МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

6. $\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$

Рассмотрим $f(x)=18x^2-51x+28$; $x_в = \frac{51}{36} = \frac{17}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow ax+b$ должна быть больше $f(\frac{2}{3})$ и $f(2)$, что можно свести к условию, в котором прямая $ax+b$ проходит выше прямой соединяющей $f(\frac{2}{3})$ и $f(2)$ или совпадает с ней в одной точке или на всём рассматриваемом отрезке.

Пусть прямая соединяющая $f(\frac{2}{3})$ и $f(2)$ $kx+m$.

Тогда $f(\frac{2}{3})=2$ и $f(2)=-2 \Rightarrow k=-3$ $m=4. \Rightarrow$

$\Rightarrow ax+b \geq -3x+4$ при $x \in (\frac{2}{3};2)$.

$g(x)=\frac{8-6x}{3x-2}$, $g(x)' = \frac{-12}{(3x-2)^2} < 0$ ~~на~~ при $x \in (\frac{2}{3};2]$

и $g(x) \to \infty$ при $x \to \frac{2}{3}+$.

~~Таким образом~~

Найдём узкие места между $f(x)$ и $g(x)$

$\cancel{(f(x)-g(x))'=0 \Rightarrow x_1 = }$

$(g(x)-(-3x+4))'=0 \Rightarrow x_1 = \frac{4}{3}$

$g(\frac{4}{3})=0$; $-3x+4=0 \Rightarrow$ в точке $(\frac{4}{3};0)$ они совпадают $\Rightarrow$ все прямые $ax+b$ проходят ~~$-3x+4$~~ через эту точку, но также $ax+b \geq -3x+4 \Rightarrow$

$ax+b=-3x+4$ (в противном случае на промежутке $(\frac{2}{3};2]$ найдётся x для которого не соблюдается условие). $\Rightarrow a=-3$ $b=4$

Ответ: $a=-3$; $b=4$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $|x^2-26x|^{\log_5 12} \geq x^2-26x+13^{\log_5(26x-x^2)}$

пусть $a=26x-x^2$, $a>0$; $26x-x^2>0 \Rightarrow x\in(0;26)$.

Тогда:

$a^{\log_5 12} \geq -a+13^{\log_5 a}$

$a^{\log_5 12}>0$. Рассмотрим случай когда $0 \geq -a+13^{\log_5 a}$.

$a \geq 13^{\log_5 a} \Rightarrow \log_5 a \geq \log_5 13 \log_5 a \Rightarrow \log_5 a(1-\log_5 13)\geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_5 a \leq 0 \Rightarrow a\in(0;1]$

~~Рассмотрим случай~~ $\cancel{0\leq -a+13^{\log_5 a}}$

Вернёмся к $a^{\log_5 12} \geq -a+13^{\log_5 a}$ (при $0\leq -a+13^{\log_5 a}$).

$\log_5 a \log_5 12 \geq \dfrac{\log_5 13 \log_5 a}{\log_5 a}$ (Заметим что в ~~случае~~

а случае $\log_5 a=0$ соблюдается первый рассмотренный случай) (в данном случае $\log_5 a\neq 0 \Rightarrow a\neq 0$)

$\log_5 a \log_5 12 \geq \log_5 13$

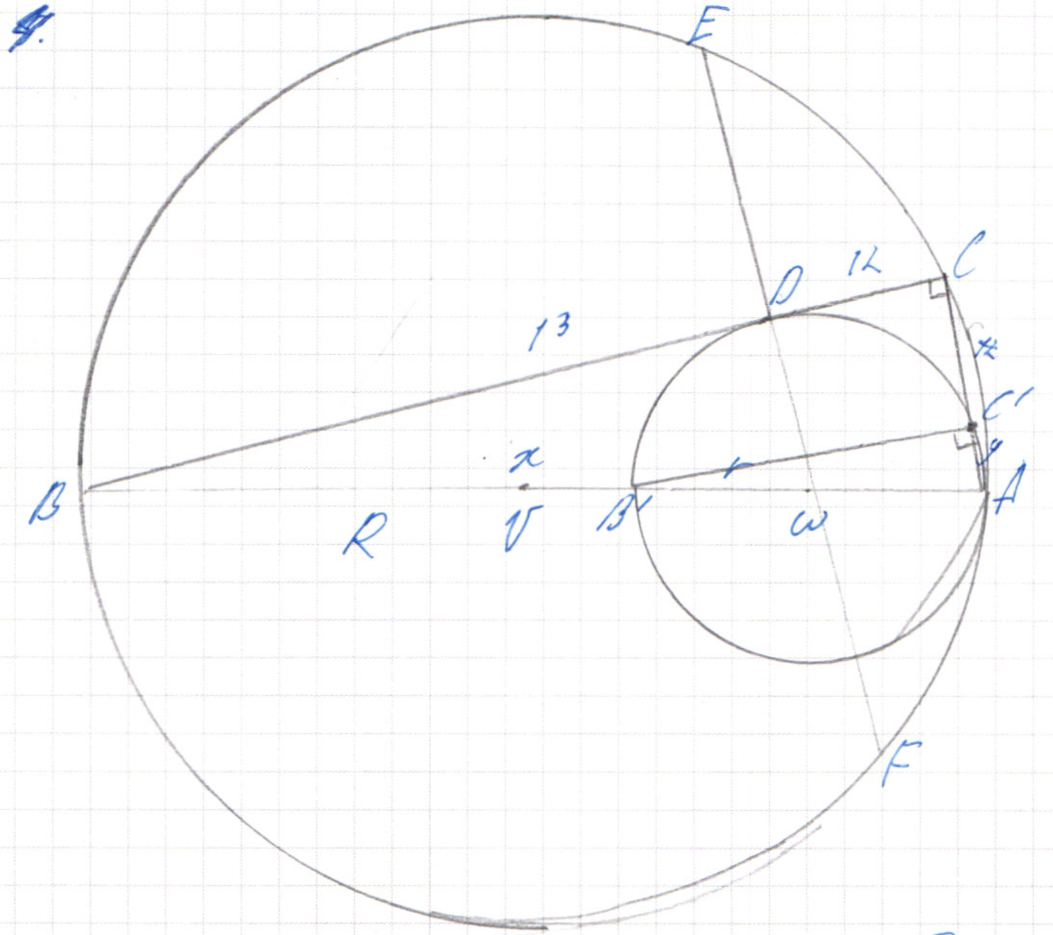
$\log_5(a+12) \geq \log_5 13 \Rightarrow a>1$

$\left[\begin{array}{l} a\in(0;1] \\ a>1 \end{array}\right. \Rightarrow a\in(0;+\infty) \Rightarrow x\in(0;26)$.

Ответ: $x\in(0;26)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



$\angle BCA = 90^\circ$ так как BA – диаметр ν
$\angle B'C'A = 90^\circ$ так как $B'A$ – диаметр ω $\Rightarrow BC \parallel B'C'$

По теореме Фалеса $\frac{y}{12} = \frac{2r}{x}$. Из теоремы о касательной и секущей $13^2 = x(x+2r)$, $12^2 = CC' \cdot CA$.
и из теоремы Пифагора $CA = \sqrt{BA^2 - 625}$
Решая систему этих четырёх уравнений находим R и r.

5. $f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)+f(1) \Rightarrow f(1)=2f(1) \Leftrightarrow f(1)=0$

$f(2)=0$

$f(3)=0$ числа 2, 3 - простые

$f(4)=0$

$f(5)=1$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №6
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = \frac{-1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = \frac{-2}{17} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = \frac{-1}{\sqrt{17}} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = \frac{-2}{17} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{17}}\cos(2\beta) = \frac{-1}{17} \Rightarrow \cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\beta) = \frac{\pm 4}{\sqrt{17}}$

Если $\sin(2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$:

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

$= \frac{1}{\sqrt{17}}\sin2\alpha + \frac{4}{\sqrt{17}}\cos2\alpha = \frac{-1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin2\alpha+4\cos2\alpha = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha-4\sin^2\alpha = -1$. При $\cos\alpha=0$ уравне $-4\sin^2\alpha < -1$. Тогда возможно поделить уравнение на $\cos^2\alpha$

$2tg\alpha+4-4tg^2\alpha = -tg^2\alpha-1 \Rightarrow 3tg^2\alpha-2tg-5=0$

$D=64 \quad tg\,\alpha = \frac{1\pm4}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow tg\,\alpha_1 = \frac{5}{3}$, $tg\,\alpha_2 = -1$.

Если $\sin(2\beta) = \frac{-4}{\sqrt{17}}$, то проделывая аналогичные действия:

$2\sin\alpha\cos\alpha-4\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha = -1 \Rightarrow \cos\alpha\neq0 \Rightarrow 5tg^2\alpha+2tg\alpha-3=0$

$\Rightarrow D=64 \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{-1\pm4}{5} \Rightarrow tg\,\alpha_2 = -1$, $tg\,\alpha_3 = 0{,}6$.

Ответ: -1; $0{,}6$; $\frac{5}{3}$.

2. $\begin{cases} y-6-6x+6=\sqrt{x(y-6)-(y-6)} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y-6)-6(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases} \Rightarrow$

Пусть $b=x-1$, $a=y-6$:

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \quad \text{где } a\geq 6b \text{ и } \cancel{b\geq 0}. \ a \text{ и } b \text{ одного знака} \\ \cancel{9a^2+b^2=90} \ a^2+9b^2=90 \end{cases}$

$a^2-12ab+36b^2=ab \Rightarrow a^2-13ab+36b^2=0 \Rightarrow D=25b^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{a+} \ a=\frac{13\pm5}{2}b$

$a_1=9b$

$a_2=4b$

При $a_1=9b$:

$9b^2+81b^2=90 \Rightarrow b_1=1$, (~~так как b~~ $b_{11}=-1$

при $b_1=1$, $a_1=9$; при $b_{11}=-1$, $a_{11}=-9$ но $a_{11}\geq 6b_{11} \Rightarrow$

$\Rightarrow b\neq -1$

При $a_2=4b$:

$9b^2+16b^2=90$

$b^2=\frac{90}{25}$; при $b_{21}=\frac{3}{5}\sqrt{10}$ $a_2=\frac{12}{5}\sqrt{10}$, но $a_2-6b\geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow b\neq\frac{3}{5}\sqrt{10} \Rightarrow b_{22}=-\frac{3}{5}\sqrt{10}$, $a_{22}=-\frac{12}{5}\sqrt{10}$ что удовлетворяет условию $a-6b\geq 0 \Rightarrow$

$\cancel{\left[\begin{cases} a=9 \\ b=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-\frac{12}{5}\sqrt{10} \\ b=-\frac{3}{5}\sqrt{10} \end{cases}\right.} \Rightarrow$

$(a_1=9,\ b_1=1)$ и $(a_2=-\frac{12}{5}\sqrt{10},\ b_2=-\frac{3}{5}\sqrt{10})$

$(x_1=2,\ y_1=15)$ и $(y_2=-\frac{12}{5}\sqrt{10}+6,\ x_2=-\frac{3}{5}\sqrt{10}+1)$

Ответ: $x_1=2$; $y_1=15$; $x_2=-\frac{3}{5}\sqrt{10}+1$; $y_2=-\frac{12}{5}\sqrt{10}+6$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$

$\begin{cases} k^2-6n^2=kn \\ 9n^4+k^4=90 \end{cases}$

$(y-6)-6(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-6)}$

$9(x^2-2x+1)+y^2-12y+36=90$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$a-6b=\sqrt{ab}$

$9b^2+a^2=90$

$a_1=9$

$b_1=1$

$\begin{cases} (a-6b)^2=ab \\ 9b^2+a^2=90 \end{cases}$

$\cancel{36}$ $36\cdot 4=144$

$a^2-12ab+36b^2=ab$

$a^2-13ab+36b^2=0$

$D=169b^2-144b^2=25b^2$

$a=\left(\frac{13\pm 5}{2}\right)b$

$\boxed{\begin{array}{l} a_1=9b \\ a_2=4b \end{array}}$

$9b^2+81b^2=90$

$b^2=1 \Rightarrow b_1=1 \quad a_1=9 \quad y=15 \quad x=2$

$9b^2+16b^2=90$

$25b^2=90$

$b^2=\frac{90}{25}=\cancel{\frac{18}{5}}$

$b_2=\frac{3}{5}\sqrt{10}$ $a_2=\frac{12}{5}\sqrt{10}$ $y_2=\frac{12}{5}\sqrt{10}+5$

$x_2=\frac{3}{5}\sqrt{10}+5$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

2. $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ \cancel{9x^2-18x+36+y^2-12y+9=27} \end{cases}$

$\cancel{(3x-6)^2+(y-3)^2=0}$

$\cancel{(x-2)^2+(y-3)^2=0}$

$\cancel{\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}}$

$\cancel{9(x^2-2x+1)+y^2-12y+9=27}$

$9x^2+y^2-18x-12y=45$

$9x^2-18x+9+y^2-12y+36=90$

$9(x^2-2x+1)+y^2-12y+36=90$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=\cancel{0}$

$\cancel{x=1}$

$\cancel{y_2=6}$

$\begin{cases} b^2-12ab+36a^2=ab \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$

$\begin{cases} b^2-13ab+36a^2=0 \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$

$\cancel{x}-13ab+27a^2=-90$

$\cancel{x}-13ab=-90-27a^2$

$b=\dfrac{+90+27a^2}{13a}$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$y-6x=\sqrt{y(x-1)-6(x-1)}$

$y-6x=\sqrt{(y-6)(x-1)}$

$y-6-6x+6=\sqrt{(y-6)(x-1)}$

$(y-6)-6(x-1)=\sqrt{(y-6)(x-1)}$

$a=x-1$

$b=y-6$

$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$ $\begin{cases} b\geq 6a \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\geq 0 \\ b\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a\leq 0 \\ b\leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$

$90a^2+\left(\dfrac{90+27a^2}{13a}\right)^2=90$

$\dfrac{90a^2+\cancel{90}^2+2\cdot 90\cdot 27a^2+27^2a^4}{13a}=90$

$13\cdot 90a^3+90^2+2\cdot 90\cdot 27a^2+27^2a^4=13\cdot 90a$

$130a^3+960+20\cdot 27a^2+3\cdot 27a^4=130a$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2a+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$2\sin(2a+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{2}{17}$

$\sin(2a+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{1}{17}$

$\frac{\sin(2a+2\beta)\cos(2\beta)}{\sin(2a+2\beta)} = \frac{\sqrt{17}}{17} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\beta) = \sqrt{1 - \frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \cos 2\alpha \frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

$\cancel{tg 2\alpha}$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha = -1$

$4\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 4\sin^2\alpha = -1$

$4 + 2tg\alpha - 4tg^2\alpha = -(tg^2\alpha + 1)$

$4 + 2tg\alpha - 4tg^2\alpha = -tg^2\alpha - 1$

$5 + 2tg\alpha - 3tg^2\alpha = 0$

$3tg^2\alpha - 2tg\alpha - 5 = 0$

$D = 4 + 60 = 64$

$tg\alpha = \frac{2\pm 8}{6} = \frac{1\pm 4}{3}$

$tg_1\alpha = \frac{5}{3}$

$tg_2\alpha = -1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(\frac{2}{3}) = \frac{18\cdot 4}{9} - \frac{51\cdot 2}{3} + 28 = 8 - 34 + 28 = 2$

$f(2) = 18\cdot 4 - 102 + 28 = 72 - 102 + 28 = -2$

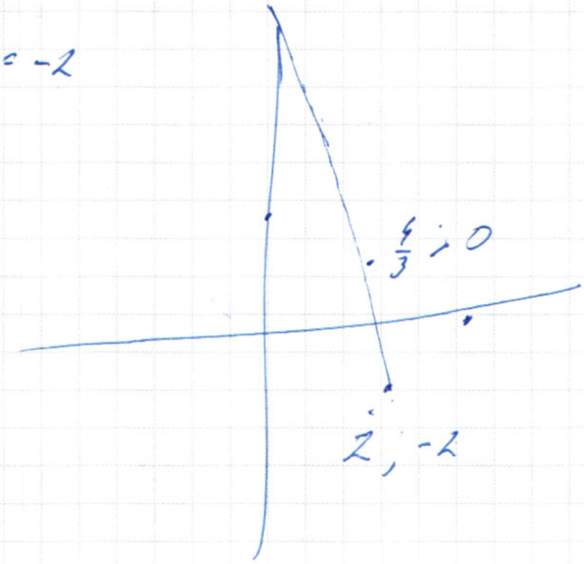
$\begin{cases} ax_1 + b = 2 \\ ax_2 + b = -2 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{3}a + b = 2$

$2a + b = -2$

$\frac{4}{3}a = -4$

$a = -3$

$b = 4$



$\frac{4}{3}; 0$

$2; -2$

$-3x+4$

$\left(\frac{8-6x}{3x-2} + 3x - 4\right)' = \frac{-12}{(3x-2)^2} + 3 = 0$

~~$ax+b=$~~

$\begin{cases} 2a + b = -2 \\ a = \frac{-12}{(3x-2)^2} \\ ax + b = \frac{8-6x}{3x-2} \end{cases}$

$\frac{4}{(3x-2)^2} = 1$

$(3x-2)^2 = 4$

$3x - 2 = 2$ $\quad$ $x = \frac{4}{3}$

$3x - 2 = -2$

$3x = 0$

$x = 0$

$\frac{8 - \frac{6\cdot 4}{3}}{\frac{3\cdot 4}{3} - 2} = 0$

$\begin{cases} \frac{-24}{(3x-2)^2} + b = -2 \\ \frac{-12x}{(3x-2)^2} + b = \frac{8-6x}{3x-2} \end{cases}$

$\frac{-24}{(3x-2)}$

$\frac{8 - \frac{6\cdot 4}{3}}{4-2} = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

1. $\sin(2a+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cancel{\sin\left(\frac{2a+2a+4\beta}{2}\right)}$

$\cancel{\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = \frac{-2}{17}$

$\sin(2a+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{1}{17}$

$\cancel{\sin(2a+2\beta)}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\sin(2a+2\beta)\cos 2\beta = \frac{-1}{17}\sin(2\alpha+2\beta)$

$\sin(2a+2\beta)\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}\sin(2a+2\beta)$

$\sin(2a+2\beta)\cos$

$\frac{2}{-\sqrt{17}}\cos 2\beta = \frac{-2}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{\sqrt{17}}{17} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cancel{\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin}$

$\sin 2\beta = \frac{\pm 4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha - \frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha = -1$

2

$-4\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + 4\sin^2\alpha = -1$

$-4 + 2tg\alpha + 4tg^2\alpha = -tg^2\alpha - 1$

$5tg^2\alpha + 2tg\alpha - 3 = 0$

$D = 64$

$tg\alpha = \frac{-2\pm 8}{10}$

$tg_1\alpha = -1$

$tg_2\alpha = 0{,}6$

$\cancel{tg(2\alpha) = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}}$

Ответ: $-1;\ 0{,}6;\ \frac{5}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

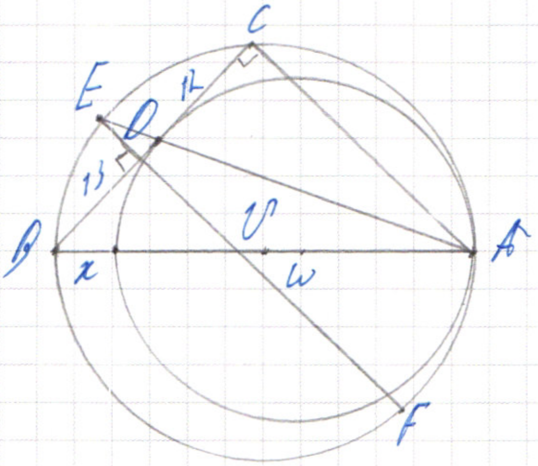
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

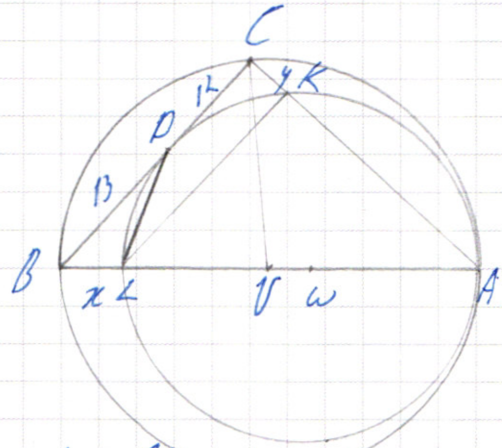
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.





$13^2 = x(2R\ 2r+x)$

$x = R-r$

~~13·13~~

$12^2 =\ CA\cdot$

$y = \dfrac{CA(x+2r) - CA(2r)}{x+2r} = \dfrac{Ca\, x}{x+2r}$

$KA = \dfrac{CA\cdot 2r}{x+2r} =$

$144 = y\, KA = \dfrac{CA^2 2xr}{x+2r}$

$CA^2 = 28^2\ \ (x+2r)^2 - 25^2$

$$\begin{cases} 144 = \dfrac{[(x+2r)^2 - 25]\ 2xr}{(x+2r)^2} \\ 169 = x(2r+x) \end{cases}$$

$\cancel{144(x+2r^2)^2} = 2(x+2r)^2 \cdot 2xr - 25xr$

$\Rightarrow\ 144(x+2r)^2 =$

$144 = 2xr - \dfrac{50xr}{(x+2r)^2}$

$2r+x = \dfrac{169}{x}$

$144 = 2xr - \dfrac{50xr}{}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~6. график~~

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

5. $f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$\cancel{f(2) = 0}$ $\quad f(2) = 0$

$\cancel{f(3) = 0}$ $\quad f(3) = 0$

$\cancel{f(4) = 0}$ $\quad f(4) = 0$

$f(5) = 1$

$f(7) = 1$

$f(11) = 2$

$f(13) = 3$

$f(17) = 4$

$f(23) = 5$

6. $\left(\dfrac{8-6x}{3x-2}\right)' = \dfrac{-6(3x-2) - 3(8-6x)}{(3x-2)^2} = \dfrac{-18x + 12 - 24 + 18x}{(3x-2)^2} < 0$

$\left(\dfrac{8-6x}{3x-2}\right)_{мин} = \dfrac{8-12}{6-2} = \dfrac{-4}{4} = -1$

$18x^2 - 51x + 28$

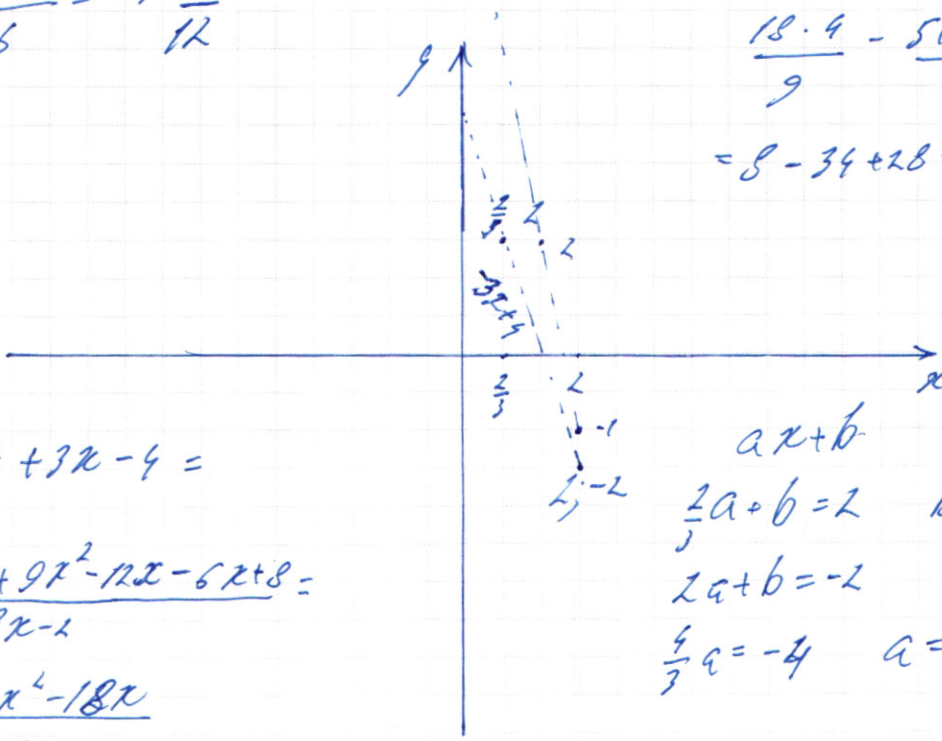
$x_в = \dfrac{51}{36} = \dfrac{17}{12}$

$72 - 102 + 28 = -2$

$\dfrac{8-6x}{3x-2} \geq ax + 4 \geq 18x^2 - 51x + 28$

$\dfrac{18 \cdot 4}{9} - \dfrac{51 \cdot 2}{3} + 28 =$

$= 8 - 34 + 28 = 2$



$ax + b$

$\frac{2}{3}a + b = 2 \qquad b = 4$

$2a + b = -2$

$\frac{4}{3}a = -4 \qquad a = -3$

$\dfrac{8-6x}{3x-2} + 3x - 4 =$

$\dfrac{8 - 6x + 9x^2 - 12x - 6x + 8}{3x-2} =$

$= \dfrac{16 + 9x^2 - 18x}{3x-2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $|x^2-26x|^{\log_5 12} \geq x^2-26x+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$\cancel{a=x^2-26x}$

$\cancel{a^{\log_5 12} \geq a + 13^{\log_5 -a}}$

$\cancel{a^{\log_5 12} - 13^{\log_5 -a} \geq a}$

$26x-x^2>0$

$x(26-x)>0$

$x\in(0;26)$

$26x-x^2>0$

$a=26x-x^2$

$a^{\log_5 12} \geq a+13^{\log_5(\cancel{26x}\,a)}$

$a=13^{\log_5 a}$

$\log_5 a \geq \log_5 13^{\log_5 a}$

$a^{\log_5 12} \geq -a+13^{\log_5 a}$

$\log_5 a \geq \log_5 a \log_5 13$

$\log$

$\log_5 a - \log_5 a \log_5 13 \geq 0$

$a\in(0;1]$

$\log_5 a(1-\log_5 13)\geq 0$

$a=5 \quad 12\geq -5+13 \quad a=5$

$\log_5 a \leq 0$

a

$a\leq 1$

$\log_5 a^{\log_5 12} \geq \log(13^{\log_5 a}-a)$

$\log_5 12 \log_5 a \geq \dfrac{\log_5 13 \log_5 a}{\log_5 a}$

$\log_5 12 \log_5 a \geq \log_5 13$

$\log_5(a+12)\geq \log_5 13$

$a\geq 1$

$x\in(0;26)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)