МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ и $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$; $tg\alpha = ?$

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

1) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\sin 2\beta \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = -2\beta+2\pi n \\ 2\alpha+2\beta = \pi+2\beta+2\pi n \end{array}\right.$ $n\in Z$

$\left[\begin{array}{l} \alpha = -2\beta+\cancel{2}\pi n \\ \alpha = \frac{\pi}{2}+\pi n \quad (tg\alpha = \varnothing) \end{array}\right.$ $n\in Z$

2) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\beta \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = 2\beta+2\pi k \\ 2\alpha+2\beta = \pi-2\beta+2\pi k \end{array}\right.$ $k\in Z$

$\left[\begin{array}{l} \alpha = \pi k \\ \alpha = \frac{\pi}{2}-2\beta+\cancel{2}\pi k \end{array}\right.$ $k\in Z$ Видим, что для α возможны 4 ~~спиральные~~ серии решений, для трёх из них тангенс определён $\Rightarrow$ это и есть возможные значения $tg\alpha$.

а) $\left[\begin{array}{l} tg\alpha = tg(-2\beta+\cancel{2}\pi n) \quad n\in Z \\ \sin 2\beta = +\frac{1}{\sqrt5}; \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \end{array}\right. \Rightarrow tg\alpha = -tg(2\beta) = -\frac{1}{2}$

б) $\left[\begin{array}{l} tg\alpha = tg(\pi k) \quad k\in Z \\ \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}; \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \end{array}\right. \Rightarrow tg\alpha = 0$

в) $\left[\begin{array}{l} tg\alpha = tg(\frac{\pi}{2}-2\beta+\pi k) \quad k\in Z \\ \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}; \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \end{array}\right. \Rightarrow tg\alpha = ctg\, 2\beta = -2$

Ответ: $-2; -\frac{1}{2}; 0$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Замена $x-2=v$; $y-1=u$, тогда $x-2y=v-2u$

$$\begin{cases} v-2u=\sqrt{vu} \\ v^2+9u^2=25 \end{cases} \qquad \begin{cases} v^2-4vu+4u^2=vu \\ v-2u\geq 0 \\ v^2+9u^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (v-4u)(v-u)=0 \\ v-2u\geq 0 \\ v^2+9u^2=25 \end{cases}$$

1) $v=4u \Rightarrow u\geq 0$ и $25u^2=25 \Rightarrow u=1$; $v=4$

2) $v=u \Rightarrow u\leq 0$ и $10u^2=25 \Rightarrow u=v=-\sqrt{\frac{5}{2}}$

Тогда:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y-1=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y=1-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(6;2)$ и $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

Т.к. $x^2+18x>0$, то $|x^2+18x|>0$ и $|x^2+18x|^{\log_{12}13} =$
$= 13^{\log_{12}(x^2+18x)}$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 + 18x \geq 13^{\log_{12}(x^2+18x)}$

$x^2+18x = (x^2+18x)^{\log_{12}12} = 12^{\log_{12}(x^2+18x)}$

Замена $t = \log_{12}(x^2+18x)$

$5^t + 12^t \geq 13^t$ или $5^t+12^t-13^t \geq 0$

Обозначим $f(t) = 5^t+12^t-13^t$

$(f(t))' = e^t(\ln 5 + \ln 12 - \ln 13) = e^t \cdot \ln\frac{5\cdot 12}{13}$

Т.к. $\frac{5\cdot12}{13} > e$, то $f(t)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой

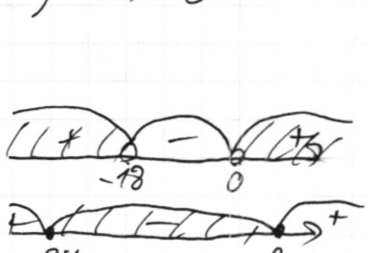
Легко убедиться, что при $t=2$

$5^2+12^2-13^2=0 \Rightarrow$ ~~при $t>2$; $f(t)>0$ и при $t\leq 2$; $f(t)<0$~~

при $t>2$ $f(t)<0$ и при $t\leq 2$ $f(t)\geq 0$

$\log_{12}(x^2+18x) \leq 2$

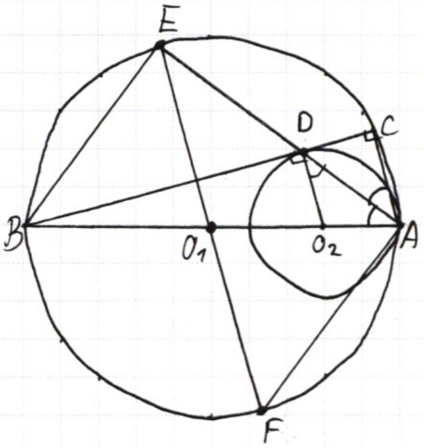
$\begin{cases} x^2+18x>0 \\ x^2+18x \leq 144 \end{cases}$ $\begin{cases} x(x+18)>0 \\ (x-6)(x+24)\leq 0 \end{cases}$



$\Rightarrow x \in [-24;-18)\cup(0;6]$

Ответ: $[-24;-18)\cup(0;6]$

№4



$CD=8$

$BD=17$

$R_\Omega, r_\omega=?$

$\angle AFE=?$

$S_{AEF}=?$

Т.к. AB диаметр Ω, а C лежит на Ω, то $\angle BCA=90°$. Пусть O_1 – центр Ω и O_2 – центр ω. Т.к. BC касается ω, то $O_2D \perp BC$ и $\angle BDO_2=90°=\angle BCA$.

Тогда $\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ по 2 углам ($\angle DBO_2=\angle CBA$ и общий) $\Rightarrow \frac{BD}{BO_2}=\frac{BC}{BA}$; $BO_2=2R_\Omega-r_\omega$; $BA=2R_\Omega$

$\frac{17}{2R_\Omega-r_\omega}=\frac{8+17}{2R_\Omega} \Rightarrow 34R_\Omega=50R_\Omega-25r_\omega \Rightarrow 25r_\omega=16R_\Omega$

Т.к. $\triangle BDO_2$ прямоугольный, а $DO_2=r_\omega$, то:

$(2R_\Omega-r_\omega)^2=r_\omega^2+289$

$\left(\frac{50}{16}-1\right)^2 r_\omega^2=r_\omega^2+289$

$r_\omega^2\left(\left(\frac{34}{16}\right)^2-1\right)=289 \Rightarrow r_\omega^2\cdot\left(\frac{34}{16}-1\right)\left(\frac{34}{16}+1\right)=289$

$r_\omega^2\cdot\frac{18\cdot 50}{16^2}=17^2 \Rightarrow r_\omega=\frac{17\cdot 16}{30}=\frac{136}{15}$

$R_\Omega=\frac{25}{16}r_\omega=\frac{17\cdot 5}{6}=\frac{85}{6}$

Т.к. $O_2A=O_2D=r_\omega$, то $\triangle O_2AD$ равнобедренный и $\angle O_2AD=\angle O_2DA$. Т.к. $O_2D\perp BC$ и $AC\perp BC$, то $O_2D \parallel AC$ и $\angle O_2DA=\angle DAC \Rightarrow \angle O_2AD=\angle DAC$ и AD – биссектриса в $\triangle ABC \Rightarrow \frac{AB}{BD}=\frac{AC}{CD}$

$\frac{2R_\Omega}{17}=\frac{AC}{8} \Rightarrow AC=\frac{16R_\Omega}{17}=\frac{40}{3}$

$tg\angle DAC=\frac{DC}{AC}=\frac{8}{40/3}=\frac{3}{5} \Rightarrow \angle BAD=\angle DAC=arctg\frac{3}{5}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Т.к. E лежит на Ω, то $\angle BEA = 90^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle EBA = 90^\circ - \operatorname{arctg}\frac{3}{5}$. $\angle EFA = \angle EBA$ т.к. опираются на одну дугу $\Rightarrow \angle AFE = 90^\circ - \operatorname{arctg}\frac{3}{5} = \operatorname{arcctg}\frac{3}{5}$
Т.к. F лежит на Ω и $EF \perp BC$, а BC - хорда в Ω, то EF проходит через O_1 и $EF = 2R_\Omega = \frac{85}{3}$ и $\angle AEF = 90^\circ$

$\operatorname{arcctg}\frac{3}{5} = \arcsin\frac{5}{\sqrt{3^2+5^2}} = \arcsin\frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow \sin\angle EFA = \frac{5}{\sqrt{34}}$,
$\cos\angle EFA = \sqrt{1-\sin^2\angle EFA} = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$S_{AEF} = \frac{1}{2} AF \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot EF^2 \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{85^2}{3^{\cancel{2}}} \cdot \frac{5 \cdot \cancel{3}}{2 \cdot 34} =$
$= \frac{17^{\cancel{2}} \cdot 5^3}{3 \cdot 2^2 \cdot \cancel{17}} = \frac{17 \cdot 125}{12} = \frac{2125}{12}$

Ответ: $R_\Omega = \frac{85}{6}$; $r_\omega = \frac{136}{15}$; $\angle AFE = \operatorname{arcctg}\frac{3}{5}$; $S_{AEF} = \frac{2125}{12}$

№5
Т.к. $f(ab) = f(a) + f(b)$ для всех положительных рациональных чисел, то это справедливо и для $(1; a)$
$f(1 \cdot a) = f(1) + f(a) \Rightarrow f(1) = 0$
и для $(x; \frac{1}{x})$
$f(x \cdot \frac{1}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x}) = 0 \Rightarrow f(x) = -f(\frac{1}{x})$
Это значит, что если при $x = c_0$; $y = d_0$ условие $f(\frac{x}{y}) < 0$ выполняется, то при $x = d_0$, $y = c_0$ это условие не выполняется.

При этом для ~~так~~ $\frac{x}{y} = 1; 2; 3; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}$ ~~условии~~ $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$ $\left(\left[\frac{2}{4}\right] = \left[\frac{3}{4}\right] = 0;\ f(1) = 0 \right)$ и условие $f\left(\frac{x}{y}\right) < 1$ не выполняется т.к. ~~если f(x)~~ $f(2) = 0$, то и $f(1/2) = 0$ и $f(3) = 0$, то $f(1/3) = 0$. Это значит что число пар, удовлетворяющих условию равно половине разности всех пар и суммы таких пар для которых $\frac{x}{y} = 1; 2; \frac{1}{2}; 3; \frac{1}{3}$

Т.е. $\frac{24^2 - 24 - 16 - 8 - 16 - 8}{2} = 252$

Ответ: 252 пары

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3 + \frac{2}{4x+3} = ax+b$

$ax + b - 3 = \frac{2}{4x+3}$

$4ax^2 + 3ax + 4bx + 3b - 12x - 9 - 2 = 0$

$4ax^2 + x(3a + 4b - 12) + 3b - 9 - 2 = 0$

$D = (3a + 4b - 12)^2 - 16a(3b - 9 - 2) \leq 0$

$9a^2 + 24ab - 72a + 16b^2 - 96b + 144 - 48ab + 144a + 32a$

$9a^2 - 24ab + 16b^2 - 96b + 144$

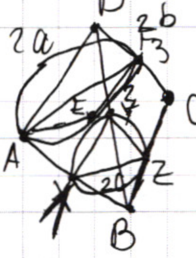
$ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17$

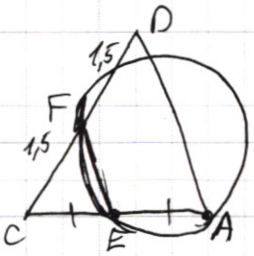
$8x^2 + (30+a)x + b + 17 \leq 0$

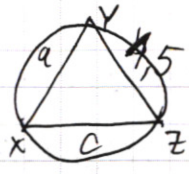
$D = 900 + 60a + a^2 - 32b - 544 =$

$= a^2 + 60a - 32b + 356 \leq 0$

$\times\, 32$
17
224
32
544
356







☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

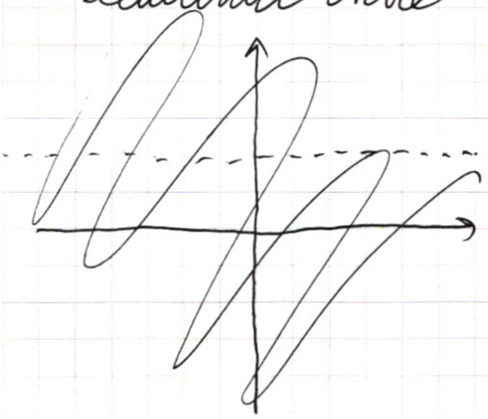
№6

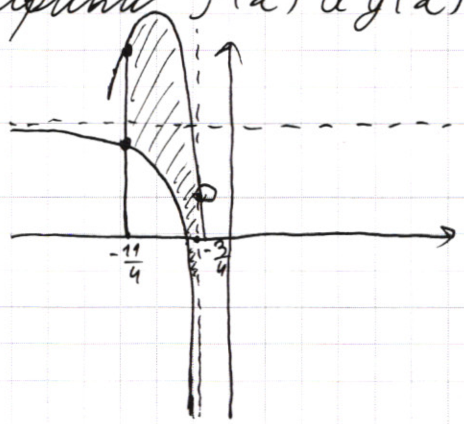
$$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17 \quad ; \quad x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$$

Пусть $f(x) = \frac{12x+11}{4x+3}$ (или $3 + \frac{1}{2x+\frac{3}{2}}$) и $g(x) = -8x^2-30x-17$.

$f\left(-\frac{11}{4}\right) = +\frac{11}{4}$; $g\left(-\frac{11}{4}\right) = 5$; $g\left(-\frac{3}{4}\right) = 1$

Схематичные графики $f(x)$ и $g(x)$:





Это значит, что прямая должна лежать в заштрихованной области и не проходить при $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$ вне её. Т.к. в условии просят найти все пары чисел $(a;b)$, а в общем виде каждому значению a соответствует множество значений b, то задача имеет смысл лишь если одному a соответствует $1b$. Необходимым для выполнения условия задачи условием является отсутствие пересечения графиков $f(x)$ и $g(x)$ при заданных x (касание разрешено). Самая „высоколежащая" прямая проходит через точки $\left(-\frac{11}{4}; 5\right)$ и $\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$ (~~точки~~ значения $g(x)$ на границах)

$$\begin{cases} a \cdot \left(-\frac{11}{4}\right) + b = 5 \\ a \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = -2 \\ b = -\frac{1}{2} \end{matrix} \quad \text{т.е. } -2x - \frac{1}{2}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Эта прямая может пересекать график $f(x)$, касаться или не пересекать.
В первом случае решений не будет (если самая „высоколежащая" прямая имеет пересечения, то есть область, где эта прямая лежит ниже $f(x) \Rightarrow$ остальные прямые тоже будут лежать ниже); ~~если~~ во втором случае решение будет только одно, а в третьем бесконечность

$-2x - \frac{1}{2} = 3 + \frac{2}{4x+3}$

$-\frac{2}{4x+3} = \frac{4x+7}{2} \Rightarrow 16x^2 + 40x + 21 = -4$

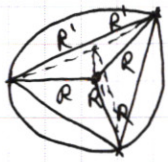
$(4x+5)^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{4}$; графики касаются и пара $(2; -\frac{1}{2})$ — единственное решение.

Ответ: $(2; -\frac{1}{2})$

№7

Допустим, что я нашёл BC. Сфера имеет наименьший радиус если BCD (плоскость) проходит через центр сферы.

$$S_{BCD} = \sqrt{\frac{BC+2+3}{2}\left(\frac{BC+2+3}{2} - BC\right)\left(\frac{BC+2+3}{2} - 2\right) \cdot \left(\frac{BC+2+3}{2} - 3\right)}$$



$(R' > R$ т.к.

$R' = \sqrt{R^2 + h^2}$

$$R = \frac{4 S_{BCD}}{2 \cdot 3 \cdot BC} = \frac{2 \cdot \sqrt{\left(\frac{BC+5}{2}\right)\left(\frac{5-BC}{2}\right)\left(\frac{BC+1}{2}\right)\left(\frac{BC-1}{2}\right)}}{3 \cdot BC} =$$

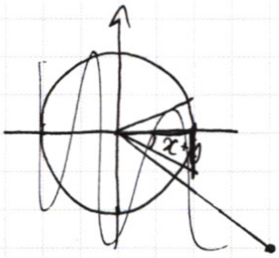
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin x\cos y + \cos x \sin y = -\frac{1}{\sqrt5} \quad |^2 \\ 2\sin x\cos^2 y + 2\cos x\sin^2 y + \cos x = -\frac{4}{5} \end{cases} \qquad \sin^2 x\cos^2 y + 2\sin x\cos y\cos x\sin y + \cos^2 x\sin^2 y = \frac{1}{5}$$

$\sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(x+2y) + \sin x = -\frac{4}{5}$

$$\cos x = \frac{-\frac{1}{\sqrt5} - \sin x\cos y}{\sin y} = \frac{-\frac{4}{5} - 2\sin x\cos^2 y}{1 - 2\sin^2 y}$$



$\beta = 2\beta$

$\alpha = 2\alpha + 2\beta$

$\sin(x) + \sin y)$

$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) =$

$= \sin\alpha\cos\beta + \cancel{\cos\alpha\sin\beta} + \sin\alpha\cos\beta - \cancel{\cos\alpha\sin\beta} =$

$= 2\sin\alpha\cos\beta = 2\sin(x+y)\cos y = -\frac{4}{5}$

$$\begin{cases} \sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(x+y)\cos y = -\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \cos y = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow 2\beta = \pm\arccos\frac{2}{\sqrt5} + 2\pi n$$

$\sin y = \frac{1}{\sqrt5}$

1) $\sin x\cos y + \cos x\sin y = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{2}{\sqrt5}\sin x + \frac{1}{\sqrt5}\cos x = -\frac{1}{\sqrt5} \quad |\cdot\sqrt5$

$2\sin x + \cos x = -1$

$\sin(x+y) = \pm\sin(y)$

1) $\sin(x+y) = \sin y$, то $\left[\begin{array}{l} x+y = y + 2\pi m \\ x+y = \pi - y + 2\pi m \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi m \\ x = \pi - 2y + 2\pi m \end{array}\right.$

2) $\sin(x+y) = -\sin y$, то $\left[\begin{array}{l} x+y = -y + 2\pi m \\ x+y = \pi + y + 2\pi m \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} x = -2y + 2\pi m \\ x = \pi + 2\pi m \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \pi k \Rightarrow tg y = 0 \\ x = -2y + \pi k \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi k}{2} \\ \alpha = -y + \frac{\pi k}{2} \end{array}\right.$

$f(t) = t^{\log_{12}5} + t \geq t^{\log_{12}13} = g(t)$

$t^{\log_{12}13} = t^{\log_{12}\frac{13}{5} + \log_{12}5} = t^{\log_{12}5} \cdot \log t^{\log_{12}\frac{13}{5}}$

$\begin{array}{r} \times\,144 \\ 12 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1728 \\ +\,225 \\ \hline 1953 \end{array}$ $\begin{array}{r} \times\,169 \\ 13 \\ \hline 507 \\ 169 \\ \hline 2197 \end{array}$ $\begin{array}{r} \times\,17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \end{array}$

$5^{\log_{12}t} + 12^{\log_{12}t} \geq 13^{\log_{12}t}$

$5^v + 12^v \geq 13^v$

$125 +$

$(x+9)^2 = 144 + 81$

$x = 6;$

$x^2 + 18x - 144$

$v \leq 2 \Rightarrow \log_{12}(x^2+18x) \leq 2$

$\begin{array}{r} \times\,25 \\ 9 \\ \hline 225 \end{array}$

$0 < x^2 + 18x \leq 144$

$\begin{cases} x(x+18) > 0 \\ (x-6)(x+24) \leq 0 \end{cases}$

$(+)\ -18\ (-)\ 0\ (+)$

$-24 \qquad 6$

$\Rightarrow [-24; -18) \cup (0; 6]$

$(5^v + 12^v - 13^v)' \ominus \geq 0$

$(e^x)' = e^x \Rightarrow ((2e)^x)' = (2^x \cdot e^x)' = (2^x)' \cdot e^x + 2^x \cdot e^x$

2^x

$e^x \cdot \ln a \qquad (a^x)' = e^x \ln a$

$\ominus\ e^x(\ln 5 + \ln 12 - \ln 13) \geq 0$

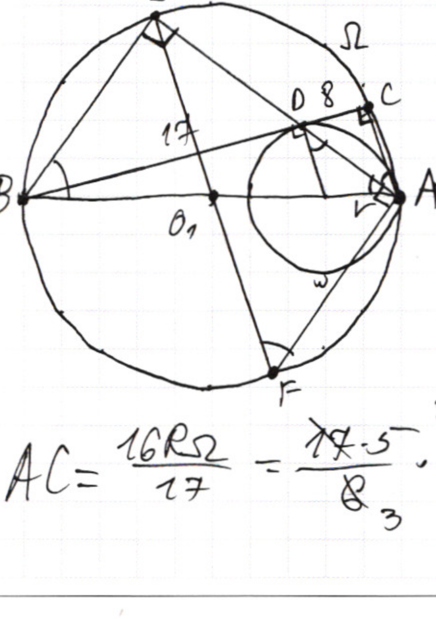
$\ln \frac{5 \cdot 12}{13} \cdot e^x \geq 0$

$r = \sqrt{\dfrac{\left(\frac{34}{16} - 1\right)\left(\frac{34}{16} + 1\right)}{289}} =$

$= \dfrac{\sqrt{18 \cdot 50}}{16 \cdot 17} = \dfrac{\sqrt{25 \cdot 9 \cdot 4}}{16 \cdot 17} =$

$= \cancel{\frac{225}{68}}\ \dfrac{30}{16 \cdot 17} =$

$= \dfrac{15}{8 \cdot 17}$



$\dfrac{2R}{25} = \dfrac{2R - r}{17}$

$34R = 50R - 25r$

$16R = 25r$

$R = \frac{25}{16} r \Rightarrow 2R - r = \frac{34}{16} r$

$\begin{array}{r} \times\,17 \\ 5 \\ \hline 35 \\ 5 \\ \hline 85 \end{array}$

$17^2 + r^2 = (2R - r)^2$

$17^2 + r^2 = \left(\frac{34}{16}\right)^2 r^2$

$\begin{array}{r} \times\,17 \\ 8 \\ \hline 136 \end{array}$

$AC = \dfrac{16R\Omega}{17} = \dfrac{17 \cdot 5}{8} \cdot \dfrac{16}{17} = \dfrac{40}{3}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$46 | 16$

$3 + \frac{2}{4x+3} \le ax + b \le -8x^2 - 30x - 17$

$= 3 + \frac{1}{2x + \frac{3}{2}}$

$8x^2 + 30x + 17 = \left(x - \frac{-30+16}{16}\right)\left(x - \frac{-30-16}{16}\right) =$

$\frac{30}{16} = \frac{15}{8}$

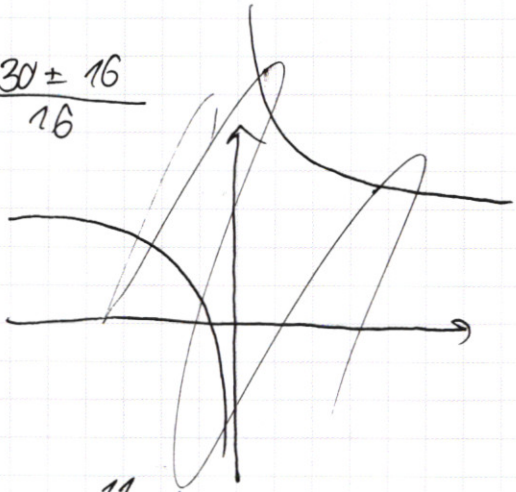
$D = 900 - 32 \cdot 17$

$= \left(x + \frac{7}{8}\right)\left(x + \frac{23}{8}\right)$

$32 \times 17 = 224 + 32 = 544$

$900 - 544 = 356 | 16$

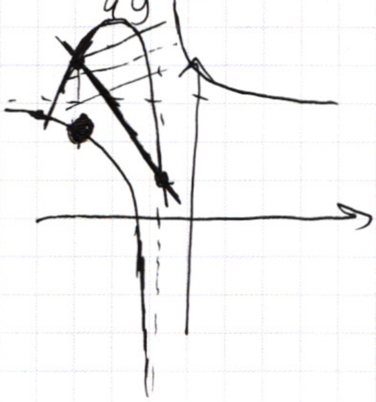
$x = \frac{-30 \pm 16}{16}$



$8 \cdot \frac{49}{8} - \frac{30 \cdot 7}{8} + 17$

$-210 \quad 7 \cdot 30 - 7 \cdot 7 =$

$49 =$



$\frac{12 \cdot \frac{-11}{4} + 17}{-11+3} = +\frac{22}{8} = +\frac{11}{4}$

$-8 \cdot \frac{11^2}{4^2} + 30 \cdot \frac{11}{4} - 17 =$

$= -\frac{121}{2} + \frac{165}{2} - 17 = 5$

$165 - 121 = 44 | 2$ $\quad 45 - 9 = 36 | 2 = 18$

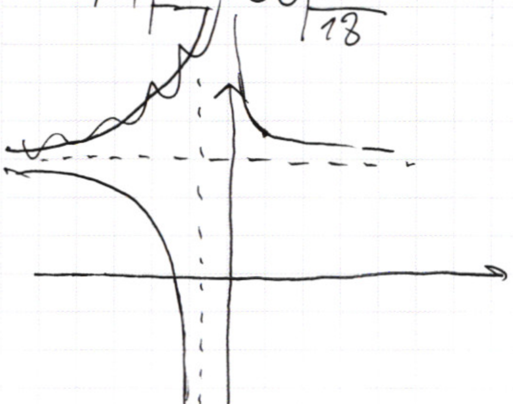
$-8 \cdot \frac{3^2}{4^2} + 30 \cdot \frac{3}{4} - 17 = -\frac{9}{2} + \frac{45}{2} - 17$

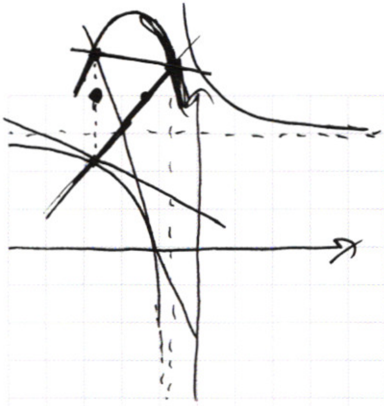
$x = 1$

$x = -1$

$3 + \frac{2}{-11+3} =$

$= 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$





$3 + \frac{2}{4x+3}$

$x = -\frac{5}{4}$

$3 - \frac{2}{-2}$

$x = 0$

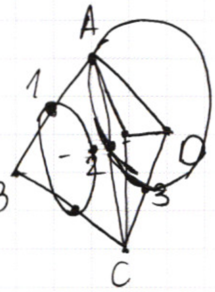
$3 + \frac{2}{3}$

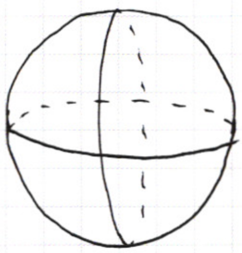
$-8 \cdot \frac{11^2}{4^2} + \frac{11 \cdot 30}{4} - 17 = -\frac{121}{2} + \frac{165}{2} = 5$

$-8 \cdot$

$\times\begin{array}{r} 24 \\ 24 \end{array}$ 96 48 576 $-$ 24 552 $-$ 48 504/2

$+\begin{array}{r} 32 \\ 16 \end{array}$ 48





$3 + \frac{2}{4x+3} \leq ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17$

$\begin{cases} a \cdot -\frac{11}{4} + b = 5 \\ a \cdot -\frac{3}{4} + b = 1 \end{cases}$

$-\frac{11}{4}a + \frac{3}{4}a = 4$

$-2a = 4 \Rightarrow a = -2$

$b = -\frac{1}{2}$

$-2x - \frac{1}{2} = 3 + \frac{2}{4x+3}$

$2x + \frac{7}{2} + \frac{2}{4x+3} = 0$

$\frac{4x+7}{2} = -\frac{2}{4x+3}$

$16x^2 + 40x + 21 = -4$

$16x^2 + 40x + 25 = 0$

$(4x+5)^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad 2\alpha=x$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$ $\quad 2\beta=y$

$\sin(x+y)=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(x+2y)+\sin x=-\frac{4}{5}$

$\sin x\cos y+\cos x\sin y=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin x(2\cos^2 y-\cancel{1})+\cos x(1-2\sin^2 y)+\cancel{\sin x}=-\frac{4}{5}$

$\begin{cases}\sin x\cos y+\cos x\sin y=-\frac{1}{\sqrt{5}}\\ 2\cos^2 y\sin x+\cos x-2\sin^2 y\cos x=-\frac{4}{5}\end{cases}$

$\times\begin{array}{r}125\\17\\\hline 875\\125\\\hline 2125\end{array}$

$\begin{cases}x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}\\ (x-2)^2+(3y-3)^2=12+4+9=25\end{cases}$

$x^2-4yx+4y^2=xy-x-2y+2$

$x^2-5yx+4y^2+x+2y-2=0$

$(\frac{x}{2}-5y)^2=$

$x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)}$, $\quad x-2=t$, $\quad y-1=v$

$t^2-5tv+4v^2=0$

$D=25v^2-16v^2=9v^2$

$x-2y=t-2v=\cancel{x-2-2y+2}$

$\begin{cases}t-2v=\sqrt{tv}\ \ |^2\\ t^2+9v^2=5^2\end{cases}$ $\quad t^2-4tv+4v^2=tv$ $\quad t=\frac{5v\pm 3v}{2}=v;4v$

$10v^2=25\Rightarrow v^2=2{,}5=\pm\frac{5}{\sqrt{10}}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ или $v=\pm 1$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

$t=x^2+18x$

$5^{\log_{12}t}+t \geq |t|^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}5}+t \geq t^{\log_{12}13}$

$\cancel{12^{\log_{12}t}}$

t

$3^{\log_9 27}=27^{\log_9 3}$

$3^{\frac{3}{2}} = 27^{\frac{1}{2}}$

$t^{\log_{12}5}+t \geq t^{\log_{12}13}$

$\times 24$
24
96
48
-576
54
$522 | 2 = \underline{261}$

$\frac{25}{2}$ $=13{,}5$ $=10$

$\cancel{f(a^2)=2f(a)}$

$f(1\cdot b)=f(1)+f(b) \Rightarrow f(1)=0$

$b=\frac{1}{a}$

$f(3)=0$

$f(1)=f(a)+f(\frac{1}{a})=0 \Rightarrow \underline{f(a)=-f(\frac{1}{a})}$

$\frac{x}{y}\neq 2$

$f(\frac{x}{y})>0$, то $f((\frac{x}{y})^{-1})<0$

$\frac{x}{y}\neq 3$

$1\leq x\leq 24$

$1\leq y\leq 24$

$\Rightarrow$ всего пар $\frac{24^2-24-2\cdot 12-8\cdot 2}{2}=$

$\frac{x}{y}\neq 1$

$=$

$y=3$

$x=1$

$1\leq x\leq 6$

$1\leq y\leq 6$

$\Rightarrow \frac{6^2-6-2\cdot 3-2\cdot 2}{2}$

$(x;y)$

$\cancel{(1;1)}$, $\cancel{(1;2)}$, $\cancel{(1;3)}$, $(1;4)$, $(1;5)$, $(1;6)$, $\cancel{(1;7)}$,

$\cancel{(2;1)}$, $\cancel{(2;2)}$, $(2;3)$, $\cancel{(2;4)}$, $(2;5)$, $\cancel{(2;6)}$

$\cancel{(3;1)}$, $(3;2)$, $\cancel{(3;3)}$, $(3;4)$, $(3;5)$, $\cancel{(3;6)}$

$(4;1)$, $\cancel{(4;2)}$, $(4;3)$, $\cancel{(4;4)}$, $(4;5)$, $(4;6)$

$(5;1)$, $(5;2)$, $(5;3)$, $(5;4)$, $\cancel{(5;5)}$, $(5;6)$

$(6;1)$, $\cancel{(6;2)}$, $\cancel{(6;3)}$, $(6;4)$, $(6;5)$, $\cancel{(6;6)}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)