МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №2.

$9x^2+y^2-18x-12y=45$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$\exists\ x-1=u \qquad x=u+1$

$y-6=v \qquad y=v+6$

$xy-6x-y+6=uv\ ,\ y-6x=y-6-6(x-1)=$
$=v-6u$

$\begin{cases} v-6u=\sqrt{uv} \\ 9u^2+v^2=90 \end{cases}$ ★1

$v^2-12uv+36u^2=uv$

$v^2-13uv+36u^2=0$

$v_1=9u\ ,\ v_2=4u$

1°. $9u^2+81u^2=90$

$u^2=1 \Rightarrow u_{1,2}=\pm1\ ,\ v=\pm9$

2°. $9u^2+16u^2=90\ ,\ u=\pm\dfrac{\sqrt{90}}{5}\ ;\ v=\pm\dfrac{4\sqrt{90}}{5}$

$\begin{cases} u=1 \\ v=9 \end{cases}$ – удовлетв. системе ★1

$\begin{cases} u=-1 \\ v=-9 \end{cases}$ – не удовлетв. $v-6u\geq0$

$\begin{cases} u=\dfrac{\sqrt{90}}{5} \\ v=\dfrac{4\sqrt{90}}{5} \end{cases}$ – не удовлетв.

$\begin{cases} u=-\dfrac{\sqrt{90}}{5} \\ v=-\dfrac{4\sqrt{90}}{5} \end{cases}$ – удовлетв.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

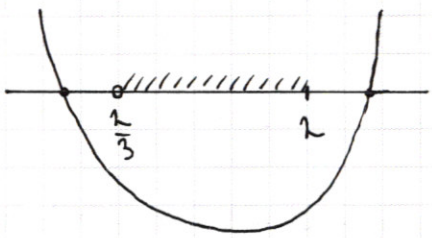
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 - \dfrac{\sqrt{90}}{5} \\ y = 6 - \dfrac{4\sqrt{90}}{5} \end{cases}$$

Ответ: $(2; 15)$, $\left(1 - \dfrac{\sqrt{90}}{5}; 6 - \dfrac{4\sqrt{90}}{5}\right)$

Задача №6.

$ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28$ верно для всех $x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$

$18x^2 - x(51 + a) + 28 - b \leq 0$



$f(x) = 18x^2 - x(51 + a) + 28 - b$

$$\begin{cases} f\left(\frac{2}{3}\right) < 0 \\ f(2) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 8 - 34 - \dfrac{2a}{3} + 28 - b < 0 \\ 72 - 102 - 2a + 28 - b \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2a}{3} + b > 2 \\ 2a + b \geq -2 \end{cases}$$

Теперь займёмся: $\dfrac{8 - 6x}{3x - 2} \geq ax + b$

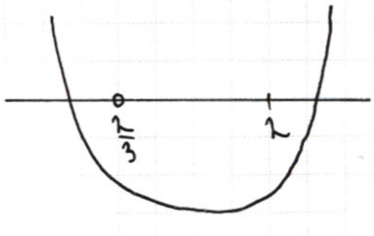
$$\frac{(ax + b)(3x - 2) - (8 - 6x)}{3x - 2} \leq 0$$

Т.к. $3x - 2 > 0$ на $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$, то

$3ax^2 + x(6 + 3b - 2a) - 2b - 8 \leq 0$

1°. $a > 0$, введ. обоз.: $g(x) = 3ax^2 + x(6 + 3b - 2a) - 2b - 8 \Rightarrow g(x) \leq 0$

$$\begin{cases} g\left(\frac{2}{3}\right) < 0 \\ g(2) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$



$$\begin{cases} \dfrac{4a}{3} + 4 + 2b - \dfrac{4a}{3} - 2b - 8 < 0 \\ 12a + 12 + 6b - 4a - 2b - 8 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 < 0 \text{ (верно)} \\ 8a + 4b + 4 \leq 0 \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

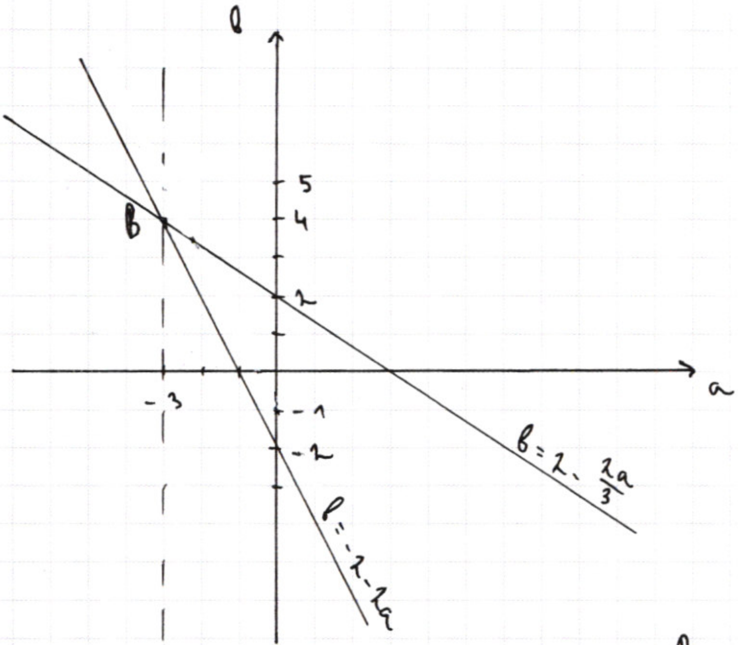
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2a + b + 1 \le 0$



$b > 2 - \frac{2a}{3}$

$b \geq -2 - 2a$

Наша обл-ть заштрихов.

Пр. (MP): $b = -1 - 2a$

~~т. С (~~ Абсцисса т. С < 0

В $\triangle ABC$: $a < 0 \Rightarrow \varnothing$

$a > 0$ не удовлетв.

2°. $a = 0$

$$\begin{cases} x(6 + 3b - 2a) - 2b - 8 \le 0 \\ 2(6 + 3b - 2a) - 2b - 8 \le 0 \end{cases}$$

$-4 + 2b + 2b + 8 \le 0$ $+$

$4 + 4b \le 0$

$b \le -1$

$\begin{cases} a = 0 \\ b \le -1 \end{cases}$ – не удовл, т. к лежит ниже заштрих. обл.

(при $a < 0$ $b > 2$)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача N 1

Из второго ур-я:

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

$\sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

1°. $\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

Из первого ур-я: $\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} + \frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

$\frac{2\,tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha} + \frac{4(1-tg^2\alpha)}{1+tg^2\alpha} = -1$

$3tg^2\alpha - 2tg\,\alpha - 5 = 0 \Rightarrow tg\,\alpha = -1$ или $tg\,\alpha = \frac{5}{3}$

2°. $\sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} - \frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

$\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1$

$\frac{2\,tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha} - \frac{4(1-tg^2\alpha)}{1+tg^2\alpha} = -1$

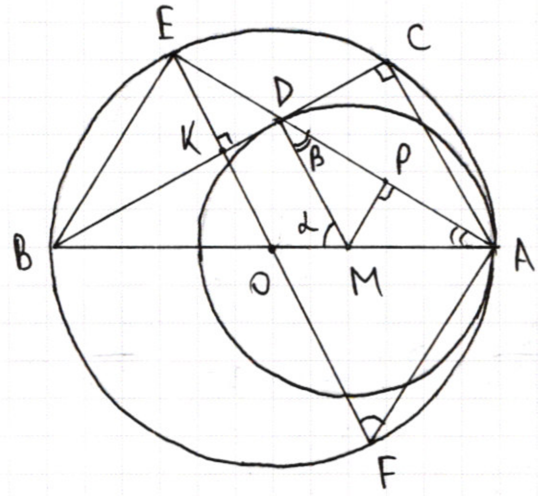
$5tg^2\alpha + 2tg\,\alpha - 3 = 0 \Rightarrow tg\,\alpha = -1$ или $tg\,\alpha = \frac{3}{5}$

Ответ: $tg\,\alpha = -1;\ \frac{3}{5};\ \frac{5}{3}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Задача № 4.



Найти: R, r, $\angle AFE$, S_{AEF} - ?

$CD = 12$, $BD = 13$

Решение:

O - ц. Ω с рад R

M - ц. ω с рад r

$OK \perp BC$

$\triangle BOK \sim \triangle BDM$: $\frac{R}{2R-r} = \frac{12{,}5}{13} \Rightarrow$

$r = \frac{24R}{25}$

В $\triangle BDM$: $(2R-r)^2 = r^2 + 13^2$

$13^2 = 4R^2 - 4Rr$

$13^2 = 4R^2 - \frac{96R^2}{25} \Rightarrow R = \frac{65}{2}$; $r = \frac{156}{5}$

В $\triangle BDM$: $\sin\alpha = \frac{BD}{BM} = \frac{13}{2R-r} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{13}{33{,}8} = \frac{5}{13} \Rightarrow$

$\cos\alpha = \frac{12}{13}$

$\triangle MDA$ - р/б $\Rightarrow \alpha = 2\beta \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{2}$

$DP = DM \cdot \cos\beta = \frac{156}{5} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{156}{\sqrt{26}} = 6\sqrt{26}$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$AD = 12\sqrt{26}$

$DE \cdot AD = BD \cdot DC \Rightarrow DE = \sqrt{\frac{13}{2}}$

$\angle FEA = \beta = \angle MDA = \frac{1}{2} \cdot \arcsin\frac{5}{13}$

$\angle EFA = \angle EBA$ (опир. на $\smile ECA$)

$\sin\angle EBA = \frac{AE}{AB} = \frac{ED + AD}{2R} =$

$= \frac{\sqrt{\frac{13}{2}} + 12\sqrt{26}}{65} = \frac{5\sqrt{26}}{26} = \frac{5}{\sqrt{26}} \Rightarrow \angle EBA = \angle EFA =$

$= \arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle EFA + \angle FEA = \frac{\pi}{2}$, $\angle EAF = \frac{\pi}{2}$

$\arcsin \frac{5}{\sqrt{26}} + \frac{1}{2} \cdot \arcsin \frac{5}{13} = \frac{\pi}{2}$

$\frac{1}{2} \arcsin \frac{5}{13} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{5}{\sqrt{26}}$

$\cos\left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{5}{13}\right) = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{5}{\sqrt{26}}\right) =$

$= \sin\left(\arcsin \frac{5}{\sqrt{26}}\right) = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$\sqrt{\frac{1 + \frac{12}{13}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$ – верно $\Rightarrow \triangle EFA$ – п/у $(\angle A = \frac{\pi}{2})$

$S_{AFE} = \frac{1}{2} AE \cdot FE \cdot \sin \angle FEA = \frac{1}{2} \cdot \frac{25\sqrt{26}}{2} \cdot 2R \cdot$

$\cdot \frac{1}{\sqrt{26}} = 812{,}5$

Ответ: $R = \frac{65}{2}$; $r = \frac{156}{5}$; $\angle AFE =$

$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{5}{13}$, $S_{AFE} = 812{,}5$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

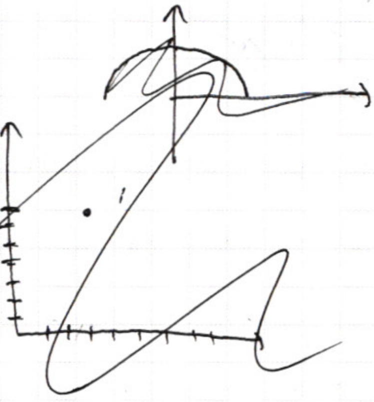
$y - 6x = \sqrt{6-y} \cdot \sqrt{1-x}$

$y = 6x + \sqrt{6-y} \cdot \sqrt{1-x}$

$9x^2 + y^2$

$a, b, \; ax + b$

$V = \frac{4\sqrt{90}}{5}$



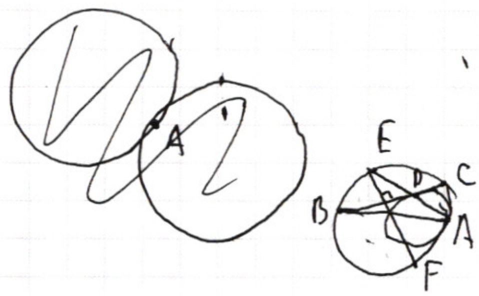
①

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

$2\sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$



1°. $\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} + \frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2}, \; \cos 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} \Rightarrow$ и

$\frac{2tg\alpha + 4 - 4tg^2\alpha + 1 + tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = 0$

$3tg^2\alpha - 2tg\alpha - 5 = 0$

$D = 4 + 60 = 64$

$tg\alpha_{1,2} = \frac{2 \pm 8}{6} = \frac{5}{3}; -1$

2°. $\sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} - \frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1 \Rightarrow \frac{2tg\alpha - 4 + 4tg^2\alpha + 1 + tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = 0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$y - 6x = y - 6 - 6x + 6 =$

$= y - 6 - 6(x-1) =$

$= v - 6u$

$2^0.$ $v = 4u$

$9u^2 + 16u^2 = 90$

$25u^2 = 90$

$u^2 = \frac{90}{25}$

$u = \pm\frac{\sqrt{90}}{5}$

$v = \pm\frac{4\sqrt{90}}{5}$

(2) $9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45$

$9(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 12y + 36) = \cancel{45}\ 90$

$9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$

$x - 1 = u$

$y - 6 = v$

$\Rightarrow uv = xy - 6x - y + 6$

$y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} =$

$\cancel{\sqrt{+x(y-6) + 6 - y} = \sqrt{(y-6)(1-x)} = \sqrt{uv}}$

(1) $5tg^2\alpha + 2tg\alpha - 3 = 0$

$D = 64$

$tg\alpha = \frac{3}{5}$

-1

$= \frac{3}{5}$

$-\frac{3}{5}$

$\cancel{v - 6u = \sqrt{uv}}$

$= \sqrt{y(x-1) + 6(1-x)} =$

$= \sqrt{(y-6)(x-1)} = \sqrt{uv}$

$$\begin{cases} v - 6u = \sqrt{uv} \\ 9u^2 + v^2 = 90 \end{cases}$$

$uv = v^2 - 12uv + 36u^2$

$v^2 - 13uv + 36u^2 = 0$

$D = 169 - 144 = 25$

$v_{1,2} = \frac{13u \pm 5}{2} = 9u, 4u$

$1^0.$ $9u^2 + 81u^2 = 90$

$v = 9u$

$90u^2 = 90$

$u^2 = 1$

$u = \pm 1$

$v = \pm 9$

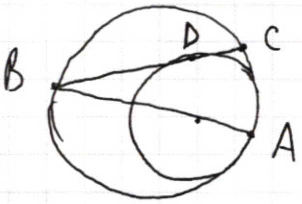
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$f(\tan\beta) = f(\alpha) + f(\beta)$

$f(p) = [p/4]$ for $\forall$ $p([x] < x)$

$x \in$



$\cancel{\sin 2\alpha}$ $\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha =$

$= \sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) + \cos 2\alpha \sin 4\beta =$

$= \sin 2\alpha(1 - 2\sin^2 2\beta + 1) =$

$= \sin 2\alpha(2 - 2\sin^2 2\beta) = 2\sin 2\alpha(1 - \sin^2 2\beta) =$

$= 2\sin 2\alpha \cos^2 2\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta =$

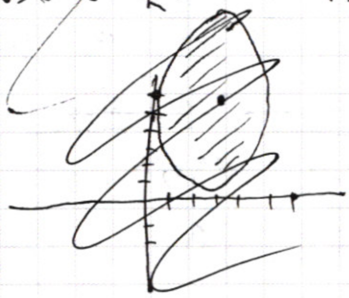
$= 2\sin 2\alpha \cos^2 2\beta + 2 \cancel{\cos^2 2} \cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta$

$\sin(2(\alpha+\beta)) = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) =$

$= 2\cos(\alpha+\beta)\cdot(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) =$

$= \cos(\alpha+\beta)(\sin(\alpha+\beta)) = \frac{1}{2}\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos 0 = \frac{1}{2}\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\frac{\pi}{2} =$

$=$ $\cancel{\operatorname{tg}\alpha}$ $\sin$



$\cancel{y^2 - 12x + 36x^2}$

$(y - 6)^2$

$\cancel{9x^2}$

$9x^2 - 18x + 9 + y^2 - 12y + 36 = 0$

$(3x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 0 \Rightarrow x =$

$y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6$

$y^2 + y + 36x^2 + 6x - 13xy - 6 = 0$

$(y^2 + y + \frac{1}{4}) + 36x^2 +$

$\cancel{9x^2} + 9x^2 - 18x + 9 + y^2 - 12y + 36 = 90$

$(3x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 90$ – окр-ть с ц. $(3;6)$ и

$\cancel{y^2}$ рад $= 3\sqrt{10}$

$y - 6x = \sqrt{-x(6-y) + (6-y)} = \sqrt{(6-y)(1-x)}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad tg\,\alpha$ - ?

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$ $\quad \sin 2\alpha\cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha =$

$\sin(2(\alpha+\beta)) = 2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)$ +

$\cancel{\sin(2(\alpha+2\beta))}$

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$tg(\alpha+\beta)$

$\cancel{\sin 2\alpha \cos 2\beta}$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha =$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 2\cancel{\sin}\cdot\cos 2\alpha) =$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 2\sin\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg\,\alpha}$

$\cancel{\sin 2\alpha(1+\cos}$ $\quad \cancel{tg\,\alpha} = \frac{\cancel{\sin\alpha}}{\cancel{\cos\alpha}} =$

$(x^2-26x)^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$(x^2-26x)^{\log_5 12}$

$1^0\ x^2-26x \geq 0$

$(x^2-26x)^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$\cancel{y=6x}$

II. I

$2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

$1^0\ \sin(\alpha+\beta) > 0$

$\cos(\alpha+\beta) < 0 \Rightarrow$

$\alpha+\beta$

$tg(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \Rightarrow$

$\sin(\alpha+\beta) > 0 \Rightarrow$ $tg(\alpha+\beta) > 0$, если

$\sin(2(\alpha+2\beta)) =$

$= 2\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha+2\beta)$

$\sin(\alpha+\beta) > 0$, $\cos(\alpha+\beta) < 0$

или

$\sin(\alpha+\beta) < 0$, $\cos(\alpha+\beta) > 0$.

Y X Z

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) $R_1, R_2, \angle AFE, S_{AFE}$

$CD = 12, BD = 13$

$\angle C = 90°$

~~MD~~

O - ц. окр. Ω с R

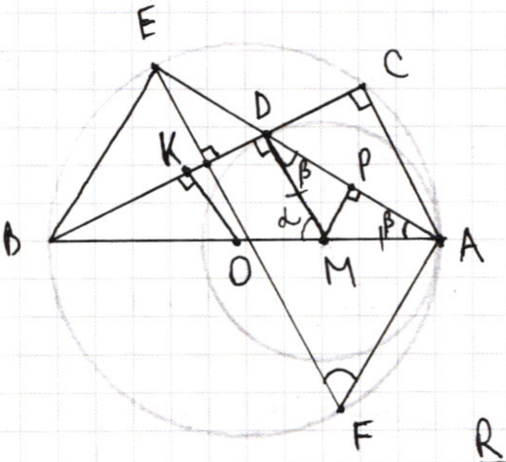
M - ц. окр. ω с r

$OK \perp BC$

$\angle BCA = 90°$,

т. K - сер BC

$\triangle BOK \sim \triangle BDM$



$$\frac{R}{2R-r} = \frac{12,5}{13} \Rightarrow r = \frac{24R}{25}$$

В $\triangle BDM$: $(2R-r)^2 = r^2 + 13^2$

$$13^2 = 4R^2 - 4Rr$$

$$13^2 = 4R^2 - \frac{96R^2}{25}$$

$$R = \frac{65}{2};\quad r = \frac{156}{5}$$

В $\triangle BDM$ $\sin\alpha = \frac{BD}{BM} = \frac{13}{2R-r} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{13}{33,8} = \frac{5}{13} \Rightarrow$

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{12}{13}$ $\quad \alpha = 2\beta \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{2}$ $\quad \cos\beta$

$\triangle MDA$ - р/б $\Rightarrow$

$$DP = DM \cdot \cos\beta = \frac{156}{5} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{156}{\sqrt{26}} = 6\sqrt{26}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{5}{\sqrt{26}}}$$

$AD = 12\sqrt{26}$ $\quad DE \cdot AD = BD \cdot DC \Rightarrow DE = \sqrt{\frac{13}{2}}$

$\angle FEA = \beta = \angle MDA = \frac{1}{2} \cdot \arcsin\frac{5}{13}$

$\angle EFA = \angle EBA$ (опир на $\cup ECA$) $\sin\angle EBA = \frac{AE}{AB} =$

$= \frac{ED + AD}{2R} = \frac{\sqrt{\frac{13}{2}} + 12\sqrt{26}}{65} = \frac{5\sqrt{26}}{26} = \frac{5}{\sqrt{26}} \Rightarrow$

$\angle EBA = \arcsin\frac{5}{\sqrt{26}} = \angle EFA$

$\angle EFA + \angle FEA = \frac{\pi}{2}$, $\angle EAF = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$

$\arcsin\frac{5}{\sqrt{26}} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13} = \frac{\pi}{2}$

$\frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}$

$\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13}\right) = \cancel{\cos}\,\sin\left(\arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}\right)$

$\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13}\right) = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$\sqrt{\frac{1 + \frac{12}{13}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$ – верно $\Rightarrow$

$\triangle EFA$ – п/у ($\cancel{\angle EAF}$ $\angle A = 90^\circ$)

$S_{AFE} = \frac{1}{2}\cdot AE \cdot FE \cdot \sin\angle FEA = \frac{1}{2}\cdot\frac{25\sqrt{26}}{2}\cdot 2R\cdot\frac{1}{\sqrt{26}} =$

$= 812{,}5$

FE – диам. Ω

Ответ: ~~FE – ди~~ $R = \frac{65}{2}$; $r = \frac{156}{5}$; $\angle AFE = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13}$, $S_{AEF} = 812{,}5$