МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

✓ 1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

+ 2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

✓ 3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

± 4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

✓ 5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$

$tg\,\alpha - ?$

$\cos\alpha \neq 0.$

$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (1) \\ \sin 2\alpha\,(2\cos^2 2\beta - 1) + 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \quad (2) \end{cases}$

$(2): \cancel{2}\cos^2 2\beta \cdot \sin 2\alpha + \cancel{2}\sin 2\beta \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{4}{5}{}^{2}.$

$\cos 2\beta\,(\cos 2\beta \sin 2\alpha + \sin 2\beta \cos 2\alpha) = -\frac{2}{5}.$

Делим на 1ое ур-ние: $\frac{(2)}{(1)}$

$\cancel{\cos 2\beta =}$

$$\frac{\cos 2\beta\,\cancel{(\cos 2\beta \sin 2\alpha + \sin 2\beta \cos 2\alpha)}}{\cancel{\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta)}} = \frac{\frac{2}{\cancel{5}\,\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

подставляем в (1) : $\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\cancel{\sqrt{5}}} + \cos 2\alpha\left(\pm\frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}}\right) = -\frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}}$

$2\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha = -1.$

1) $2\sin 2\alpha = -1 - \cos 2\alpha = -1 - (2\cos^2\alpha - 1) =$

$= -2\cos^2\alpha.$

$2\sin\alpha\,\cancel{\cos\alpha} = -\cos^2\alpha$, $\cos\alpha \neq 0$ $\Rightarrow tg\,\alpha = -\frac{1}{2}.$

2) $2\sin 2\alpha = -1 + \cos 2\alpha = -1 + 1 - 2\sin^2\alpha = -2\sin^2\alpha$.

$2\sin\alpha\cos\alpha = -\sin^2\alpha \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\alpha = 0. \\ \cancel{\sin\alpha} = \operatorname{tg}\alpha = -2.\end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 0; -2$.

Ответ: $-\frac{1}{2}; 0; -2$

---

3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$x^2+18x > 0$ - т.к под логарифмом

$x^2 + 18x = t > 0$.

$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12}t} + 12^{\log_{12}t} \geq \cancel{13}\, 13^{\log_{12}t}$

$\log_{12}t = a$.

$5^a + 12^a \geq 13^a \Rightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^a + \left(\frac{12}{13}\right)^a \geq 1$.

функция слева убывает т.к основания меньше 1 $\Rightarrow$ лишь одна т. пересечения $a = 2 \Rightarrow$ при $a \leq 2$ нер-во выполняется $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}\log_{12} x^2+18x \leq 2. \\ x^2+18x > 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2+18x-144 \leq 0. \\ x(x+18) > 0\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}(x+24)(x-6) \leq 0. \\ x(x+18) > 0\end{cases} \Rightarrow x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

Ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $f(ab) = f(a) + f(b)$,

$f(p) = [\frac{p}{4}]$.

$f(\frac{x}{y}) < 0$

$1 \le x, y \le 24$

$x, y \in N$

кол-во(x, y) - ?

$f(ab) = f(a) + f(b) \Rightarrow f(a) = f(1) + f(a) \Rightarrow f(1) = 0$.

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(x^2) = 2f(x)$

$f(x^2 \cdot \frac{1}{x}) = \cancel{f(x)} = 2f(x) + f(\frac{1}{x}) \Rightarrow f(x) = -f(\frac{1}{x}) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow f(y) > 0$.

Теперь рассмотрим все значения для f на $[1; 24]$, используя $f(p) = [\frac{p}{4}]$ (подсчет „в лоб")

$f(1) = 0$	$f(17) = 4$.
$f(2) = 0$	$f(18) = 0$
$f(3) = 0$	$f(19) = 4$.
$f(4) = 0$	$f(20) = 1$
$f(5) = 1$	$f(21) = 1$.
$f(6) = 0$	$f(22) = 2$
$f(7) = 1$	$f(23) = 5$
$f(8) = 0$	$f(24) = 0$
$f(9) = 0$	
$f(10) = 1$	
$f(11) = 2$.	
$f(12) = 0$	
$f(13) = 3$	
$f(14) = 1$.	
$f(15) = 1$	
$f(16) = 0$	

а теперь, пользуясь табличкой переберем x и y:

$f(x) < f(y)$ - ~~для x, предполагая~~

1) ~~[illegible]~~ для x_0, таких что $f(x_0) = 0$ подходят все ост. y

кол-во x_0 ~~=~~ 11.

а y ~~13~~ $24 - 11 = 13$.

2) x_1 такие, что $f(x_1) = 1$. кол-во x_1 := 7

~~y~~ $\Rightarrow$ кол-во y : 6

3) x_2, $f(x_2) = 2$ - кол-во x_2 : 2, y : 4.

4) x_3, $f(x_3) = 3$ - кол-во x_3 : 1, y : 3

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

5) x_4, $f(x_4)=4$ – кол-во x_4 : 2 ; у кол-во y : 1.

Во всех пунктах перемножаем количества x и y :

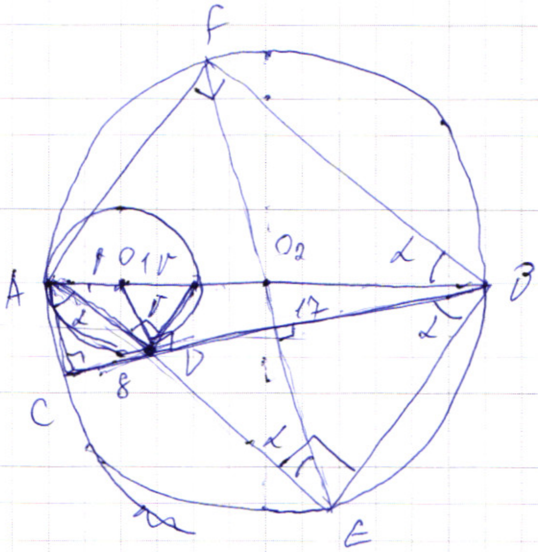
1) 143
2) 42
3) 8
4) 3
5) 2.

} складываем все значения.

$143+42+8+5=193+55=198$.

Ответ: ~~18~~ 198

4. Дано:
BC кас ω в D.
$AD \cap \Omega = E$
$EF \perp BC$
$CD=8$; $BD=17$



$R, r, \angle AEF, S_{ABF}$ – ?

Решение:

Пусть $\angle AEF = \alpha$

проведем BE и BF

т.к. $\angle AEB$ опирается на $AB \Rightarrow \angle AEB = 90° = \angle AFB =$
$= \angle ACB$

~~BD ...~~ $BD \perp O_1D$ (как касательная) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ACB \sim \triangle O_1DB$: $\frac{AC}{r} = \frac{25}{17} \Rightarrow AC = \frac{25}{17}r$:

Две т. Пифагора: $\begin{cases} 4R^2 = AC^2 + 25^2 = \left(\frac{25}{17}\right)^2 r^2 + 25^2 \,|\cdot 17^2 \\ (2R-r)^2 = 17^2 + r^2 \,|\cdot 25^2 \end{cases}$

$\begin{cases} 4 \cdot 17^2 R^2 = 25^2 r^2 + (25 \cdot 17)^2 \\ 25^2 (2R-r)^2 = (25 \cdot 17)^2 + 25^2 r^2 \end{cases}$ вычитаем одно из другого:

$25^2(2R-r)^2 = 34^2 R^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 50R - 25R = 34R \Rightarrow 16R = 25r$

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

продолжение:

4. $16R = 25r \Rightarrow r = \frac{16}{25}R.$

$4R^2 - 4Rr = 17^2$

$4R^2 - 4R\cdot\frac{16}{25}R \Rightarrow 4R^2\left(\frac{9}{25}\right) = 17^2.$

$2R\cdot\frac{3}{5} = 17.$

$R = \frac{17\cdot 5}{6} = \frac{85}{6} \Rightarrow r = \frac{16}{25}\cdot\frac{17\cdot 5}{6} =$

$= \frac{136}{15}$

Теперь ~~док~~ докажем, что $AFOE$ – прямоугольник:

$\angle ODE = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle ADO_1 = \angle O_1AD = 180^\circ - 90^\circ - 90^\circ + \alpha =$

$= \alpha \Rightarrow AO_2 = O_2E = R \Rightarrow$

$\Rightarrow AFOE$ – пр/уг.

$AC = \frac{25}{17}r = \frac{25}{17}\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{17}{3} = \frac{40}{3} \Rightarrow$ ~~$AD = \sqrt{\left(\frac{40}{3}\right)^2 + 8^2}$~~ $=$

$\angle CAD = \alpha \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{CD}{AC} = \frac{8}{\frac{40}{3}} = \frac{3}{5} \Rightarrow$ $\alpha = arctg\left(\frac{3}{5}\right)$

$\Rightarrow$ ~~$\sin\alpha = \frac{8}{\sqrt{40}}$~~ $\frac{AF}{AE} = \frac{3}{5}.$

$AD = \sqrt{\left(\frac{40}{3}\right)^2 + 8^2} = 8\sqrt{\frac{25}{9} + 1} = \frac{8}{3}\sqrt{34} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{8}{\frac{8\sqrt{34}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{34}} \Rightarrow AF = 2R\cdot\sin\alpha =$

$= \frac{85}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{85}{\sqrt{34}} \Rightarrow AE = \sqrt{FE^2 - AF^2} =$

$= \sqrt{4\cdot\left(\frac{85}{6}\right)^2 - \frac{85^2}{34}} = 85\sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{34}} = 85\sqrt{\frac{25}{9\cdot 34}} =$

$= 85\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{34}} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{AEF} = \frac{1}{2}AF\cdot AE = \frac{1}{2}\cdot 85\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{34}}\cdot\frac{85}{\sqrt{34}} =$

$= \frac{85^2\cdot 5}{6\cdot 34} = \frac{17^2\cdot 25\cdot 5}{6\cdot 34\cdot 2} = \frac{125\cdot 17}{12}$

13
125
17
875
+125
2125

$= \frac{2125}{\cancel{17}12}$

Ответ: $r = \frac{136}{25}$ $\angle AEF = \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{5}\right)$

$R = \frac{85}{6}$ $S_{AEF} = \frac{2125}{12}$

2.

$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)^2=(x-2)(y-1) \geq 0 \; (1) \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \; (2) \end{cases}$

ОДЗ: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 2 \\ y \leq 1 \end{cases} \end{array}\right.$

1е равенство:

из (2):

1) $\begin{cases} x-2y = x-2 \\ x-2y=y-1; \; y=1 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 5+2 = 7; -3$

$(7;1)$ $(-3;1)$

2) $\begin{cases} (x-2y)=1 \Rightarrow \cancel{x=2y+1} \\ (x-2y)=(x-2)(y-1)=1 \Rightarrow xy-2y-x+1=0 \end{cases}$

$x=2y+1$

$2y^2+y-2y-2y-x+x=0$

$2y^2-3y=0 \Rightarrow y=0;\ \frac{3}{2} \Rightarrow x=1;4$

~~$\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=\frac{3}{2} \end{array}\right. \Rightarrow$ из 2ого $\left[\begin{array}{l} (x-2)^2=25-9 \\ (x-2)^2=25-\frac{1}{4} \end{array}\right. \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow x=\pm 4+2$~~

подставляем в (2) $(1;0)$ — не подх.

$(4;\frac{3}{2})$ — не подх

1) $1+9 \neq 25$

2) $4+9\cdot\frac{1}{4} \neq 25$

3) $\begin{cases} (x-2y)^2=x-2 \\ y-1=1 \end{cases} \Rightarrow y=2 \Rightarrow (x-4)^2=x-2$

$x^2-8x+16-x+2=$

$=x^2-9x+18 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=6;3$

подстав. во (2): $(6;2)$; $(3;2)$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

в (2): $16+9=25 \Rightarrow (6;2)$ - подх.

$1+9\neq25 \Rightarrow (3;2)$ - не подх.

4) $\begin{cases}(x-2y)^2=(y-1)\\ x-2=1.\end{cases} \Rightarrow x=3 \Rightarrow (2y-3)^2=y-1.$

$4y^2-12y+9=y-1.$

$4y^2-13y+10=0$

$D=169-\cancel{80}^{160}=\cancel{88}\,9$

$y=\frac{13\pm3}{8}=2;\ \frac{5}{4}$

5) $\begin{cases}(x\mp2y)^2=1.\\ (x-2)(y-1)=1.\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=2y\pm1.$ - $2y+1$ уже $(3;2)$ уже было проверено. было $\Rightarrow$ $(3;\frac{5}{4})$ - не подойдет в (2)

$\Rightarrow x=2y-1$

$(2y-3)(y-1)=1.$

$2y^2-3y-2y+2=0.$

$2y^2-5y+2=0.$

$y=\frac{5\pm3}{4}=2;\ \frac{1}{2} \Rightarrow x=3;\ 0.$

оба не подойдут. $\Rightarrow$

$\Rightarrow (7;1);\ (-3;1);\ (6;2)$ - единственные корни.

Ответ: $(7;1)$
$(-3;1)$
$(6;2)$

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$tg\alpha - ?$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$2\sin 2\alpha \cos^2 2\beta \cancel{-\sin 2\alpha} + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha \cancel{+\sin 2\alpha} = -\frac{4}{5}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos^2 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{2}{5} \\ \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

$$\cos 2\beta = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha \cdot \left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$2\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha = 1$$

$$2\sin 2\alpha = 1 \pm \cos 2\alpha$$

~~2 sin 2α~~ 1) $2\sin 2\alpha = \cancel{1} + 2\cos^2\alpha \cancel{-1}$

$\cancel{2}\sin 2\alpha = \cancel{2}\cos^2\alpha$

$2\sin\alpha \cancel{\cos\alpha} = \cos^{\cancel{2}}\alpha$

$\cos\alpha \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow tg\alpha = \frac{1}{2}$

2) $2\sin 2\alpha = 1 - \cos 2\alpha = \cancel{1} \cancel{-1} + 2\sin^2\alpha =$

$= \cancel{2}\sin^2\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin^2\alpha \Rightarrow$

$\sin\alpha = 0 \Rightarrow tg\alpha = 0$

$\Rightarrow tg\alpha = 2$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

2. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$

$(x-2y)^2 = y(x-2)-(x-2)=(x-2)(y-1)\geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{cases} y\geq 1 \\ x\geq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y\leq 1 \\ x\leq 2 \end{cases}\right.$

~~$(x-2)^2+3y\ldots$~~

$(x-2)^2+3(y-1)^2-4-9=12.$

$\begin{cases} (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \\ (x-2y)^2=(x-2)(y-1) \mid \cdot 6 \end{cases}$

$\frac{(x-2)^2}{5^2}+\frac{(y-1)^2}{\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2}=1.$

$(x-2)^2+6(x-2)(y-1)+9(y-1)^2=25+(x-2y)^2$

$(x-2+y-1)^2=25+(x-2y)^2$

$25=(x+y-3)^2-(x-2y)^2=(3y-3)(2x-y-3)$

$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2 \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-2y)^2=(y-1)(x-2) \\ (x-2)^2+(3y-3)^2-4-9=12. \end{cases}$

$\begin{cases} (x-2y)^2=(y-1)(x-2) \mid \cdot 6 \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25. \end{cases}$

$(x-2y)^2+(x-2-3y+3)^2=25.$

$(x-2y)^2+(x-3y+1)^2=25.$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{AD}{AE} = \frac{r}{R}$

$DE \cdot AD = 17 \cdot 8$

$(2R - 2r) 2R = 17^2$

$AD = \frac{r}{R} AE$

$DE \cdot AE \frac{r}{R} = 17 \cdot 8$

$\angle OAD = \beta = \angle ADO_1 = \angle NDO \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADO = 90^\circ - 2\beta$

$\angle AOE = 90^\circ - \beta$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DOE = 90^\circ - \beta - 90^\circ + 2\beta = \beta$

$\angle KEB = 90^\circ - \alpha \Rightarrow$

$90^\circ - \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow$ A EOL прямоугольник $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ FE проходит через центр O_2.

$(2R - r)^2 = r^2 + 17^2$

$\frac{25^2}{17^2} r^2 + 25^2 = 4R^2$

$\begin{cases} 4R^2 - 4Rr + r^2 = r^2 + 17^2 \\ \left(\frac{25}{17}\right)^2 r^2 + 25^2 = 4R^2 \end{cases} \Rightarrow$

$4R(R - r) = 17^2 \cdot 25^2$

$\left(2R - \frac{25}{17} r\right)\left(2R + \frac{25}{17} r\right) = 25^2/17^2$

$(34R - 25r)(34R + 25) = \cancel{2R} - 50^2(R - r) = 0.$

$\frac{AC}{r} = \frac{2R}{2R - r}$

$\begin{cases} (2R - r)^2 = r^2 + 17^2 \\ AC^2 + 25^2 = 4R^2 \end{cases}$

$\frac{4R^2 r^2}{(2R - r)^2} + 25^2$

$(x - 2 + 3y - 3)^2 = 25 + 6(x - 2y)^2$

$(x + 3y - 5)^2 = 25 + 6(x - 2y)^2$

$(5y - 5)(2x + y - 5) = 25$

$\begin{cases} (y - 1)(2x + y - 5) = 5 \\ (y - 1)(x - 2) = (x - 2y)^2 \end{cases}$

$2xy + y^2 - 5y - 2x - y = 0.$

$y^2 - 6y + 2x(y - 1) = 0.$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{r}{AC} = \frac{17}{25}$.

$4R^2 = 25^2 + \frac{25^2}{17^2} r^2 \quad | \, 17^2$

$(2R - r)^2 = 17^2 + r^2 \quad | \, 25^2$

$$\begin{cases} 34^2 R^2 = (25 \cdot 17)^2 + 25^2 r^2 \\ 25^2 (2R - r)^2 = (17 \cdot 25)^2 + 25^2 r^2 \end{cases}$$

$25^2 (2R - r)^2 = 34^2 R^2$

$25(2R - r) = 34R$.

$16R = 25r$.

$R = \frac{25}{16} r$.

$4R^2 - 4Rr = 17^2$.

$4R^2 - 4R \cdot \frac{16}{25} R = 17^2$

$4R^2 \left(\frac{9}{25} \right) = 17^2$

$\cancel{x^2 + 4y^2 + xy = xy - x - 2y + 2}$

$(x + 3y)^2 - 4x - 18y - 6xy = 12$.

$\cancel{(x-2y)^2}$

~~$x =$~~

$x - 2y = x - 2$

$y = 1 \Rightarrow$

$x = 7$.

$$\begin{cases} (x - 2y)^2 = (x-2)(y-1) \\ (x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25 \end{cases}$$

$25 \geq (x-2)^2$

$-5 \leq x - 2 \leq 5$

$-3 \leq x \leq 7$

$-\frac{5}{3} \leq (y - 1) \leq \frac{5}{3}$

$-\frac{2}{3} \leq y \leq \frac{8}{3}$

~~$x - 2y =$~~ $x = 3$.

$y - 1 = (2y - 1)^2$.

$9(y-1)^2 = \cancel{25}\, 24$

$(x - 2y)^2 = 1$. $\quad x - 2y = \pm 1$.

$x = 2y \pm 1$.

$(x-2)(y-1) = 1$.

1) $(2y - 1)(y - 1) = 1$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$12^{\log_{12}5 \cdot \log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$

$x^2+18x > 0.$

$(x^2+18x)^{\log_{12}5} + \underbrace{x^2+18x}_{t>0} \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}5} + t \geq t^{\log_{12}13}$

$\cancel{1 + t^{\log_{12}5-1}} \geq t^{\log_{12}13-1}$

$t^{\log_{12}\frac{5}{13}} + t^{\log_{12}\frac{12}{13}} \geq 1.$

$\log_{12}\frac{5}{13} = \frac{1}{2}\log_{12}\left(1-\left(\frac{12}{13}\right)^2\right) =$

$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1 \quad = \frac{1}{2}\left(\log_{12}\frac{1}{13}\cdot\frac{25}{13}\right)$

$t^{\log_{12}5} + t^{\log_{12}12} \geq t^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12}t} + 12^{\log_{12}t} \geq 13^{\log_{12}t}$ $\quad \log_{12}t = a$

$\underbrace{\left(\frac{5}{13}\right)^a + \left(\frac{12}{13}\right)^a \geq 1.}_{\text{уб.}}$

уб. $a = 2 \Rightarrow a \leq 2$ выполн.

$\log_{12}(x^2+18x) \leq 2.$

$0 \leq x^2+18x \leq 144.$

$x^2+18x-144 \leq 0$

$18 \cdot 18 = 324$

$D = 324 + 144\cdot4 =$

$= 324 + 576 = 900$

$x = \frac{-18 \pm 30}{2} = -24;\ 6$

$-24 \leq x \leq 6$

$x \in [-\infty; -18] \cup (0; +\infty)$

Отв: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

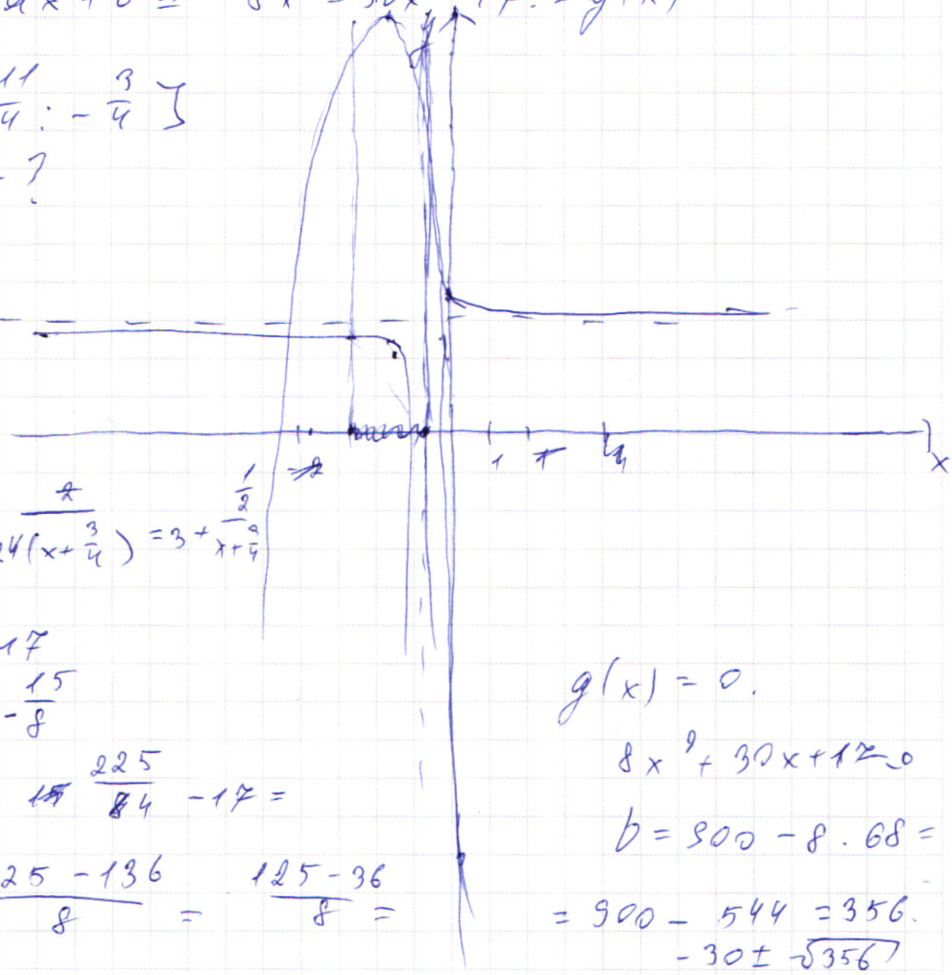
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

6. $f(x)=\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17 = g(x)$

$x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$

(a,b) - ?



$f(x)=\frac{12x+11}{4x+3}=$

$=\frac{12x+9+2}{4x+3}=$

$=3+\frac{2}{4x+3}=3+\frac{2}{24(x+\frac{3}{4})}=3+\frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{3}{4}}$

$g(x)=-8x^2-30x-17$

$x_b=\frac{30}{-16}=-\frac{15}{8}$

$g_b=-8\cdot\frac{225}{64\cdot8}+\frac{225}{8\cdot4}-17=$

$=\frac{225}{8}-17=\frac{225-136}{8}=\frac{125-36}{8}=$

$=\frac{89}{8}$

$g(x)=0.$

$8x^2+30x+17=0$

$D=900-8\cdot68=$

$=900-544=356.$

$x=\frac{-30\pm\sqrt{356}}{16}$

крайние: $a\to\infty$; $b=-\frac{11}{4}$. $\frac{y-b}{a}=-\frac{11}{4}$

---

5. $f(ab)=f(a)+f(b)$, $a,b\in\mathbb{Q}^+$

$f(p)=[\frac{p}{4}]$

$1\le x\le 24$; $1\le y\le 24$. $x,y\in\mathbb{N}$

$f(\frac{x}{y})<0$ $(x;y)>0$.

$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})<0.$

$f(p)=f(1)+f(p)=$

$\Rightarrow f(1)=0.$

$f(p)=[\frac{p}{4}]$

$\cancel{f(p)}=f(-1)+f(-p)=f(-1)+[\frac{-p}{4}]$

$f(1)=f(-1)+f(-1)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0.$

$f(1) = 0.$

$x = 1. \Rightarrow f(1) = 0. \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right) < 0.$

$24 \geq x, y \geq 1$

$f(x) = f(x^2) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$\cancel{f(x)} = \cancel{f(x)} + f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(x^2) = 2f(x)$

$f(x^3) = 3f(x)$ $f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(y) > f(x)$

$x = 1 \Rightarrow f(y) > 0.$

y - простое, ~~б~~ больше 4.

если $x - 0$.

$y - 1, 2, 3, 4$

$x - 1$

$y - 2, 3, 4.$

и т.д

$\cancel{f(4)}$ $f(3) = 0.$

$f(4) = 2f(2) = 0.$

$f(5) = 1.$

$f(6) = 0.$

$f(7) = 1.$

$f(8) = 0.$

$f(9) = 0.$

$f(10) = 1.$

$f(11) = \cancel{1}2.$

$f(12) = 0$

$f(13) = 3.$

$f(14) = 1.$

$f(15) = 1.$

$f(16) = 0$

$f(17) = 4.$

$f(18) = 2f(3) + f(2) = 0$

$f(19) = 4.$

$f(20) = 1.$

$f(21) = 1.$

$f(22) = 2.$

$f(23) = 5$

$f(24) = 0$

$(x - 2 + 3y - 3)^2 = 25 + 6(x - 2y)^2$

$x = 2y.$

$(x-2)(y-1) = 0.$

$x = 2.$

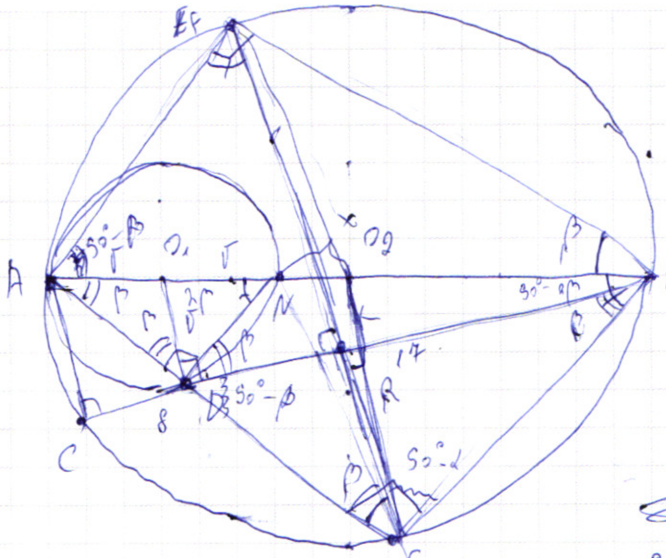
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

4.



$\angle AEF - ?$

$S_{AEF};\ r, R - ?$

$CD = 8$

$BD = 17$

$AO \cdot ON = BD^2 = 17^2$

$\cancel{O_2N = x}$

$\cancel{2R(R+x) = 17^2}$

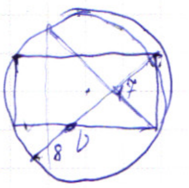
$\frac{DE}{DO} = \frac{CD}{AD}$

$\frac{DE}{17} \quad DE \cdot AD = 17 \cdot 8$

$\cancel{r^2 + (r+x+R) = 17^2}$

$\triangle ADN \sim \triangle AEO$

$DE^2 + OE^2 = 17^2$



$(r + x + R)^2 = r^2 + 17^2$

$\cancel{3r^2 + r^2 = 4R^2}$

$$\begin{cases} r^2 + x^2 + R^2 + 2rx + 2rR + 2xR = \\ = r^2 + 17^2 \\ 2R^2 + 2Rx = 17^2 \end{cases}$$

$x^2 - R^2 + 2rR = 0$

$\cancel{x^2}\ x^2 - r^2$

из сек. OA $\begin{cases} (2R - r)^2 = r^2 + 17^2 \\ 2R(2R - 2r) = 17^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} 4R^2 - 4Rr + r^2 = r^2 + 17 \\ 4R^2 - 4Rr = 17^2 \end{cases}$$

$\cancel{\beta = \alpha}$

$\frac{AD}{DE} = \frac{CD}{DA}$

$$\begin{cases} (2R - r)^2 \cancel{+ r^2} = r^2 + 17^2 \\ AC^2 + 25^2 = 2R^2 \end{cases}$$

$\frac{NO}{DO} = \frac{DO}{AO} \qquad \frac{AC}{r} = \frac{25}{17}$

$\angle ADO \sim \angle DNO \Rightarrow$

$\frac{AD}{AE} = \frac{AN}{AO} = \frac{r}{R}$

$\cancel{AD = \frac{r}{R} AE}$ $\quad AE = AD + DE$

$AD = \frac{r}{R} AD + \frac{r}{R} DE$

$AD\left(1 - \frac{r}{R}\right) = DE \frac{r}{R}$

$\Rightarrow$

$AD = \frac{r}{R} \cdot \frac{R}{R - r} \cdot DE = \frac{r}{R - r} DE \Rightarrow$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)