rightarrow y(2)\leq f(2)$.
$y\geq g(x) \Rightarrow y(\frac{2}{3}+\Delta x)\geq g(\frac{2}{3}+\Delta x)$, $\Delta x\to 0$.

Т.к. $a>0$, то y-возрастающая и монотонная при фикс. $(a;b)$. Но $y(\frac{2}{3}+\Delta x)>y(2)$ $\Delta x\to 0$.
Противоречие.

3) $a<0$: $y=ax+b$ – убывающая монотонная линейная функция.
$y(0)=b$. Чтобы было верно: $f(x)\geq y\geq g(x)$.
$y(-\frac{b}{a})=0$. $x\in[\frac{2}{3};2]$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

① $y=ax+b$ проходит через $A(2;-2)$ и касается $f(x)$ в т. $x_0\in[\frac{2}{3};2]$.

$-2=2a+b$; $b=-2-2a$.

$y=ax-2-2a=ax-2\cdot(a+1)$

$f(x)=\frac{4}{3x-2}-2$; $y_{кас}=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

$f'=\frac{-4\cdot(3x-2)'}{(3x-2)^2}=-\frac{12}{(3x-2)^2}$; $y_{кас}=-\frac{12}{(3x_0-2)^2}\cdot(x-x_0)+\frac{4}{3x_0-2}-2$

$y_{кас}(x_0)=y(x_0)$: $\frac{4}{3x_0-2}-2=ax_0-2a-2$

$4=(ax_0-2a)(3x_0-2)$.

№5

$f(ab)=f(a)+f(b)$. $a>0$, $b>0$.

1) $a=b$: $\underline{f(a^2)=2f(a)}$

2) $b=\frac{1}{a}$: $\underline{f(1)=f(a)+f(\frac{1}{a})}=const$

~~f(x/y)~~ $\Rightarrow f(\frac{x}{y})=f(x\cdot\frac{1}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)+f(1)-f(y)$.

$\boxed{f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)+f(1)}$

Простые числа из $[4;28]$: 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

$f(5)=[\frac{5}{4}]=1$; $f(7)=1$; $f(11)=2$; $f(13)=3$; $f(17)=4$.

$f(19)=4$; $f(23)=5$.

Дополнительно: $f(2)=0$; $f(3)=0$.

3) $f(2)=0$; $f(4)=f(2\cdot2)=f(2)+f(2)=0$.

$f(\frac{4}{2})=f(4)-f(2)+f(1)$

$0=0-0+f(1)\Rightarrow f(1)=0.\Rightarrow \underline{f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)}$.

~~f(4)...~~ 4) $f(4)=0$; $f(5)=1$; $f(6)=f(2)+f(3)=0$; $f(7)=1$; $f(8)=f(4)\cdot2=0$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$f(9)=f(3)+f(3)=0$; $f(10)=f(2)+f(5)=1$; $f(11)=2$; $f(12)=f(3)+f(4)=0$.
$f(13)=3$; $f(14)=f(2)+f(7)=1$; $f(15)=f(5)+f(3)=1$; $f(16)=f(8)+f(2)=0$.
$f(17)=4$; $f(18)=f(9)+f(2)=0$; $f(19)=4$; $f(20)=f(4)+f(5)=1$
$f(21)=f(3)+f(7)=1$; $f(22)=f(11)+f(2)=2$; $f(23)=5$;
$f(24)=f(12)+f(2)=0$; $f(25)=f(5)+f(5)=2$; $f(26)=f(2)+f(13)=3$;
$f(27)=f(9)+f(3)=0$; $f(28)=f(4)+f(7)=1$.

$f(x)>0$ при $x\in\{5;7;10;11;13;14;15;17;19;20;21;22;23;25;26;28\}$, т.е. при 16 из 25 значений.

Рассмотрим 2 случая:

1) $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$; $f(x)=0$. $f(y)>0$ Кол-во способов: ~~22·16-9~~ $16\cdot9$.

~~Выбрать у есть 16 способов (т.к. x, y люб)~~

~~16~~. ~~16~~ $16\cdot9$

2) $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$; $f(x)>0$.

Тогда $f(y)>f(x)>0$.

Значения $f(y)>0$:	1	2	3	4	5
Кол-во значений:	8	3	2	2	1

$f(x)=1$: есть $3+2+2+1$ вариантов $f(y)>f(x)$ (8)

$f(x)=2$: $2+2+1=5$ вариантов $f(y)>f(x)$ (5)

$f(x)=3$: $2+1=3$ варианта $f(y)>f(x)$ (3)

$f(x)=4$: 1 вариант $f(y)>f(x)$. (1).

Итого: ~~$16+8+5+3+1=33$~~, ~~28~~ $9\cdot16+8+5+3+1=$ ~~33~~
$=144+8+9=144+17=161$

Ответ: ~~26 пар~~. ~~33 пары~~. 161 пара.

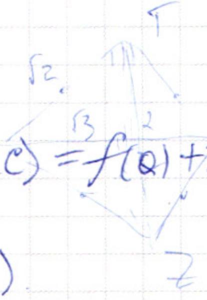
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab) = f(a) + f(b) = \left[\frac{a}{4}\right] + \left[\frac{b}{4}\right]$ $\quad f\left(\frac{x}{y}\right) < 0.$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{x}{4y}\right)$



$f(abc) = f(ab) + f(c) = f(a) + f(b) + f(c).$

$f(\underbrace{abc\ldots}_{n}) = \sum^{n} f(i).$ $\quad f(ab) = f(a) + f(b).$

1) $a = b = c = \ldots = 1$: $f(1) = n \cdot f(1).$ $\quad \boxed{f(a^2) = 2f(a)}$

$\cancel{f(1) = 2f(1)}.$

$f(\underbrace{a + a + \ldots + a}_{b}) = f(a) + f(b).$ $\quad b = \frac{1}{a}$: $\boxed{f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)}$

$\cancel{f(xy)}$ $f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) + f(1) - f(y).$ $\quad a = b = 1$: $f(1) = 2f(1).$

$\boxed{f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) + f(1)}$

$f(xy) = f(x) + f(y)$ $\quad \cancel{f\left(x \cdot \frac{x}{2}\right)}$ $\quad f(2) = 0.$ $\quad f(6) = 0.$

$f(3) = 0.$

$f\left(\frac{4}{2}\right) = f(4) - f(2) + f(1).$

$f(2) = 0.$

№2 $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$

$9x^2-18x+9+y^2-12y+36=45+9+36$

(2): $(3x-3)^2+(y-6)^2=90$.

$O(1;6)$ $R=3\sqrt{10}$

(1): $\begin{cases} xy-6x-y+6\geq 0 \\ y-6x\geq 0 \\ y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6 \end{cases}$ $\boxed{y\geq 6x}$

$\cancel{y^2+y+36x^2+6x=13xy+6}$

$\cancel{(y+\frac{1}{2})^2+(6x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}=13xy+6}$

$36x^2+(6-13y)x+y^2+y-6=0$.

$D=36-2\cdot6\cdot13y+13^2y-4\cdot36\cdot(y^2+y-6)=36-156y+169y-4\cdot36y^2-4\cdot36y+24\cdot36$

$=36+24\cdot36-4\cdot39y-4\cdot36y+169y-4\cdot36y^2=25\cdot36-131y-4\cdot36y^2$

$y^2+(1-13x)y+36x^2+6x-6=0$.

$D=1-26x+169x^2-4\cdot36x^2-4\cdot6x+4\cdot6=(169-144)x^2-50x+25$

$D=25x^2-50x+25=25\cdot(x^2-2x+1)=25\cdot(x-1)^2$ $\pm\sqrt{2}$ $\pm(\ )$

$y=\frac{13x-1\pm5\cdot|x-1|}{2}$

1) $x-1>0$: $y=\frac{13x-1\pm5\cdot(x-1)}{2}$; $y=\frac{13x+5x-1-5}{2}=9x-3\geq6x$

$x>1$ $y=\frac{13x-1-5x+5}{2}=\frac{8x+4}{2}=4x+2\geq6x$

$\cancel{(2): (3x-3)^2}$ $9x-3\geq6x$; $3x\geq3$; $x\geq1$ +.

$4x+2\geq6x$; $2\geq2x$; $x\leq1$ −.

$2\cdot15-6\cdot2-15+6=$
$=15-6\geq0$.

$(3x-3)^2+(9x-9)^2=90$.

$9(x-1)^2+81\cdot(x-1)^2=90$ $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 - \end{array}\right.$ $\boxed{x=2;\ y=15}$

$(x-1)^2=1$; $x-1=\pm1$

2) $x-1=0$; $x=1$. $y=\frac{13x-1}{2}=6$. $9+36-18-12\cdot6=45$

$36-9-12\cdot6=45$. неверно.

3) $x-1<0$; $x<1$ $y=\frac{13x-1\pm5\cdot(1-x)}{2}$; $\left[\begin{array}{l} y=\frac{13x-1+5-5x}{2}=\frac{8x+4}{2}=4x+2 \\ y=\frac{18x-6}{2}=9x-3 \end{array}\right.$

$(3x-3)^2+(4x-4)^2=90$; $9\cdot(x-1)^2+16\cdot(x-1)^2=90$; $25(x-1)^2=90$; $(x-1)^2=\frac{18}{5}$.

$x-1=\pm\sqrt{\frac{18}{5}}$; $x=1\pm\sqrt{\frac{18}{5}}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ {1} $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$ {2}

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x$

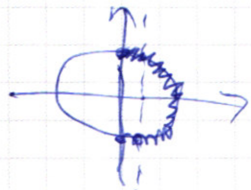
$2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right) = 2\cdot\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right) =$

$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\beta}{2} + 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\beta}{2} =$

$= \sin\alpha\cdot\left(\cos^2\frac{\beta}{2}+\sin^2\frac{\beta}{2}\right) + \sin\beta\cdot\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\alpha\,\cancel{\cos\beta} + \sin\beta\,\cancel{\cos\alpha}$.

{2}: $2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$; $\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{17}$; $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$.

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$.



{1}: $\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$;

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} \pm \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1$ $\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1$.

$2\sin\alpha\cos\alpha \pm 4\cdot(2\cos^2\alpha - 1) = -1 \;|: \cos^2\alpha \neq 0$.

$2tg\alpha \pm \left(8 - \frac{4}{\cos^2\alpha}\right) = -\frac{1}{\cos^2\alpha}$

1) $2tg\alpha + 8 - \frac{4}{\cos^2\alpha} = -\frac{1}{\cos^2\alpha}$; $2tg\alpha + 8 = \frac{3}{\cos^2\alpha}$; $2tg\alpha + 8 = 3\cdot(tg^2\alpha+1)$.

$tg\alpha = x$: $3x^2+3 = 2x+8$; $3x^2-2x-5=0$; $(x+1)(3x-5)=0$.

$\boxed{tg\alpha = -1}$; $\boxed{tg\alpha = \frac{5}{3}}$

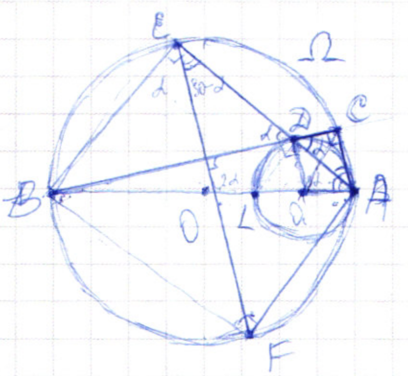
2) $2tg\alpha - 8 + \frac{4}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} = 0$; $2tg\alpha - 8 + 5\cdot(tg^2\alpha+1) = 0$. $(x+1)(5x-3)$

$2x - 8 + 5x^2 + 5 = 0$; $5x^2+2x-3=0$

$\boxed{tg\alpha = -1}$; $\boxed{tg\alpha = \frac{3}{5}}$

☑ черновик   ☐ чистовик   Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле)   (Нумеровать только чистовики)



$CD = 12,\ BD = 13.$ $\angle BCA$ - прямой.

$OA = R;\ QA = r$

$BD^2 = BL \cdot AB = (2R-2r)\cdot 2R.$

$\boxed{4R\cdot(R-r) = 13^2}$

$\angle DAO_1 = \frac{180-2\alpha}{2} = 90-\alpha = \angle CAD$

$\angle CAB = 180 - 2\alpha$

$\angle CBA = 90-(180-2\alpha) = 2\alpha - 90$

$\frac{AC}{DC} = tg\alpha;\ \frac{AC}{BC} = tg(2\alpha-90)$

$12 tg\alpha = 25 tg(2\alpha - 90)$

$tg(2\alpha-90) = \frac{\sin(2\alpha-90)}{\cos(2\alpha-90)} = \frac{\sin 2\alpha \cdot 0 + \cos 2\alpha\cdot(-1)}{\cos 2\alpha\cdot(0)+\sin 2\alpha\cdot(1)} = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

$12\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 25\cdot -\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}$; $24\sin^2\alpha\cos\alpha = -25\cdot(2\cos^2\alpha - 1)\cdot\cos\alpha$

$24\cos\alpha\cdot(1-\cos^2\alpha) = -25\cdot(2\cos^3\alpha - \cos\alpha).$ $50-24=26$

$24\cos\alpha - 24\cos^3\alpha = -50\cos^3\alpha + 25\cos\alpha.$

$\cos\alpha = 26\cos^3\alpha.$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{26};\ \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{26}}$

$\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}};\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$

$DC = AD\cdot\cos\alpha.$

$AD = \frac{DC}{\cos\alpha}.$

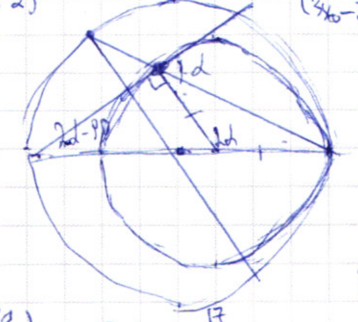
$AD\cdot ED = BD\cdot CD.$

$\frac{ED}{\cos\alpha} = BD;$

$\frac{12x_0 + 4\cdot(3x_0-2)}{(3x_0-2)^2} - 2 = \frac{24x_0-8}{(3x_0-2)^2} - 2$

$\begin{array}{r}24\\ \times 13\\ \hline 72\\ 24\\ \hline 312\end{array}$ $31{,}2.$ $\frac{65}{2} = 32{,}5$

$240+72=312$



~~$AD\cdot ED = BD\cdot CD$~~

$\frac{5}{\sqrt{26}}\cdot 2\cdot\frac{65}{2} = \frac{5\cdot 65\cdot\sqrt{26}}{26}$

$\begin{array}{r}601\\ -16\\ \hline 585\end{array}$

$5\cdot 5\cdot 5\cdot 13.$

$\begin{array}{r}125\\ \times 13\\ \hline 375\\ 125\\ \hline 1625\end{array}$ $\begin{array}{r}65\\ \times 25\\ \hline 325\\ 130\\ \hline 1625\end{array}$ $\begin{array}{r}51\\ \times 51\\ \hline 51\\ 255\\ \hline 2601\end{array}$ $\begin{array}{r}28\\ \times 18\\ \hline 224\\ 28\\ \hline 504\\ \times 4\\ \hline 2016\end{array}$

$g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{18\cdot 4}{9} - \frac{51\cdot 2}{3} + 28 = 2\cdot 4 - 34 + 28 = 36 - 34 = 2.$

№6

$\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{-(6x+4)}{3x-2} + \frac{4}{3x-2}.$

$2\cdot 9x^2 - 3\cdot 17x + 28 = 0.$

$D = 51^2 - 4\cdot 18\cdot 28 = 2601 - 2016 = 585.$

$f(x) = \frac{4}{3x-2} - 2$ $f(0) = -4;\ f(1) = 2;\ f(2) = -1$

$18+28-51 = 46-51 = -5.$

$g(x) = 18x^2 - 51x + 28.$ $g(0) = 28;\ g(1) = -5$

$18\cdot 4 - 51\cdot 2 + 28 = 72 + 28 - 102 = -2.$

$x_0 = \frac{51}{2\cdot 18} = \frac{17}{2\cdot 6} = \frac{17}{12}.$ $g(2) = -2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x = 1 \pm \sqrt{\frac{18}{5}} \\ y = 4x+2 = 4 \pm 4\cdot\sqrt{\frac{18}{5}} + 2 = 6 \pm \frac{24}{\sqrt{10}} \\ y \geq 6x; \quad 6x = 6 \pm 6\cdot\frac{6}{\sqrt{10}} = 6 \pm \frac{36}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

$\boxed{1)\ x = 1 - \frac{6}{\sqrt{10}};\ y = 6 - \frac{24}{\sqrt{10}}}$

$6x = 6 - \frac{36}{\sqrt{10}}$

$y \geq 6x;\ 6 - \frac{24}{\sqrt{10}} \geq 6 - \frac{36}{\sqrt{10}}$

$\frac{24}{\sqrt{10}} \leq \frac{36}{\sqrt{10}}$ (+)

2) $x = 1 + \frac{6}{\sqrt{10}};\ y = 6 + \frac{24}{\sqrt{10}}$

$6x = 6 + \frac{36}{\sqrt{10}};\ y \geq 6x$ неверно.

$\frac{1}{2} \leq y(2) \leq -1$

$g\left(\frac{2}{3}\right) \geq 2$

$\boxed{-2 \leq 2a+b \leq -1}$

N3

$|x^2-26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$26x - x^2 > 0$

$x^2 - 26x < 0$

$-x^2+26x = t;\ t^{\log_5 12} \geq -t + 13^{\log_5 t}$

$|t| = t$

$t^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t}$

$f(t) = t + t^{\log_5 12}$ + 0 − 26 +

$f' = 1 + \log_5 12 \cdot t^{\log_5 \frac{12}{5}} = 0.$

$t^{\log_5 \frac{12}{5}} = -\frac{1}{\log_5 12} = -\log_{12} 5 = \log_{12}\frac{1}{5}$

$\log_5(26x - x^2) = t.$

$26 - x^2 = 5^t$

$(5^t)^{\log_5 12} + 5^t \geq 13^t;\ \{12^t + 5^t \geq 13^t\}$

$~~12^2 + 5^2 = 13^2~~$

$144\cdot 12 + 125 \vee 169\cdot 13$

$169 \cdot 13 = 507 + 169 = 2197$; $144 \cdot 12 = 288 + 144 = 1728$

$5^t \geq 13^t - 12^t;\ 5^t \geq$

$~~a^{f(x)} - b^{f(x)}~~$

$12^t + 5^t \geq 2\sqrt{(12\cdot 5)^t} = 2\cdot\sqrt{60^t}$

$2\cdot\sqrt{60^t} \vee 13^t$

$4\cdot 60^t \vee 169^t$

при $t > 0$: $4\cdot 60^t < 169^t$

$\boxed{t \leq 0}$: $4\cdot 60^t \geq 169^t$

$t \leq 0$: $\log_5(26x - x^2) \leq 0.$

$(5-1)(26x - x^2 - 1) \leq 0.$

$26x - x^2 - 1 \leq 0$

$x^2 - 26x + 1 \geq 0$

$26\cdot 26 = 156 + 52\cdot 10 = 676$

$D = 26^2 - 4 = (2\cdot 13)^2 - 4 = 4\cdot(169-1) = 4\cdot 168 = 4\cdot 4\cdot 42$

$168 = 2^3\cdot 3\cdot 7$

$x = \frac{26 \pm 4\sqrt{42}}{2} = 13 \pm 2\sqrt{42}$; + 0 $13-2\sqrt{42}$ − $13+2\sqrt{42}$ 26 +

$13 - 2\sqrt{42} \geq 0.$

$169 \geq 4\cdot 42$ +

$2\sqrt{42} < 13$

$(0; 13 - 2\sqrt{42}]$