МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y = 45. \end{cases}$$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство

$$10x + \left|x^2-10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a)+f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5} \leqslant ax+b \leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

По условию: $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{=-\frac{1}{\sqrt5}}\cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$$

$$\sin^2 2\beta + \cos^2 2\beta = 1$$

$$\sin^2 2\beta = 1-\cos^2 2\beta \qquad \left(\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt5}\right)$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2\beta = \sqrt{1-\cos^2 2\beta}\\ \sin 2\beta = -\sqrt{1-\cos^2 2\beta}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}\\ \sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}\end{array}\right.$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt5} + \frac{2\cos 2\alpha}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt5} - \frac{2\cos 2\alpha}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1\\ \sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\\ 2\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\end{array}\right.$$

Задача 1.

$$\left[\begin{array}{l} 3\cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha = 0 \\ 3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = 0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} (3\cos\alpha - \sin\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha) = 0 \\ (3\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3\cos\alpha = \sin\alpha \\ \cos\alpha = -\sin\alpha \\ 3\sin\alpha = \cos\alpha \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} tg\alpha = 3 \\ tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Ответ: $tg\alpha = 3$, $tg\alpha = -1$ / $tg\alpha = \frac{1}{3}$

Задача 2

$$\left\{\begin{array}{l} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x^2 - 24xy + 144y^2 = 2y(x-6) - (x-6) \\ (x-6)^2 - 36 + 36(y-0,5)^2 - 9 = 45 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} (x-12y)^2 = (2y-1)(x-6) \\ (x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90 \end{array}\right.$$

Пусть $x - 6 = a$, $2y - 1 = b \Rightarrow$
$\Rightarrow 12y - 6 = 6b$
$\Rightarrow x - 12y = a - 6b$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (a-6b)^2 = ab \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} (a-6b)^2 = ab \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} a^2 - 12ab + 36b^2 = ab \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} a^2 - 13ab + 36b^2 = 0 \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} (a-9b)(a-4b) = 0 \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=9b \\ a=4b \end{array}\right. \\ a^2+9b^2=90 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=9b \\ a^2+9b^2=90 \end{cases} \\ \begin{cases} a=4b \\ a^2+9b^2=90 \end{cases} \end{array}\right.$$

При $a=9b$ $\quad 81b^2+9b^2=90$

$b^2=1,\ b=\pm1 \Rightarrow a=\pm9$

При $a=4b$ $\quad 16b^2+9b^2=90$

$25b^2=90$

$b^2=\frac{18}{5},\ b=\pm3\sqrt{\frac{2}{5}}$

$\Rightarrow$ Имеем 4 корня

При $b=1,\ a=9$

$2y-1=1 \quad x-6=9$

$y=1 \quad x=15$

При $b=-1,\ a=-9$

$2y-1=-1 \quad x-6=-9$

$y=0 \quad x=-3$

При $b=3\sqrt{\frac{2}{5}},\ a=12\sqrt{\frac{2}{5}}$

$2y-1=3\sqrt{\frac{2}{5}} \quad x-6=12\sqrt{\frac{2}{5}}$

$y=\frac{3\sqrt{\frac{2}{5}}+1}{2},\ x=6+12\sqrt{\frac{2}{5}}$

При $b=-3\sqrt{\frac{2}{5}},\ a=-12\sqrt{\frac{2}{5}}$

$2y-1=-3\sqrt{\frac{2}{5}} \quad x-6=-12\sqrt{\frac{2}{5}}$

$y=\frac{1-3\sqrt{\frac{2}{5}}}{2},\ x=6-12\sqrt{\frac{2}{5}}$

Заметим, что $x-12y\geq0$

$\Rightarrow$ Корни $y=0,\ x=-3$ не подходят $(x-12y=-3)$

и $y=\frac{3\sqrt{\frac{2}{5}}+1}{2},\ x=6+12\sqrt{\frac{2}{5}}$

$\left(x-12y=6+12\sqrt{\frac{2}{5}}-18\sqrt{\frac{2}{5}}-6<0\right)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

Корни $y=1,\ x=15$ подходят $(15-12\cdot1>0)$, и $\sqrt{(x-6)(2y-1)}=\sqrt{9\cdot1}>0$

и корни $y=\frac{1-3\sqrt{\frac{2}{5}}}{2}$, $x=6-12\sqrt{\frac{2}{5}}$! $\left(x-12y=6-12\sqrt{\frac{2}{5}}-6+18\sqrt{\frac{2}{5}}=6\sqrt{\frac{2}{5}}>0;\right.$

$$\sqrt{(x-6)(2y-1)}=$$

$$=\sqrt{-12\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot-3\sqrt{\frac{2}{5}}}=\sqrt{36\cdot\frac{2}{5}}>0$$

$\Rightarrow$ Ответ $x=15$ и $y=1$; $(15;1)$

$x=6-12\sqrt{\frac{2}{5}}$ и $y=\frac{1-3\sqrt{\frac{2}{5}}}{2}$; $\left(6-12\sqrt{\frac{2}{5}};\ \frac{1-3\sqrt{\frac{2}{5}}}{2}\right)$

Задача 3

$$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)},\quad 10x-x^2>0$$

т.к $10x-x^2>0$ $\qquad x(10-x)>0$

$$\Rightarrow 10x+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}\quad x\in(0;10)$$

$$a^{\log_3 b}=\left(b^{\log_b a}\right)^{\log_3 b}=b^{\log_3 b\cdot\log_b a}=b^{\log_3 a}$$

$$\Rightarrow 10x-x^2+4^{\log_3(10x-x^2)}\geq5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$$3^{\log_3(10x-x^2)}+4^{\log_3(10x-x^2)}\geq5^{\log_3(10x-x^2)}$$

Пусть $t=\log_3(10x-x^2)$, $\log_3 n<t<\log_3 10$
$n\to0$

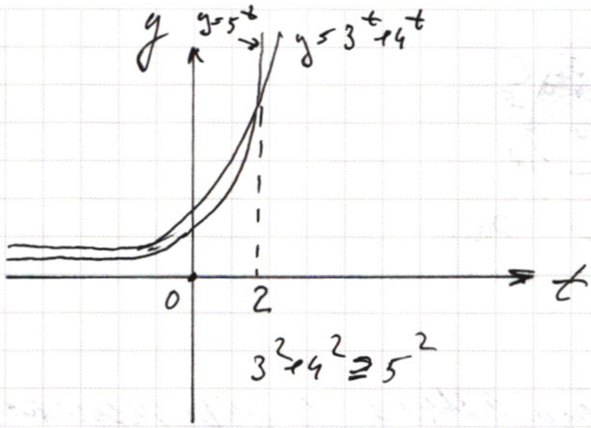
$-\infty<t<\underbrace{\log_3 10}_{>2}$

$$\Rightarrow 3^t+4^t\geq5^t$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$3^2+4^2=5^2$

$\Rightarrow -\infty < t \le 2$

$\cancel{-\infty \le -x^2+10x \le 2}$, $\cancel{10x-x^2>0}$

$\cancel{\Rightarrow 0 < -x^2+10x \le 2}$

$-\infty < \log_3(10x-x^2) \le 2$

$\begin{cases} \log_3(10x-x^2) > -\infty \\ \log_3(10x-x^2) \le 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 10x-x^2>0 \\ 10x-x^2 \le 9 \end{cases}$

$\begin{cases} x(10-x)>0 \\ x^2-10x+9 \ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\in(0;10) \\ (x-9)(x-1)\ge 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x\in(0;10) \\ x\in(-\infty;1]\cup[9;+\infty) \end{cases} \Rightarrow x\in(0;1]\cup$
$\cup[9;10)$

Ответ: $x\in(0;1]\cup[9;10)$

Задача 4

Дано

$C\text{Д} = 15/2$

$B\text{Д} = 17/2$

все, что дано, нарисовал на рис.

R_1 - ?

R_2 - ?

$\angle AFB$ - ?

$S_{AБF}$ - ?

Решение.

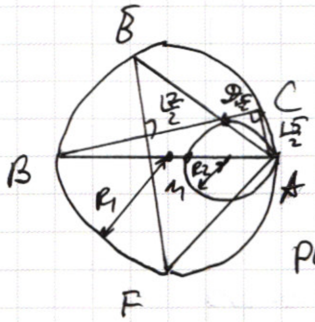


рис.

$\frac{15}{2} = C\text{Д} = CA$, касательные к окружности ω из точки C

△ BCA - прямоугол, т.к ∠ BCA, лежит на окружности и опирается на диаметр BA => ∠C = 90°

=> по т. Пифагора $BA^2 = CA^2 + BC^2$

$BA = \sqrt{CA^2 + (B\text{Д}+\text{Д}C)^2} =$

$= \sqrt{\frac{225}{4} + \frac{1024}{4}} = \frac{\sqrt{1249}}{2}$

$\Rightarrow R_1 = \frac{BA}{2} = \frac{\sqrt{1249}}{4}$

По свойству секущей и касательной

$(B\text{Д})^2 = BM \cdot BA$

$\frac{289}{4} = \frac{\sqrt{1249}}{2} \cdot BM$, $BM = \frac{289}{\sqrt{1249}}$

$\Rightarrow 2R_2 = BA - BM = \frac{\sqrt{1249}}{4} - \frac{289}{\sqrt{1249}} = \frac{93}{4\sqrt{1249}}$

$\Rightarrow R_2 = \frac{93}{8\sqrt{1249}}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$BD^2 = BM \cdot BA$

$\frac{289}{4} = BM \cdot \frac{\sqrt{1249}}{2}$

$BM = \frac{289}{2\sqrt{1249}}$

$\Rightarrow 2R_2 = BA - BM = \frac{\sqrt{1249}}{2} - \frac{289}{2\sqrt{1249}} = \frac{960}{2\sqrt{1249}} = \frac{480}{\sqrt{1249}}$

$\Rightarrow R_2 = \frac{240}{\sqrt{1249}}$

Ответ $R_1 = \frac{\sqrt{1249}}{4}$

$R_2 = \frac{240}{\sqrt{1249}}$

Задача 6

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$, $x \in [\frac{1}{4}; 1]$

При $x = 1$

$0 \le a+b \le 1$

При $x = \frac{1}{4}$

$3 \le \frac{1}{4}a+b \le 4$

$\Rightarrow$ 2. $0 \le a+b \le 1$) из 1. вычитаем

1. $3 \le \frac{1}{4}a+b \le 4$

$3 \le -\frac{3}{4}a \le 3$

$\Rightarrow a = -4$

из $3 \le \frac{1}{4}a+b \le 4$

$12 \le a+4b \le 16 \Rightarrow 12-0 \le a+4b-a-b \le 16-1$

$12 \le 3b \le 15$

$4 \le b \le 5$

□ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Функция $\frac{16x-16}{4x-5}$ ↓

$$\left(\frac{16x-16}{4x-5}\right)' = \frac{16(4x-5)-4(16x-16)}{(4x-5)^2} = -\frac{16}{(4x-5)^2} < 0$$

т.к $a = -4 \Rightarrow$ Функция $-4x+b$ ↓

Функция $-32x^2+36x-3$.

$x_{max} = \frac{-36}{-64} = \frac{9}{16} \Rightarrow$ от 0 до $\frac{9}{16}$ ↑ и от $\frac{9}{16}$ до 1, ↓

$$\Rightarrow -4\cdot\frac{9}{16}+b \le -32\cdot\left(\frac{9}{16}\right)^2+36\cdot\frac{9}{16}-3$$

$$-\frac{9}{4}+b \le \frac{-81}{8}+\frac{81}{4}-\frac{24}{8}$$

$$b \le \frac{81}{8}-\frac{24}{8}+\frac{18}{8}$$

$$b \le \frac{75}{8}$$

Ответ: $a=-4,\ b=4$

$a=-4,\ b=5$

2

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$, $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{2}{5}$, $tg\,\alpha$ - ?

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta=-\frac{2}{5}$

$2\cdot-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos2\beta=-\frac{2}{5}$

$\cos2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$, $\Rightarrow\sin2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$

для синр.

$\sin^2 2\beta=1-\cos^2 2\beta$

$\sin2\beta$ $-\frac{2}{\sqrt5}$.

$\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{\sin2\alpha}{\sqrt5}+\frac{2}{\sqrt5}\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin2\alpha+2\cos2\alpha=-1$

~~$\sin2\alpha+2\cos2\alpha=-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+\sin2\alpha$~~

$\sin2\alpha+2\cos2\alpha+1=0$

$2\cos2\alpha=-1-\sin2\alpha$

$2\cos2\alpha=-(1+\sin2\alpha)$

$\sin2\alpha+2\cos2\alpha=-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$

$\sin2\alpha-2\cos2\alpha=-1$.

$2\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha=-1$.

$3\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha=0$

$(3\sin\alpha-\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)=0$.

$\left[\begin{array}{l}3\sin\alpha=\cos\alpha\\ \sin\alpha=-\cos\alpha\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}tg\,\alpha=\frac{1}{3}\\ tg\,\alpha=-1\end{array}\right.$

$\sin2\alpha+2\cos2\alpha=-1$

$2\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha=-1$

$2\sin\alpha\cos\alpha+3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0$

$(3\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)=0$

$\left[\begin{array}{l}3\cos\alpha=\sin\alpha\\ \cos\alpha=-\sin\alpha\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}tg\,\alpha=3\\ tg\,\alpha=-1\end{array}\right.$

Ответ $tg\,\alpha=-1$

$tg\,\alpha=\frac{1}{3}$

$tg\,\alpha=3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№2.

$x-12y>0$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

~~45+900-84-~~

$225+\cancel{36}-180-\cancel{36}.=45.$

$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6 \mid x^2-24xy+144y^2=2y(x-6)-(x-6)$

$x^2+36y^2-12x-36y=45$

$x^2-24xy+144y^2=(2y-1)(x-6)$

$\cancel{(x-6)^2+36(y-0{,}5)^2}$

$(x-12y)^2=(2y-1)(x-6)$

$\overset{b}{2y-1},\ \overset{a}{x-6}.$

$12y-6$

$x^2+36y^2-12x-36y=45$

$(x-6)^2-36+36(y-0{,}5)^2-9=45$

$(x-6)^2+36(y-0{,}5)^2=90$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2y-1=-1 \\ x-6=-5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} y=0 \\ x=-3 \end{array} \\ \begin{cases} 2y-1=1 \\ x-6=9 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} y=1 \\ x=15 \end{array}\right. \ V \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} a^2+9b^2=90 \\ (a-6b)^2=a\cdot b \end{cases}$$

$a^2-12ab+36b^2=ab$

$a^2-13ab+36b^2=0.$

$\cancel{(a-9)}$ $(a-9b)(a-4b)=0$

$$\left[\begin{array}{l} a=9b \\ a=4b \end{array}\right.$$

$81b^2+9b^2=90$

$b^2=1$

$b=\pm1$

$a=\pm9$

$25b^2=90$

$5b^2=18$

$b=\pm\sqrt{\frac{18}{5}}$

$a=\pm4\sqrt{\frac{18}{5}}$

$x-6=1,\ x=7$

$2y-1=9,\ y=5$

$x-6=-1,\ x=5$

$2y-1=-9$ $y=-5$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$b = \pm 3\sqrt{\frac{2}{5}}$

$a = \pm 12\sqrt{\frac{2}{5}}$

$\cancel{144}\cdot 9 \quad \frac{144}{4} \quad 57{,}6$

$81 \quad 4 \quad 32{,}4$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2y-1 = 3\sqrt{\frac{2}{5}} \\ x-6 = 12\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases} \\ \begin{cases} 2y-1 = -3\sqrt{\frac{2}{5}} \\ x-6 = -12\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \frac{3\sqrt{0{,}4}+1}{2} \\ x = 12\sqrt{0{,}4}+6 \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{1-3\sqrt{0{,}4}}{2} \\ x = 6-12\sqrt{0{,}4} \end{cases} \end{array}\right.$$

$36 + 57{,}6 - \cancel{144\sqrt{0{,}4}} + 9(1-3\sqrt{0{,}4})^2 - 72 + \cancel{144\sqrt{0{,}4}} - 18 + \cancel{54\sqrt{0{,}4}} = 45.$

$\cancel{9} + 32{,}4 - \cancel{54\sqrt{0{,}4}}$

$45 + \cancel{20} - \cancel{72} - \cancel{18} = 45$

Ответ $(x;y)$ $\left(6-12\sqrt{0{,}4};\ \frac{1-3\sqrt{0{,}4}}{2}\right)$

$(18;1)$

N3.

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} = x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$, $10x - x^2 > 0$ $x \in (0;10)$

$10x + (10x - x^2)^{\log_3 4} = x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$ $x(10-x) > 0$

$10x - x^2 = 5^{\log_3(10x-x^2)} - 4^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x - x^2 = (10x - x^2)^{\log_3 5} - (10x-x^2)^{\log_3 4}$, $t = 10x - x^2 > 0$,

$t = t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4}$

$t = t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4}$ $\quad t>0. \quad 0<t<10.$

$t + t^{\log_3 4} = t^{\log_3 5}$

$10x - x^2 = 5^{\log_3(10x-x^2)} - 4^{\log_3(10x-x^2)}$

$3^{\log_3(10x-x^2)} = 5^{\log_3(10x-x^2)} - 4^{\log_3(10x-x^2)}$

$t^{\log_3 4}\left(1 + t^{\log_3 \frac{3}{4}}\right) = t^{\log_3 5}$

$3^t + 4^t \geq 5^t$

$0 < t \leq 2$

$t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0$

$0 < 10x - x^2 \leq 2$

$x^2 - 10x + 2 \geq 0$

$\cancel{t^{\log_3 5}\left(t^{\log_3 \frac{3}{5}} + t^{\log_3 \frac{4}{5}} - 1\right) \geq 0}$

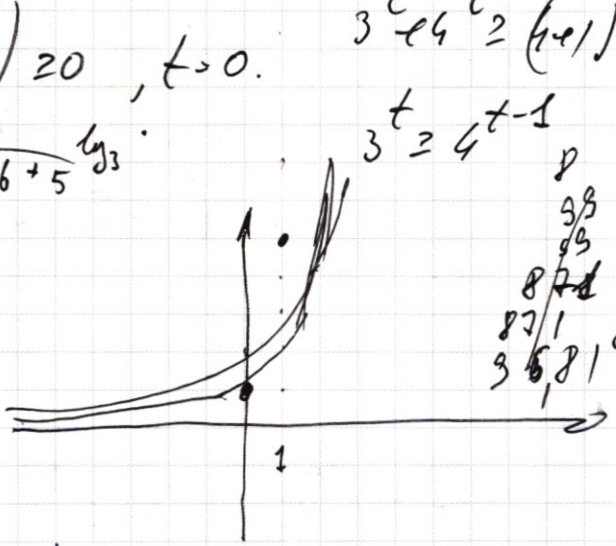
$t\left(1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}} - t^{\log_3 \frac{5}{3}}\right) \geq 0$, $t>0.$

$3^t + 4^t \geq (4+1)^t$

$\cancel{60 + 6^{\log_3 4} \geq 36 + 5^{\log_3}}$

$3^t \geq 4^{t-1}$

$3^t + 4^t \geq 5^t.$



$0 < t \leq 2.$

$(0;10)$

$0 < 10x - x^2 \leq 2$

$x^2 - 10x + 2 \geq 0$

92 | 4
8 | 23.
12

$D = 100 - 8 = 92 = (2\sqrt{23})^2.$

$(0; 5-\sqrt{23}] \cup [5+\sqrt{23}; 10)$

$x_{1,2} = \dfrac{10 \pm 2\sqrt{23}}{2} = 5 \pm \sqrt{23}.$

$(-\infty; 5-\sqrt{23}] \cup [5+\sqrt{23}; \infty).$

$60 + 24^{\log_3 4} \geq 36 + 5^{\log_3 24}.$

$24 + 4^{\log_3 24} \geq 5^{\log_3 24}.$

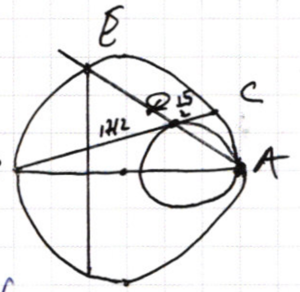
$24 + 24^{\log_3 4} \geq 24^{\log_3 5}.$

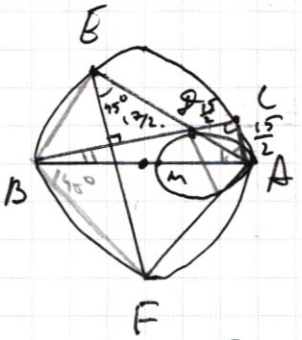
$24^{\log_3 4} \cdot 24^{\log_3 \frac{5}{4}}.$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





R_1 - ?, R_2 - ? $CD = \frac{15}{2}$

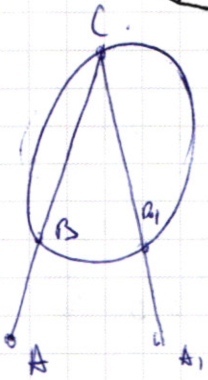
$\angle AFB$ - ?

S_{ABF} - ? $BD = \frac{17}{2}$

4
17
17
119
17
289

R_0. $CD = CA = 15/2$.

1) $\angle BCA = 90°$, т.к. лежит на ω_1.



22
256
1024
225
799

$BD^2 = BM \cdot BA$

$\Rightarrow BA = \sqrt{16^2 - \frac{225}{4}} = \sqrt{256 - \frac{225}{4}} = \frac{\sqrt{799}}{2}$.

$\frac{289}{4} = \frac{\sqrt{799}}{2} \cdot BM$.

$BM = \frac{289}{2\sqrt{799}} = \frac{17\sqrt{17}}{2\sqrt{47}}$.

799 | 17
68 | 47
119
119
0

$\Rightarrow R_{мал} = \frac{BA - BM}{2} = \frac{\sqrt{799}}{4} - \frac{17\sqrt{17}}{4\sqrt{47}}$

37
37
259
111
1249 1369
33
289
4
1156
1249

$MA = \underbrace{\frac{\sqrt{799}}{2}}_{BA} - \underbrace{\frac{289}{2\sqrt{799}}}_{BM} = \frac{510}{2\sqrt{799}}$

1249
1156
93

$\frac{-12}{-4}$

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3.$$

$-4x+6$

$-2+9-3$

$$\begin{cases} a+b\ge 0 \\ \frac{1}{4}a+b\ge 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b\ge 0 \\ \frac{1}{4}a+b\ge 3 \\ a+b\le 1 \\ \frac{1}{4}a+b\le 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0\le a+b\le 1 \\ 3\le \frac{1}{4}a+b\le 4. \end{cases}$$

$-3\le \frac{3}{4}a \le -3$

$$\left(\frac{16x-16}{4x-5}\right)' = \frac{16(4x-5)-4(16x-16)}{(4x-5)^2} = \frac{-16}{}$$

$-4x+5$

$0\le a+b\le 1$

$3\le \frac{1}{4}a+b\le 4$

$3\le -\frac{3}{4}a\le 3$

$a=-4$

$12\le a+4b\le 16$

$12\le 3b\le 15$

$4\le b\le 5$

$\frac{36}{64}=\frac{9}{16}.$

$-64x+36=0.$

$x=\frac{36}{64}=\frac{9}{16}.$

$-\frac{81}{8}+\frac{36\cdot 9}{16}-3.$

16

28

16

1024

225

$\frac{(249)}{2}$

225

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)