МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

√1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$ $-1,\ 3,\ \frac{1}{3}$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

√3. **[5 баллов]** Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$ $(0;1]\cup[9;10)$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

√5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$. 206

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$\mathbb{Q}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \;\&\; x > 0\}$,

$\forall k, x \in \mathbb{Q}_+ \quad f(\frac{1}{k}) + f(kx) = f(\frac{1}{k}\cdot kx) = f(x) =$

$= f(x) + f(k) - f(k) = f(kx) - f(k)$

Т.о. $\forall k, x \in \mathbb{Q}_+ \quad f(\frac{1}{k}) + f(kx) = f(kx) - f(k) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(\frac{1}{k}) = -f(k)$

Тогда $\forall x, y \in \mathbb{Q}_+ \quad f(\frac{x}{y}) = f(x\cdot\frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$

Т.о. $\boxed{\forall x, y \in \mathbb{Q}_+ \quad f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)}$

Найдём значения функции при $2 \le x \le 25$, $x \in \mathbb{N}$:

$f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$, $f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$, $f(4) = f(2\cdot 2) = 0$,

$f(5) = [\frac{5}{4}] = 1$, $f(6) = f(2\cdot 3) = 0$, $f(7) = [\frac{7}{4}] = 1$,

$f(8) = f(4\cdot 2) = 0$, $f(9) = f(3\cdot 3) = 0$, $f(10) = f(2\cdot 5) = 1$,

$f(11) = [\frac{11}{4}] = 2$, $f(12) = f(4\cdot 3) = 0$, $f(13) = [\frac{13}{4}] = 3$,

$f(14) = f(2\cdot 7) = 1$, $f(15) = f(5\cdot 3) = 1$, $f(16) = f(2\cdot 8) = 0$,

$f(17) = [\frac{17}{4}] = 4$, $f(18) = f(2\cdot 9) = 0$, $f(19) = [\frac{19}{4}] = 4$,

$f(20) = f(4\cdot 5) = 1$, $f(21) = f(3\cdot 7) = 1$, $f(22) = f(2\cdot 11) = 2$,

$f(23) = [\frac{23}{4}] = 5$, $f(24) = f(4\cdot 6) = 0$, $f(25) = f(5\cdot 5) = 2$

Т.о. $0 = f(2) = f(3) = f(4) = f(6) = f(8) = f(9) = f(12) = f(16) =$

$= f(18) = f(24)$ — 10 вариантов

$1 = f(5) = f(7) = f(10) = f(14) = f(15) = f(20) = f(21)$ — 7 вар-тов

$2 = f(11) = f(22) = f(25)$ — 3 варианта

$3 = f(13)$ — 1 вариант

$4 = f(17) = f(19)$ — 2 варианта

$5 = f(23)$ — 1 вариант

Другие значения f на $[2; 25] \cap \mathbb{N}$ не принимает, т.к. перечислены все возможные аргументы из этого мн-ва

1) $f(y) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) \geq 0$ — не подходит

2) $f(y) = 1 \Rightarrow \left(f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(x) < 1\right)$, т.е. $f(x) = 0$

$f(y) = 1$ — 7 вар-тов, $f(x) = 0$ — 10 вариантов,

т.е. подходит $7 \cdot 10 = 70$ пар $(x; y)$

3) $f(y) = 2$, тогда $f(x) \in \{0; 1\}$ — 17 вар-тов

3 варианта

подходят $3 \cdot 17 = 51$ пара $(x; y)$

4) $f(y) = 3$, тогда $f(x) \in \{0; 1; 2\}$ — 20 вар.

1 вар.

$20 \cdot 1 = 20$ пар

5) $f(y) = 4$, тогда $f(x) \in \{0; 1; 2; 3\}$ — 21 вар

2 вар.

$21 \cdot 2 = 42$ пары

6) $f(y) = 5$, тогда $f(x) \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ — 23 вар.

1 вар.

$23 \cdot 1 = 23$ пары

Общее число пар равно $70 + 51 + 20 + 42 + 23 = 206$ пар

Ответ: 206.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$10x + |\underbrace{x^2-10x}_{<0}|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3 (\underbrace{10x-x^2}_{>0})} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10x - x^2 \geq \left(3^{\log_3 5}\right)^{\log_3(10x-x^2)} - (10x-x^2)^{\log_3 4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [y = 10x - x^2 > 0] \Leftrightarrow y \geq y^{\log_3 5} - y^{\log_3 4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y\left(y^{\log_3 5 - 1} - y^{\log_3 4 - 1}\right) \leq y \overset{y>0}{\Leftrightarrow} y^{\log_3 \frac{5}{3}} - y^{\log_3 \frac{4}{3}} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \left(3^{\log_3 y}\right)^{\log_3 \frac{5}{3}} - \left(3^{\log_3 y}\right)^{\log_3 \frac{4}{3}} \leq 1 \Leftrightarrow [t = \log_3 y]$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^t - \left(\frac{4}{3}\right)^t \leq 1 \overset{(\frac{4}{3})^t>0}{\Leftrightarrow} \left(\frac{5/3}{4/3}\right)^t - 1 \leq \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^t \leq \left(\frac{3}{4}\right)^t + 1 \qquad (*)$$

$\forall\ f(t) = \left(\frac{5}{4}\right)^t$, $f \uparrow \mathbb{R}$, т.к. $\frac{5}{4} > 1$
$g(t) = \left(\frac{3}{4}\right)^t + 1$, $g \uparrow \mathbb{R}$, т.к. $\left(\frac{3}{4}\right)^t < 1$ | , тогда
$f(2) = \frac{25}{16}$, $g(2) = \frac{9}{16} + 1 = \frac{25}{16} = f(2)$

$$(*) \Leftrightarrow f(t) \leq g(t) \Leftrightarrow t \leq 2 \Leftrightarrow \log_3 y \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y \in (0;\ 9] \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - x^2 > 0 \\ 10x - x^2 \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-10) < 0 \\ x^2 - 10x + 9 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0;\ 10) \\ (x-1)(x-9) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (0;\ 10) \\ x \in (-\infty;\ 1] \cup [9;\ +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0;\ 1] \cup [9;\ 10)$$

Ответ: $(0;\ 1] \cup [9;\ 10)$

N 1

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{\sqrt5}{5} = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = -\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k \\ 2\alpha+2\beta = \pi+\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k \end{array}\right.\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \alpha = -\beta-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+\pi k & (1) \\ \alpha = \frac{\pi}{2}-\beta+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+\pi k, \quad k\in\mathbb{Z} & (2) \end{array}\right.$

$(1):\ \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(-\beta-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+\pi k\right) = -\operatorname{tg}\left(\beta+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right) =$

$= -\dfrac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right)}{1-\operatorname{tg}\beta\,\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right)}$

$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right) = \dfrac{1-\cos\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right)}{\sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right)} = \dfrac{1-\frac{2}{\sqrt5}}{\frac{1}{\sqrt5}} = \sqrt5-2$

$\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1-\cos 2\beta}{\sin 2\beta} = \dfrac{1-\frac{1}{\sqrt5}}{\pm\frac{2}{\sqrt5}} = \pm\dfrac{\sqrt5-1}{2}$

(1a): $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt5-1}{2}$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{\frac{\sqrt5-1}{2}+\sqrt5-2}{1-\frac{\sqrt5-1}{2}(\sqrt5-2)} =$

$= -\dfrac{\sqrt5-1+2\sqrt5-4}{2-(\sqrt5-1)(\sqrt5-2)} = -\dfrac{3\sqrt5-5}{2-(7-3\sqrt5)} = \dfrac{3\sqrt5-5}{5-3\sqrt5} = -1$

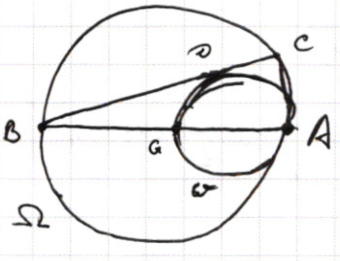
(1б): $\operatorname{tg}\beta = \frac{1-\sqrt5}{2}$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{\frac{1-\sqrt5}{2}+\sqrt5-2}{1-\frac{1-\sqrt5}{2}(\sqrt5-2)} = -\dfrac{1-\sqrt5+2\sqrt5-4}{2-(1-\sqrt5)(\sqrt5-2)} =$

$= -\dfrac{\sqrt5-3}{2-(-7+3\sqrt5)} = \dfrac{3-\sqrt5}{9-3\sqrt5} = \dfrac{1}{3}.$

Продолжение на стр. 6

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



$\exists$ O и R, P и r — центры и радиусы Ω и ω соотв.

ω кас. $\Omega \Rightarrow P \in [AB]$, т.к. $[AB]$ — диам.

AB — диаметр $\Rightarrow \angle BCA = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow |AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$. $|AC| = |CD|$, как отр. касательных для окр-ти ω

$$|BC| = |BD| + |CD| = \frac{15}{2} + \frac{17}{2} = \frac{32}{2} = 16$$

$|AB| = 2R$, тогда $4R^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2 + \left(\frac{32}{2}\right)^2 = \frac{225}{4} + \frac{1024}{4} =$

$$\Rightarrow \frac{1249}{4} \Rightarrow R^2 = \frac{1249}{16} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{1249}}{4}$$

$\exists$ $[BA] \cap \omega = G$

$$|BD|^2 = |BG| \cdot |BA| = (2R - 2r) \cdot 2R = \frac{289}{4} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{2r = \frac{289}{8R}} \quad 2R - 2r = \frac{289}{8R} \Leftrightarrow 2r = 2R - \frac{289}{8R} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r = R - \frac{289}{16R} = \frac{\sqrt{1249}}{4} - \frac{289}{4\sqrt{1249}}$$

Продолжение №1:

(2): $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta + \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + \pi k\right) =$

$= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \left(\beta - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right)\right) = \operatorname{ctg}\left(\beta - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right) =$

$= \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\beta - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right)} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\left(-\beta + \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right)}$

(2а): $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt5 - 1}{2}$, тогда $\operatorname{tg}(-\beta) = \frac{1-\sqrt5}{2}$ и $\operatorname{tg}\left(-\beta + \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right) =$

$= -\operatorname{tg}\alpha_{(б)}$, где $\operatorname{tg}\alpha_{1б} = \frac{1}{3}$ — из п. (1б)

Тогда $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{-\frac{1}{3}} = 3$

(2б): $\operatorname{tg}\beta = \frac{1-\sqrt5}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}(-\beta) = \frac{\sqrt5 - 1}{2}$ и $\operatorname{tg}\left(-\beta + \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right) =$

$= -\operatorname{tg}\alpha_{1а}$, где $\operatorname{tg}\alpha_{1а} = -1$ — из (1а)

Тогда $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{-(-1)} = -1$

Т.о. $\operatorname{tg}\alpha$ может принимать только значения -1, $\frac{1}{3}$ и 3, т.к. полученные решения являются следствием исходной системы. Но поскольку известно, что $\operatorname{tg}\alpha$ принимает не менее 3 значений и определён, то он принимает эти значения.

Ответ: -1, 3, $\frac{1}{3}$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$x-2b=\sqrt{\frac{xb}{3}-2b-x+6}$

$x-2b=\sqrt{\frac{xb}{3}-2b-x+6}$

$3a-2b=\sqrt{ab-2b-3a+6}$

$9a^2+b^2-36a-6b=45$

$$\begin{cases} 9a^2-12ab+4b^2=ab-2b-3a+6 \\ 9a^2+b^2-36a-6b=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9a^2+4b^2+3a+2b=13ab+6 \\ 9a^2+b^2-36a \end{cases}$$

$2x^2+180y^2-11x-24y-26xy=51$

$12(15y^2-2y)$

$2xy=12bx=36ab$

$6y=b$

$y=\frac{b}{6}$

$x=3a \Leftrightarrow a=\frac{x}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№5

$\forall x \in [\frac{1}{4}; 1]$ $\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

При $x=1$: $\frac{16-16}{4-5} \le a+b \le -32+36-3 \Leftrightarrow$ ~~$a\ge b a+b$~~ ≤ 1;

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b \geq 0 \\ a+b \le 1 \end{cases}$

При $x=\frac{1}{4}$: $\frac{4-16}{1-5} \le \frac{a}{4}+b \le -2+9-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{4}+b \geq \frac{-12}{-4} \\ \frac{a}{4}+b \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+4b \geq 12 \\ a+4b \le 16 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} a+4b \geq 12 \\ -a-b \geq -1 \end{array}\right| \Rightarrow 3b \geq 11$

$\left.\begin{array}{l} a+4b \geq 12 \\ -4a-4b \geq -4 \end{array}\right| \Rightarrow -3a \geq 8 \Rightarrow 3a \le -8$

$\left.\begin{array}{l} a+4b \le 16 \\ -a-b \le 0 \end{array}\right| \Rightarrow 3b \le 16$

$\left.\begin{array}{l} a+4b \le 16 \\ -4a-4b \le 0 \end{array}\right| \Rightarrow -3a \le 16 \Rightarrow 3a \geq -16$

Т.о. $a \in [-\frac{16}{3}; -\frac{8}{3}]$, $b \in [\frac{11}{3}; \frac{16}{3}]$

$f(x) = \frac{16x-16}{4x-5}$; $f'(x) = \frac{16(4x-5) - 4(16x-16)}{(4x-5)^2} =$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{4-16}{1-5} \le \frac{a}{4} + b \Leftrightarrow 3 \le \frac{a}{4} + b \Leftrightarrow a + 4b \geq 12$

$-2 + 9 - 3 \geq \frac{a}{4} + b \Leftrightarrow \frac{a}{4} + b \le 4 \Leftrightarrow a + 4b \le 16$

$a + b \geq 0$

$a + b \le 1 \qquad -a - b \geq -1$

$\left.\begin{matrix} a + 4b \geq 12 \\ -a - b \geq -1 \end{matrix}\right| \Rightarrow 3b \geq 11$

$\left.\begin{matrix} a + b \geq 0 \\ -a - 4b \geq -16 \end{matrix}\right| \Rightarrow -3b \geq -16 \Rightarrow 3b \le 16$

$\left.\begin{matrix} a + 4b \le 16 \\ -4a - 4b \le 0 \end{matrix}\right| \Rightarrow -3a \le 16 \Leftrightarrow 3a \geq -16$

$\left.\begin{matrix} a + 4b \geq 12 \\ -4a - 4b \geq -4 \end{matrix}\right| \Rightarrow -3a \geq 8 \Leftrightarrow 3a \le -8$

$b \in [\frac{11}{3}; \frac{16}{3}], \quad a \in [-\frac{16}{3}; -\frac{8}{3}]$

$16(4x-5) - 4(16x-16) = 64x - 80 - 64x + 64 = -16$

$\sqrt{5}\sin(2x \mp \varphi) = -7$

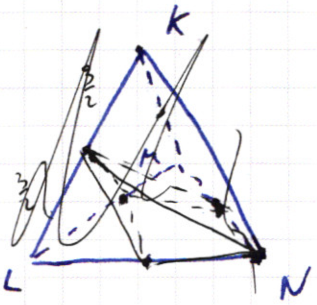
$\sin 2x \mp 2\cos 2x = -7$

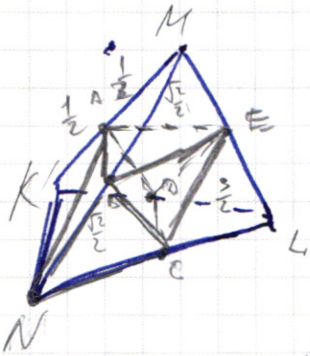
$\sin(2x + \varphi) = \sin 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \mp \cos 2x \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{7}{\sqrt{5}}$

$\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

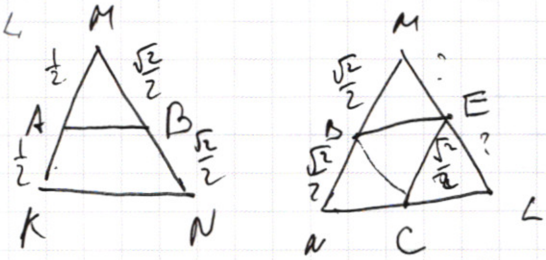
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

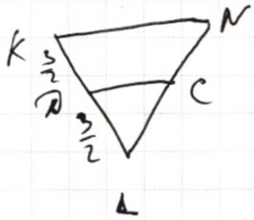


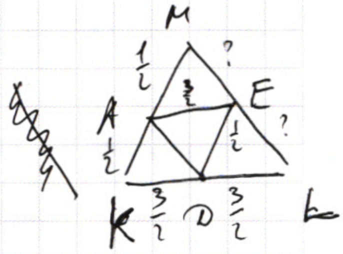


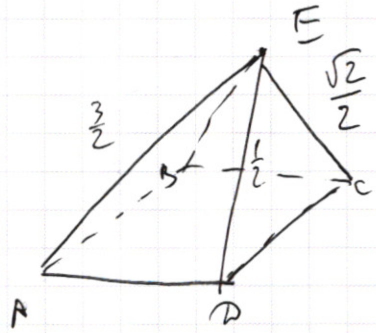
$AE = \frac{3}{2}$ $\quad CE = \frac{\sqrt{2}}{2}$

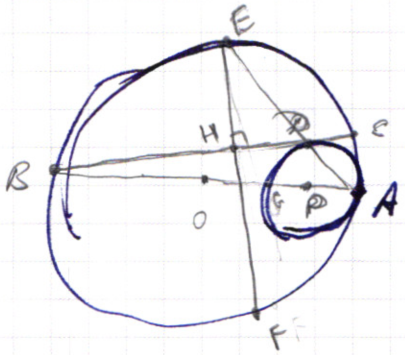
$DE = \frac{1}{2}$











$\frac{15}{2} + \frac{17}{2} = \frac{32}{2} = 16$

$BD^2 = BG \cdot BA$

$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = (2R-2r)2R \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4R(R-r) = \left(\frac{17}{2}\right)^2$

$|CD| = |CA| = \frac{15}{2}$

$\left(\frac{15}{2}\right)^2 + 16^2 = 4R^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R^2 = \left(\frac{16}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2 = \left(\frac{32}{4}\right)^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2 =$

$= \frac{1024 + 225}{16} = \frac{1249}{16} =$

$9 \cdot 121 = 900 + 180 + 9 = 1089$

$37^2 = 900 + 420 + 49 = 1369$

$144 + 36 = 180$

$144 - 36 = 108$

$$\begin{array}{r} 1024 \\ 225 \\ \hline 1249 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$$

$$x^2+144y^2=26xy-x-12y+6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+144y^2+x+12y=26xy+6 \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$\cancel{108y^2-13x-48y=}$$

$$108y^2+13x+48y=26xy-39$$

$$4(27y^2+12y)=13x(2y-1)-39 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12(9y^2+4y)=13x(2y-1)-39$$

$$12\left(\left(3y-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{9}\right)=13x(2y-1)-39$$

$$\cancel{12\,4(\ldots}\quad \cancel{12\,4y^2+}$$

$$\cancel{24(4y^2+y}$$

$$(2y-1)^2=4y^2-4y+1$$

$$12(4y^2+4y+1+5y^2-1)$$

$$12(2y-1)^2+12(5y^2-1)=13x(2y-1)-39$$

$$\cancel{(2y-1)(12(2y-1)}-13)+60y^2-12\neq$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{8-16}{2-5} \le \frac{a}{2}+b \Leftrightarrow \frac{8}{3} \le 2a+b \Leftrightarrow \frac{3}{2}a+3b \geq 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3a+6b \geq 16$$

$$-8+18-3 \geq \frac{a}{2}+b \Leftrightarrow \frac{a}{2}+b \le 7 \Leftrightarrow a+2b \le 14$$

$$3a+6b \le 42$$

$$b \in \left[\frac{11}{3}; \frac{16}{3}\right], \quad a \in \left[-\frac{16}{3}; -\frac{8}{3}\right]$$

$$\max(3a+6b) = -8+2\cdot 16 = 32-8 = 24$$

$$\min(3a+6b) = -16+22 = 6$$

$$\cancel{6b \le 32}$$

$$\cancel{3a \le -8}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} & (1)\\ \underline{x^2}+36y^2-\underline{12x}-36y=45 & (2)\end{cases}$$

$(2) \Leftrightarrow (x-6)^2-36+36(y^2-y)=45 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-6)^2 - 36 + 36(y-\frac{1}{2})^2-9=45 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-6)^2+36(y-\frac{1}{2})^2=90$

$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$

$x>12y$ $\quad 2xy-(x+12y)+6<2xy-24y+6=$

$=2y(x-12)+6$

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10x+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq x^2+3^{\log_3 5\cdot\log_3\ldots}=$

$=x^2+3^{\log_3(10x-x^2)\cdot\log_3 5}=x^2+(10x-x^2)^{\log_3 5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-10x+(10x-x^2)^{\log_3 5}-(10x-x^2)^{\log_3 4}\leq 0 \Leftrightarrow$

~~$\Leftrightarrow x^2-10x+(10x-x^2)$~~ $\quad y=10x-x^2$

$\Leftrightarrow -y+y^{\log_3 5}-y^{\log_3 4}\leq 0 \Leftrightarrow y\left(y^{\log_3 5-1}-y^{\log_3 4-1}\right)\leq 0 \Leftrightarrow$

$y>0$ $\Leftrightarrow y^{\log_3\frac{5}{3}}-y^{\log_3\frac{4}{3}}\leq 1$

$\sin\alpha+$

$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$y^{\log_3 5 - 1} - y^{\log_3 4 - 1} \le 1 \Leftrightarrow y^{\log_3 \frac{5}{3}} - y^{\log_3 \frac{4}{3}} \le 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{y}\left(3^{\log_3 y}\right)^{\log_3 \frac{5}{3}} - \cancel{y}\left(3^{\log_3 y}\right)^{\log_3 \frac{4}{3}} \le 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{\log_3 y} - \left(\frac{4}{3}\right)^{\log_3 y} \le 1 \Leftrightarrow [t = \log_3 y]$

$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{t} - \left(\frac{4}{3}\right)^{t} \le 1 \Leftrightarrow \left(\frac{5/3}{4/3}\right)^{t} \le \left(\frac{1}{4/3}\right)^{t} + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{t} \le \left(\frac{3}{4}\right)^{t} + 1$

$\frac{16x-16}{4x-5} \le -32x^2 + 36x - 3 \Leftrightarrow 16x - 16 \ge (-32x^2 + 36x - 3)(4x-5)$

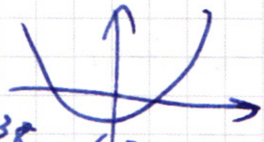
$\Leftrightarrow (32x^2 - 36x - 3)(4x-5) + 16x - 16 \ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 128x^3 - 160x^2 - 144x^2 + 180x + 12x + 15 + 16x - 16 \ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 128x^3 - 304x^2 + 208x - 1 \ge 0$

$ax + b \le -32x^2 + 36x - 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 32x^2 + (a-36)x + b + 3 \ge 0$



$x_0 = \frac{36-a}{2\cdot 32} = \frac{36-a}{64} \in \left[\frac{36+\frac{8}{3}}{64}; \frac{36+\frac{16}{3}}{64}\right] \subset \left[\frac{38}{64}; \frac{42}{64}\right] \subset \left[\frac{1}{4}; 1\right]$

$\cancel{x_0 \in \left[\frac{1}{4}, 1\right] \Leftrightarrow 36 - a \in [16; 64] \Leftrightarrow a - 36 \in [-64; -16]}$

$\cancel{\Leftrightarrow a \in}$

$y = ax^2 + bx + c, \quad x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y(x_0) = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2}{4a} + c$

$-\frac{(a-36)^2}{4\cdot 32} + b + 3 \ge 0 \Leftrightarrow (a-36)^2 \le 128b + 3\cdot 128$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $D(f)=\mathbb{Q}_+$

$\forall a, b \quad f(ab)=f(a)+f(b)$

$\forall p$ – простого $f(p)=[p/4]$. $\quad (x;y): \begin{cases} x,y\in[2;25]\cap\mathbb{N} \\ f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \end{cases}$

~~$f(2)=\frac{1}{2}$, $f(3)=\frac{3}{4}$, $f(5)=\frac{5}{4}$, $f(7)=\frac{7}{4}$, ...~~

~~$f(4)=f(2\cdot2)=f(2)+f(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$~~

~~$f(8)=f(4\cdot2)=f(4)+f(2)=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$~~

~~$f(\frac{1}{2})=$~~ $f(2)=[\frac{1}{2}]=0$, $f(3)=[\frac{3}{4}]=0$,

$f(5)=[\frac{5}{4}]=1$, $f(7)=[\frac{7}{4}]=1$, $f(11)=[\frac{11}{4}]=2$,

$f(13)=[\frac{13}{4}]=3$, $f(17)=[\frac{17}{4}]=4$, $f(19)=4$, $f(23)=5$

$f(4)=f(2\cdot2)=0+0=0$

$\forall k\in\mathbb{Q}_+ \quad f(2k)=f(2\cdot k)=f(k)$

$f(\frac{1}{2})=f(2\cdot\frac{1}{4})=f(\frac{1}{4})=f(\frac{1}{2^k})$

$\forall x\in\mathbb{Q}_+ \quad f(x)=f(2x)=f(3x)$

~~$f(\frac{5}{2})=$~~ $f(5)=f(\frac{5}{2}\cdot2)=f(\frac{5}{2})=1$, $f(\frac{5}{2})=f(5\cdot\frac{1}{2})=f(5)+f(\frac{1}{2})$
 $f(\frac{1}{2})=0$

1) $y=2 \Rightarrow f(\frac{x}{2})=f(x)+f(\frac{1}{2})=f(x)\geq0$

$\forall x \quad f(x)=f(x)+f(2)=f(2x)=f(2x\cdot\frac{1}{2})=f(2x)+f(\frac{1}{2})$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$f(\frac{1}{2}) + f(2x) = f(x) = f(x) + f(2) = f(2x) \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = 0$

$\forall k$ $f(\frac{1}{k}) + f(kx) = f(\frac{1}{k} \cdot kx) = f(x) = f(x) + f(k) - f(k) =$
$= f(kx) - f(k)$

Т.о. $f(\frac{1}{k}) + f(kx) = f(kx) - f(k) \Leftrightarrow f(\frac{1}{k}) = -f(k)$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Q}_+ \quad f(\tfrac{1}{k}) = -f(k)}$$

$f(\frac{x}{y}) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$

$f(2)=0$	$f(6)=0$	$f(10)=1$	$f(14)=$	$f(18)=0$	$f(22)=2$
$f(3)=0$	$f(7)=1$	$f(11)=2$	$f(15)=1$	$f(19)=4$	$f(23)=5$
$f(4)=0$	$f(8)=0$	$f(12)=0$	$f(16)=0$	$f(20)=1$	$f(24)=0$
$f(5)=1$	$f(9)=0$	$f(13)=3$	$f(17)=4$	$f(21)=1$	$f(25)=2$

1) $y=0 \Rightarrow f(\frac{x}{y}) \neq 0$

2) $y=1 \Rightarrow x \neq 0 \rightarrow 10$

$\searrow 7$ 70

3) $y=2 \Rightarrow x=0 \vee \ldots \rightarrow 17$

$\searrow 3$ $3 \cdot 17 = 51$

$70 + 51 + 20 + 42 + 23 = 90 + 93 + 23 = 183 + 23 = 206$

☑ черновик ☐ чистовик   Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле)   (Нумеровать только чистовики)