МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{\text{№}1}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=2\cdot\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right)=$

$=2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)=-\frac{4}{5}$

$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)=-\frac{4}{5}\end{cases}$ $\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\\ 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cos(2\beta)=-\frac{4}{5}\end{cases}$

$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \cos(2\beta)=\frac{2}{\sqrt5}\end{cases}$

$\sin^2(2\beta)+\cos^2(2\beta)=1$

$\sin^2(2\beta)=1-\cos^2(2\beta)=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sin(2\beta)=\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin(2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}.\end{array}\right.$

$\sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta)+\cos(2\alpha)\sin(2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}-\cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}2\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-1\\ 2\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=-1\end{array}\right.$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin(2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin(2\beta)=\frac{1}{\sqrt5}\end{array}\right.\\ \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sin(2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin(-2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}.\end{array}\right.\\ \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=\sin(2\beta)\\ \sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}\end{cases}\\ \begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=\sin(-2\beta)\\ \sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}\end{cases}\end{array}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=\sin(2\beta)\\ \sin(2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}2\alpha+2\beta=2\beta+2\pi n,\ n\in Z.\\ 2\alpha+2\beta=\pi-2\beta+2\pi n,\ n\in Z,\end{array}\right.\\ \sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\alpha=\pi n,\ n\in Z.\\ \alpha=\pi-2\beta+2\pi n\end{array}\right.\\ \cancel{\sin 2\beta=-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}.\ \sin(2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}\end{cases} \qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}tg(\alpha)=tg(\pi n)=0.\\ \begin{cases}\sin\alpha=\sin(\pi-2\beta)\\ \cos\alpha=\cos(\pi-2\beta).\end{cases}\end{array}\right.\\ \sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}}\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}tg\,\alpha=0\\ \begin{cases}\sin\alpha=\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \cos\alpha=-\cos(2\beta)=-\frac{2}{\sqrt{5}}\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}tg\,\alpha=0\\ tg\,\alpha=+\frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=\sin(-2\beta)\\ \sin(2\beta)=\frac{1}{\sqrt{5}}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}2\alpha+2\beta=-2\beta+2\pi n,\ n\in Z.\\ 2\alpha+2\beta=\pi+2\beta+2\pi n,\ n\in Z.\end{array}\right.\\ \sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\alpha=-2\beta+\pi n,\ n\in Z.\\ \alpha=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.\end{array}\right.\\ \sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}\end{cases} \qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin\alpha=-\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \cos\alpha=\cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}\end{cases}\\ \begin{cases}\sin\alpha=\pm 1\\ \cos\alpha=0\end{cases}\end{array}\right.\\ \sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}tg\,\alpha=-\frac{1}{2}\\ tg\,\alpha \text{ не определён.}\end{array}\right.$$

Ответ: $tg\,\alpha\in\left\{-\frac{1}{2};\ 0;\ \frac{1}{2}\right\}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$\boxed{ОДЗ: x^2+18x>0}$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + (x^2+18x) \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13}$

пусть $x^2+18x = 12^k$, >0.

$5^{\log_{12}(12^k)} = 5^k$; $|x^2+18x|^{\log_{12}13} = 12^{k\log_{12}13} = 13^k$.

$5^k + 12^k \geqslant 13^k \;|:13^k \Rightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^k + \left(\frac{12}{13}\right)^k \geqslant 1.$

правая часть — const; левая убывает $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ существует не более одного значения k: $\left(\frac{5}{13}\right)^k + \left(\frac{12}{13}\right)^k = 1.$

пусть $k_0 = 2$: $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{5^2+12^2}{169} = 1.$

$f(k) = \left(\frac{5}{13}\right)^k + \left(\frac{12}{13}\right)^k$; $f'(k) < 0 \Rightarrow f(k) \searrow \Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $\forall k < k_0$: $f(k) > f(k_0) = 1$; при $\forall k > k_0$:

$f(k) < f(k_0) = 1. \Rightarrow$ подходят все $k \leqslant k_0 = 2. \Rightarrow$

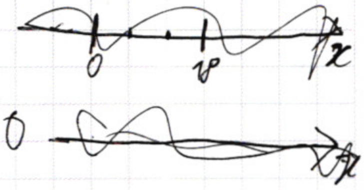
$0 < 12^k \leqslant 12^2 = 144 \Rightarrow 0 < x^2 + 18x \leqslant 144$:

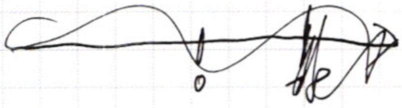
$\begin{cases} x^2+18x > 0 \\ x^2+18x \leqslant 144 \end{cases}$ $\begin{cases} x(x+18) > 0 \\ x^2 + 2\cdot 9x + 81 \leqslant 144+81 = 225 = 15^2 \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

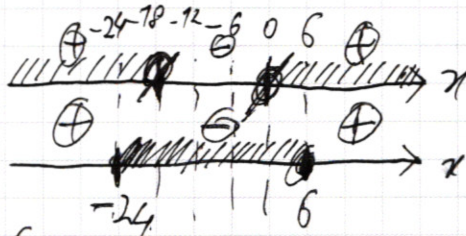
$$\begin{cases} x(x+18)>0 \\ (x+9)^2 \le 15^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(x+18)>0 \\ (x-6)(x+24)\le 0 \end{cases}$$





$\cancel{x(x+18)}>0$

$$\begin{cases} x(x+18)>0 \\ (x-6)(x+24)\le 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \in (-\infty;-18) \cup (0;+\infty) \\ x \in [-24;6] \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \in [-24;-18) \cup (0;6].$

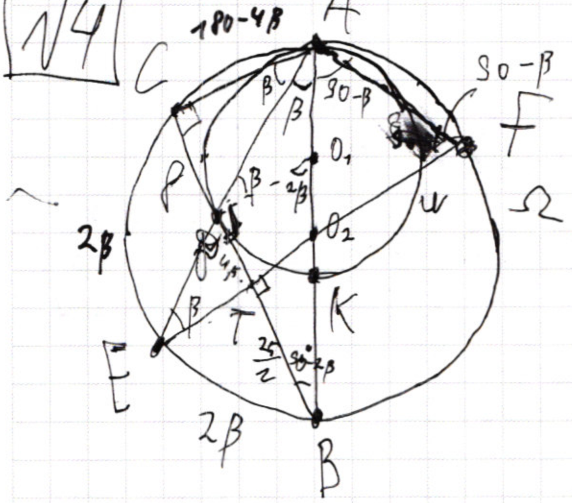
Ответ: $x \in [-24;-18) \cup (0;6]$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



пусть r — радиус ω;
R — радиус Ω;
AB — диаметр Ω; A — точка вн касания $\Rightarrow O_1, O_2 \in AB$;
O_1 — центр ω; O_2 — центр Ω.
$\boxed{AB \cap \omega = K.}$
пусть $\breve{EB} = 2\beta \Rightarrow \angle EAB = \beta$ — впис
$\angle EAB$ опирается на дугу $\breve{DK} \Rightarrow \breve{DK} = 2\beta \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle DO_1K = 2\beta$ — центральный; $\angle DBO_1 = 180° - \angle O_1DB - \angle DO_1B = 90° - 2\beta \Rightarrow$ $\angle CAB = 180° - \angle ACB - \angle CBA =$

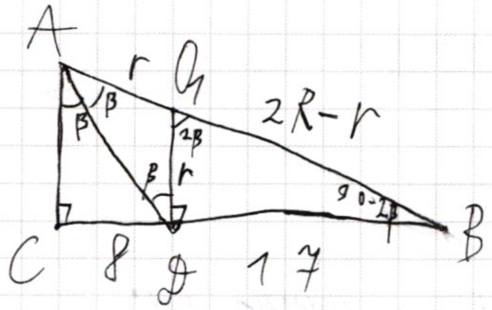
радиус $\perp$ касат $\Rightarrow 90°$

$= 2\beta = \angle CAE + \angle BAE = \angle CAE + \beta \Rightarrow$

опир на диаметр $\Rightarrow 90°$

$90-2\beta$

$\Rightarrow \angle CAE = \angle BAE = \beta \Rightarrow AE$ — биссектриса $\triangle ABC$;
Ω — опис окр $\triangle ABC$; $E \in \Omega \Rightarrow E$ — середина дуги $\breve{CB} \Rightarrow CE = BE$. $EF \perp BC \Rightarrow EF$ — высота в $\triangle ECB$; $EC = EB \Rightarrow \triangle ECB$ — равноб $\Rightarrow EF$ — серперп $\Rightarrow O_2 \in EF$; $EF \cap BC = T$. $CD = 8$;
$BT = \frac{BC}{2} = \frac{17+8}{2} = \frac{25}{2} = 12{,}5$; $TD = \frac{BC}{2} - CD = 4{,}5 = \frac{9}{2}$.
рассмотрим $\triangle ABC$:



$AB = 2R$

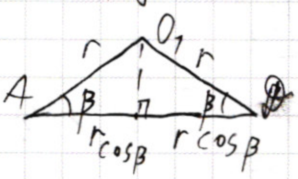
$AO_1 = r \Rightarrow BO_1 = 2R - r;$

$O_1D = r.$

$17 = (2R - r)\sin(2\beta)$
$25 = 2R\sin 2\beta$ $\Rightarrow \frac{2R-r}{2R} = 1 - \frac{r}{2R} = \frac{17}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{r}{2R} = \frac{8}{25} \Rightarrow \boxed{\frac{r}{R} = \frac{16}{25}.}$ $\boxed{r = \frac{16R}{25}}$

$\frac{CD}{AD} = \sin\beta = \frac{8}{AD} \Rightarrow AD = \frac{8}{\sin\beta}.$



$AD = 2r\cos\beta = \frac{8}{\sin\beta} \Rightarrow$
$\boxed{r\sin 2\beta = 8.}$

Степень точки B относит ω:

$BD^2 = BK \cdot BA$; $AK = 2r$; $AB = 2R \Rightarrow BK = 2(R - r)$

$17^2 = 4R(R-r) = 4R\left(R - \frac{16R}{25}\right) = 4R^2\left(\frac{9}{25}\right) = \left(\frac{2\cdot 3}{5}R\right)^2$

$17 = \frac{6}{5}R \Rightarrow R = \frac{85}{6}$ $r = \frac{17\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{16}^{8}}{\cancel{6}_3\cdot\cancel{25}_5} = \frac{17\cdot 8}{15} = \frac{136}{15}.$

$\angle AFE = \frac{\breve{AE}}{2} = \frac{\breve{AC}}{2} + \frac{\breve{CE}}{2} = \angle ABC + \angle CAE = 90^\circ - 2\beta + \beta =$
$= 90^\circ - \beta.$

$\cos 2\beta = \frac{O_1D}{O_1B} = \frac{r}{2R - r} = \frac{\frac{16}{25}R}{2R - \frac{16}{25}R} = \frac{16}{2\cdot 25 - 16} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$

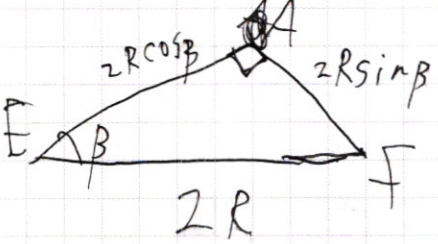
$\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 \Rightarrow \cos\beta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\beta}{2}}$ (т. к. острый).

~~$\cos\beta = \sin$~~ $\sin(90^\circ - \beta) = \cos\beta = \cancel{\sqrt{\frac{1 + \frac{16^2}{34^2}}{2}}} = \cancel{\sqrt{\frac{34^2+16^2}{2\cdot 34^2}}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos\beta=\sqrt{\frac{1+\frac{8^2}{17^2}}{2}}=\sqrt{\frac{17^2+8^2}{2\cdot17^2}}=\sqrt{\frac{289+64}{2\cdot17^2}}=\sqrt{\frac{353}{2}}\cdot\frac{1}{17}=$$

$$=\sin(90^\circ-\beta)\Rightarrow\angle AFE=\arcsin\left(\frac{1}{17}\sqrt{\frac{353}{2}}\right).$$



$$\Rightarrow S_{AFE}=\frac{AE\cdot AF}{2}=R^2\cdot2\cos\beta\sin\beta=$$
$$=R^2\sin2\beta.$$

$$\sin2\beta=\sqrt{1-\cos^2 2\beta}=\sqrt{1-\frac{8^2}{17^2}}=\frac{\sqrt{289-64}}{17}=\frac{\sqrt{225}}{17}=\frac{15}{17}.$$

$$S_{AFE}=\frac{15}{17}\cdot\left(\frac{17\cdot5}{6}\right)^2=\frac{\cancel{3}\cdot5\cdot\cancel{17^2}^{17}\cdot5^2}{\cancel{17}\cdot\cancel{3}\cdot2}=\frac{17\cdot125}{2}=$$

$$=\frac{2125}{2}$$

Ответ: $R=\frac{85}{6}$; $r=\frac{136}{15}$; $\angle AFE=\arcsin\left(\sqrt{\frac{353}{2}}\cdot\frac{1}{17}\right)$, $S_{AFE}=\frac{2125}{2}$.

№ 5

$\boxed{a, b \in \mathbb{Q}; \ a, b > 0}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$.

пусть $\begin{cases} x = ab \\ y = a \end{cases} \Rightarrow b = \frac{x}{y} \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$.

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$.

$f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = f(1) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{y}{x}\right) > 0$.

а также $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{y}{x}\right) = 0$.

рассмотрим все пары (x, y): $\boxed{x < y}$:

если $f(x) = f(y)$, то $f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{y}{x}\right) = 0$.

если $f(x) \neq f(y)$, то среди $f\left(\frac{x}{y}\right)$ и $f\left(\frac{y}{x}\right)$ ровно одно отрицательное.

рассмотрим $f(x)$:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$f(x)$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0

$f(1) = 0$; $f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$; $f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$; $f(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$

$f(7) = \left[\frac{7}{4}\right] = 1$; $f(11) = \left[\frac{11}{4}\right] = 2$; $f(13) = \left[\frac{13}{4}\right] = 3$;

$f(17) = \left[\frac{17}{4}\right] = 4$; $f(19) = \left[\frac{19}{4}\right] = 4$; $f(23) = \left[\frac{23}{4}\right] = 5$

$f(4) = 2 \cdot f(2) = 0$; $f(6) = f(2) + f(3) = 0$; $f(8) = f(2) + f(4) = 0$;

$f(9) = f(3) + f(3) = 0$; $f(10) = f(2) + f(5) = 1$; $f(12) = f(3) + f(4) = 0$;

$f(14) = f(2) + f(7) = 1$; $f(15) = f(5) + f(3) = 1$; $f(16) = f(4) + f(4) = 0$;

□ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$f(18)=f(2)+f(9)=0$; $f(20)=f(2)+f(10)=1$; $f(21)=f(3)+f(7)=1$;

$f(22)=f(2)+f(11)=2$; $f(24)=f(6)+f(4)=0$.

$n_0=11$, - кол-во нулей.

$\boxed{n_k \text{ - сколько раз встречается число } k}$

$n_1=7$.

$n_2=2$.

$n_3=1$.

$n_4=2$.

$n_5=1$.

1) $f(x)=0$; $f(y)>0$: $n_0\cdot(\overbrace{24-n_0}^{n_1+n_2+n_3+n_4+n_5})=11\cdot 13=143$.

2) $f(x)=1$; $f(y)>1$: $n_1\cdot(n_2+n_3+n_4+n_5)=7\cdot 6=42$

3) $f(x)=2$; $f(y)>2$: $n_2\cdot(n_3+n_4+n_5)=2\cdot 4=8$

4) $f(x)=3$; $f(y)>3$: $n_3\cdot(n_4+n_5)=1\cdot 3=3$

5) $f(x)=4$; $f(y)>4$: $n_4\cdot n_5=2$.

$N=143+42\underbrace{+8}_{50}+3\underbrace{+2}_{5}=193+5=198$.

Ответ: 198.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(ax+b)(4x+3)=4ax^2+4bx+3ax+3b$

$(4b+3a)x$

72×8

24

4

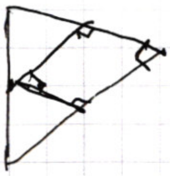
$176-72=104$

$104-72=32.$

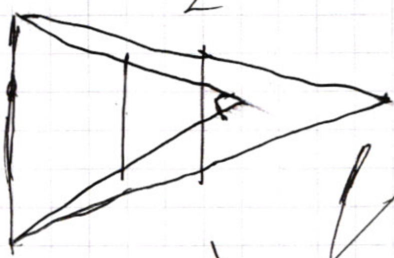
$\cancel{-127}$ 44 10

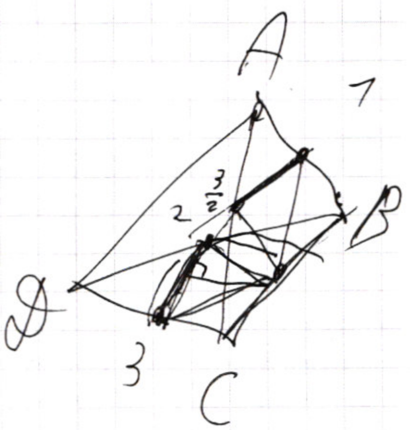
$-11\cdot 11+11\cdot 75-34$

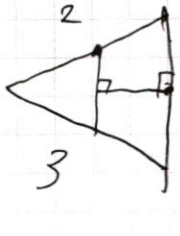
$3\cancel{72}\left(\frac{-3}{4}\right)+11=2.$



$\frac{45-9}{2}=\frac{36}{2}=18$







$\boxed{№6}$ $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17.$$

1) $\frac{12x+11}{4x+3} - (ax+b) \leq 0$

$$\frac{12x+11-(ax+b)(4x+3)}{4x+3} \leq 0.$$

$$\frac{-4ax^2-x(4b+3a-12)-(3b-11)}{4x+3} \leq 0.$$

$x < -\frac{3}{4} \Rightarrow 4x+3 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4ax^2+x(4b+3a-12)+(3b-11) < 0.$

1) $a \neq 0$.

$D = 16b^2+9a^2+12^2+24ab-96b-72a-48ab+176a =$

$=(4b)^2+(3a)^2+(12)^2-2\cdot 3a\cdot 4b-96b+72a+32a=$

$=(4b-3a-12)^2+32a$

$$x = \frac{-4b-3a+12 \pm \sqrt{D}}{8a}.$$

На промежутке $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$ $f = \frac{12x+11}{4x+3}$ - непрерывна; $g = -8x^2-30x-17$ - непрерывна $\Rightarrow$

неравенство выполнено на промежутке ~~значит~~ $x \in [x_0; x_1)$.

значит: $\begin{cases} f(x_0) \leq ax_0+b \leq g(x_0); \\ f(x_1) \leq ax_1+b \leq g(x_1); \end{cases}$

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab) = f(a) + f(b)$.

$ab = x$

$a = y$, $b = \frac{x}{y}$ $\Rightarrow$ $f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0:\ f(x) < f(y)$.

$f(1) = f(2) = f(3) = 0$.

$f(4) = 2f(2) = 0$

$f(8) = f(16) = 0$.

$f(6) = f(12)$

$\frac{12}{4} = 3$

$\frac{16}{4} = 4$

$\frac{20}{4} = 5$

$\frac{24}{4} = 6$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
0	0																						

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0

$11 \cdot 13$

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax + b \le -8x^2 - 30x - 17$.

$8x^2 + 30x + 17 = 0$

$\frac{D}{4} = 225 - 17 \cdot 8 = 89$

$17 \cdot 8 = 136$

$225 - 136 = 89$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\forall x \in [x_0; x_1) \quad f(x) \leq ax + b < g(x)$

или $f(x)$ кас $(ax+b)$ или $g(x)$ кас $(ax+b)$;

x_0:

$f(x_0) = \dfrac{12 \cdot \left(-\frac{11}{4}\right) + 11}{4 \cdot \left(-\frac{11}{4}\right) + 3} = \dfrac{-22}{-8} = \dfrac{11}{4}$

$g(x_0) = -8\left(-\frac{11}{4}\right)^2 - 30\left(-\frac{11}{4}\right) - 17 = -\frac{121}{2} + \frac{11 \cdot 15}{2} - 17 = 5.$

x_1:

$x \to x_1 \quad f(x) \to -\infty$;

$g(x_1) = -8\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 30\left(-\frac{3}{4}\right) - 17 = -\frac{9}{2} + \frac{45}{2} - 17 = 1.$

$$\begin{cases} \frac{11}{4} \leq -\frac{11}{4}a + b \leq 5 \\ -\frac{3}{4}a + b \leq 1. \end{cases}$$

$g(x) > ax + b$: $\quad 8x^2 + (30+a)x + (17+b) < 0.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \quad \begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2=a \\ y-1=b \end{cases} \Rightarrow x-2y=a-2b; \quad \boxed{ab\geqslant 0} - \boxed{ОДЗ}.$$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+4b^2-4ab=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \quad \begin{cases} (a-4b)(a-b)=0 \\ a^2+4b^2=25 \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=4b \end{array}\right. \\ a^2+4b^2=25 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ 5b^2=25 \end{cases} \\ \begin{cases} a=4b \\ 20b^2=25 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ b=\pm\sqrt{5} \end{cases} \\ \begin{cases} a=4b \\ b=\pm\frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{array}\right. . \quad \begin{array}{l} a=b\Rightarrow ab\geqslant 0 \\ a=4b \Rightarrow ab\geqslant 0. \end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=\pm\sqrt{5} \\ \begin{cases} a=\pm 2\sqrt{5} \\ b=\pm\frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x=a+2 \\ y=b+1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\sqrt{5}+2 \\ y=\sqrt{5}+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{5}+2 \\ y=-\sqrt{5}+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2\sqrt{5}+2 \\ y=\frac{\sqrt{5}}{2}+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2\sqrt{5}+2 \\ y=-\frac{\sqrt{5}}{2}+1 \end{cases} \end{array}\right.$$

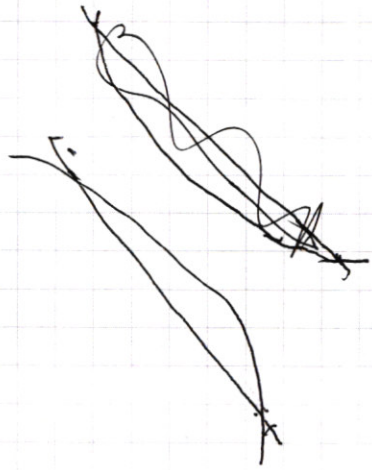
Ответ: $(x,y)\in\left\{(\sqrt{5}+2;\sqrt{5}+1);\ (-\sqrt{5}+2;-\sqrt{5}+1);\ (2\sqrt{5}+2;\frac{\sqrt{5}}{2}+1);\ (-2\sqrt{5}+2;-\frac{\sqrt{5}}{2}+1)\right\}$.

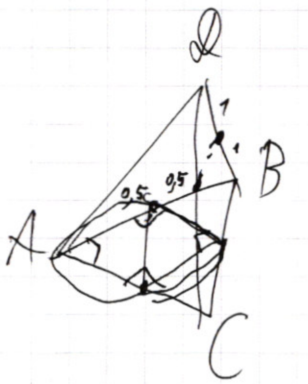
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$f' = \frac{12\cdot(4x+3) - (12x+11)\cdot 4}{(4x+3)^2} = 4\cdot\frac{3\cdot(4x+3) - 12x - 11}{(4x+3)^2} =$$

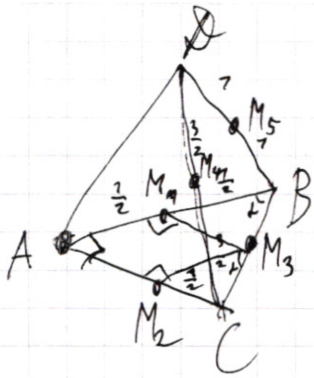
$$= \frac{-8}{(4x+3)^2} \text{ — убывает;}$$

$$f'' = \frac{8\cdot 2\cdot 4}{(4x+3)^3} > 0$$

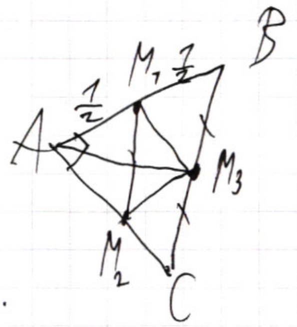




ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$A, M_1, M_3, M_2 \in (ABC) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ лежат на одной окружности.

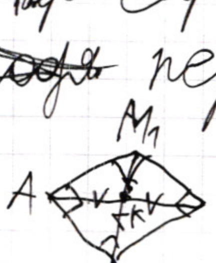


M_1M_2; M_2M_3; M_1M_3 — ср. лин $\triangle ABC \Rightarrow$
$M_1M_2 \parallel BC$; $M_2M_3 \parallel AB$;
$M_1M_3 \parallel AC \Rightarrow AM_1M_3M_2$ — пар-мм; $AM_1M_3M_2$ — впис $\Rightarrow$
$\Rightarrow AM_1M_3M_2$ — прямоугольник.

M_1M_2 — ср. лин $\triangle ABC \Rightarrow M_1M_2 = \frac{BC}{2}$; $M_1M_2 \parallel BC$.
M_4M_5 — ср. лин $\triangle BCD \Rightarrow M_4M_5 = \frac{BC}{2}$; $M_4M_5 \parallel BC$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow M_1M_2 \parallel M_4M_5$; $M_1M_2 = M_4M_5 \Rightarrow M_1M_2M_4M_5$ лежат в одн. плоскости; $M_1M_2M_4M_5$ — пар-мм;
$M_1M_2M_4M_5$ — впис $\Rightarrow M_1M_2M_4M_5$ — прямоугольник.

Центр сферы лежит на прямой, ~~которая~~ перп (ABC); содержащей точку K:



K — середина M_1M_2; аналогично

лежит на прямой, перп. (BCD); содерж. ~~середину~~. центр. опис окр $\triangle M_4 M_5 M_3$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

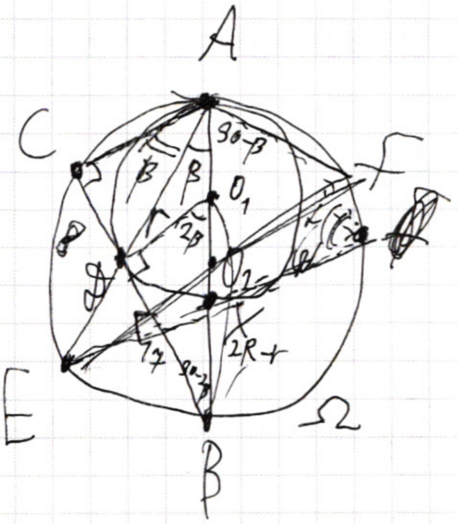
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$BD^2 = BX\cdot 2R$

$BX = 2R-2r = 2(R-r)$

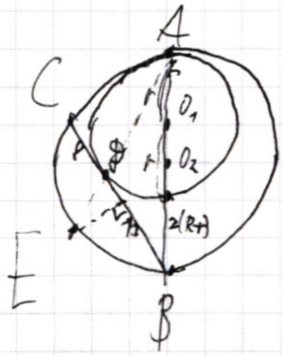
$17^2 = 4\cdot R(R-r).$

$ED\cdot AD = 8\cdot 17$

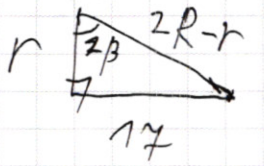
$AE = 2R\cos\beta$

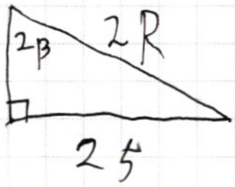
$AD = 2r\cos\beta$

$DE = AE - AD = 2(R-r)\cos\beta.$



$4r(R-r)\cos^2\beta = 8\cdot 17$





$\frac{2R}{25} = \frac{2R-r}{17}$

$25-17=8$

$17\times 8 = 136$

$170-34=136$

$34R = 50R - 25r$

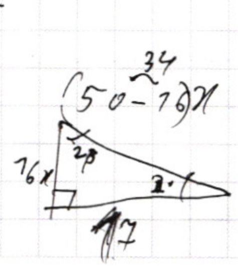
$25r = 16R$

$\boxed{r = \frac{16R}{25}}$

$17\cdot 5 = 50+35$

$R = 25x$

$r = 16x.$



$(34^2-16^2)x^2 = 17^2$

$50\cdot 18$

$100\cdot 9 = (30)^2$

$x = \frac{17}{30}.$

$R = \frac{17\cdot 5}{6\cdot 6}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\overset{16}{12+4+9}$ 1, 2, 3, 4, 5.

$\frac{22}{33}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha (2\cos^2 2\beta \cancel{-1+1}) + 2\cos 2\alpha \cos 2\beta \sin 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha \cos^2 2\beta + \cos 2\alpha \cos 2\beta \sin 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta (\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta$

$\sin(x+y) + \sin(x-y) = \sin x \cos y + \cancel{\cos x \sin y} + \sin x \cos y - \cancel{\cos x \sin y} =$
$= 2\sin x \cos y$

$\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot c = \frac{4}{5}$ $\quad 2 \cdot \sqrt{17^2 + 8^2}$

$c = \frac{4\sqrt{5}}{5 \cdot 2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$17 \cdot 17$: 119, 17, 289

$289 + 64 = 353$

$144 + 81 = 225$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin(\pm 2\beta).$

$d = 12^k$

$125 \cdot 17 =$
$= 2000 + 125 =$
$= 2125$

$x^2 - 4x + 4 + 9(y^2 - 2y + 1) - 4 - 9 = 12$

$(x-2)^2 + 9 \cdot (y-1)^2 = 25$

$2x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} = \sqrt{x(y-1) - 2(y-1)} =$
$= \sqrt{(x-2)(y-1)}$

$f = d^{\log_{12} 5} + d \geq d^{\log_{12} 13} = g$

$f' = \log_{12} 5 \, d^{-\log_{12}\left(\frac{12}{5}\right)} + 1$

$g' = \log_{12} 13 \, d^{\log_{12}\left(\frac{13}{12}\right)}$

$5^{\log_{12} d} + d \geq 13^{\log_{12} d}$

$5^k + 12^k \geq 13^k$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)