МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

V

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2-10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

V

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

V

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5} \leqslant ax+b \leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

$f(a,b) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [\frac{p}{4}]$

$2 \le x, y \le 25$

$\cancel{x \cdot y}$

f	2	3	4	5	6	7
	0	0	0	1	0	1

5.2

8	9	10	11
0	0	1	2

12	13	14
0	3	

15	16	17
18	19	20

$f(x \cdot \cancel{/} y) < 0.$

$f(\frac{x}{y}) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(\frac{1}{y}) = f(1 + \cancel{4} \frac{1}{y}) = f(1) \cancel{+} f$

$f(\frac{1}{y}) = f(1) + f(\frac{1}{y})$ $\qquad f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$

$f(1) = 0$

$f(a,1) = f(a) + f(1)$ $\qquad f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y).$

$f(3) = 2$

$f(1) = 0$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(4) = f(2 \cdot 2) \cdot \cancel{f} = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = 1$

$f(x \cdot y \cdot \frac{1}{y}) = f(x)$

$f(6) = 0$

$f(7) = 1$

$f((x \cdot y) \cdot \frac{1}{y}) = f(x \cdot y) + f(\frac{1}{y}) =$ $\qquad f(9) = f(3 \cdot 3) =$
$\qquad 0$

$= f(x) + f(y) + f(\frac{1}{y})$

$f(y) = -f(\frac{1}{y})$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} & (1) \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 & (2) \end{cases}$$

Ур-ние (1):

$x-12y=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)}$

$x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)}$

Ур-ние (2):

$x^2+36y^2-12x-36y=45$

$x^2-12x+36+36y^2-36y+9=45+36+9$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

$(x-6)^2+9(\cancel{6y}2y-1)^2=90$

$\cancel{x-12y=\sqrt{2y(x-6)}}$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

Замена: $\boxed{x-6=a;\ 2y-1=b}$

Тогда: $\cancel{a-6y=}$ $a-6b=x-6-12y+6=x-12y$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} & (3) \\ a^2+9b^2=90 & (4) \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

Ур-ние (3): $a-6b=\sqrt{ab} \quad |\hat{}2$

$a^2-12ab+36b^2=ab$; $\boxed{a-6b\geq 0}$

$a^2-13ab+36b^2=0$

$D=169b^2-144b^2=25b^2$

$\left[\begin{array}{l} b=\frac{13b-5b}{2} \\ b=\frac{13b+5b}{2}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} a=\frac{8b}{2} \\ a=\frac{18b}{2}\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=9b\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=9b\end{array}\right. \\ a^2+9b^2=90 \quad (4) \\ a-6b\geq 0 \quad (5)\end{array}\right.$

Ур-ние (4):

1) $a=4b$

$16b^2+9b^2=90$

$25b^2=90$

$b^2=\frac{90}{25}=\frac{18}{5}$

$\left[\begin{array}{l} b=\sqrt{\frac{18}{5}} \\ b=-\sqrt{\frac{18}{5}}\end{array}\right.$

С учетом $a=4b$ усл-вие 5 примет вид:

~~4a~~ $4b-6b\geq 0$

$-2b\geq 0$

$b\leq 0$

Тогда корень $b=\sqrt{\frac{18}{5}}$ не подходит.

$\left\{\begin{array}{l} b=-\sqrt{\frac{18}{5}} \\ a=-4\sqrt{\frac{18}{5}}\end{array}\right.$; $\left\{\begin{array}{l} 2y-1=-\sqrt{\frac{18}{5}} \\ x-6=-4\sqrt{\frac{18}{5}}\end{array}\right.$; $\left\{\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{18}{5}} \\ x=6-4\sqrt{\frac{18}{5}}\end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{18}{20}} \\ x=6-4\sqrt{\frac{18}{5}}\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{9}{10}} \\ x=6-4\sqrt{\frac{18}{5}}\end{array}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $a=9b$ С учетом $a=9b$ условие (5) примет вид:

$81b^2+9b^2=90$

$b^2=1$

$\left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=-1 \end{array}\right.$

$9b-6b\geq 0$; $3b\geq 0$; $b\geq 0$, тогда корень $b=-1$ не подходит:

$\begin{cases} b=1 \\ a=9 \end{cases}$ $\begin{cases} 2y-1=1 \\ x-6=9 \end{cases}$ $\begin{cases} y=1 \\ x=15 \end{cases}$

Ответ: $\left(6-4\sqrt{\frac{18}{5}};\ \frac{1}{2}-\sqrt{\frac{9}{10}}\right)$; $(15;1)$

N.3.

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

В пр.ч. присутствует $\log_3(10x-x^2)$, значит $10x-x^2>0$, $x^2-10x<0$, значит модуль раскрывается с противоположным знаком.

$10x+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x-x^2+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

Замена: $a=10x-x^2$; $a>0$

$a+a^{\log_3 4}\geq \cancel{5^{\log_3(10x-x^2)}}\ 5^{\log_3 a}$

~~Левая и правая часть ~~неотриц~~ положительны.~~

~~Прологарифмируем по основании 5.~~

~~$\log_5(a + a^{\log_3 4}) \geq \log_5 5^{\log_3 a}$~~

~~$\log_5(a + a^{\log_3 4}) \geq \log_3 a$~~

~~$\log_5(a + a^{\log_3 4}) \geq \frac{\log_5 a}{\log_5 3}$~~

~~$\log_5(a(1 + a^{\log_3 4 - 1})) \geq \frac{\log_5 a}{\log_5 3}$.~~

$5^{\log_3 a} = a^{\log_a 5 \cdot \log_3 a} = a^{\log_3 5}$

$a + a^{\log_3 4} \geq a^{\log_3 5}$

N.5.

$f(ab) = f(a) + f(b) \quad a, b \in R_+$

$f(p) = [\frac{P}{4}] \quad$ p-простые

Найти:

кол-во $(x; y)$: $2 \leq x, y \leq 25$, $f(\frac{x}{y}) < 0$.

1. $f(x \cdot y \cdot \frac{1}{y}) = \underline{f(x)}$

$f((xy)(\frac{1}{y})) = f(xy) + f(\frac{1}{y}) =$

$= \underline{f(x) + f(y) + f(\frac{1}{y})}$

$f(x) = f(x) + f(y) + f(\frac{1}{y})$

$\boxed{f(\frac{1}{y}) = -f(y)}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассмотрим значения функций.

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(x)$	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2
	$\left[\frac{2}{4}\right]$	$\left[\frac{3}{4}\right]$	$f(2)+f(2)$	$\left[\frac{5}{4}\right]$	$f(2)+f(3)$	$\left[\frac{7}{4}\right]$	$f(2)+f(4)$	$f(3)+f(3)$	$f(5)+f(2)$	$\left[\frac{11}{4}\right]$

x	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$f(x)$	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1
	$f(3)+f(4)$	$\left[\frac{13}{4}\right]$	$f(7)+f(2)$	$f(3)+f(5)$	$f(2)+f(8)$	$\left[\frac{17}{4}\right]$	$f(9)+f(2)$	$\left[\frac{19}{4}\right]$	$f(5)+f(4)$	$f(7)+f(3)$

x	22	23	24	25
$f(x)$	2	5	0	2
	$f(11)+f(2)$	$\left[\frac{23}{4}\right]$	$f(6)+f(4)$	$f(5)+f(5)$

~~Для того, чтобы $f(\frac{x}{y})$~~

$$f\left(\frac{1}{y}\right)=-f(y) \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$$

Для того, чтобы ~~при~~ $f(x/y)$ было <0, $f(x)$ должен быть меньше $f(y)$.

1). $f(x)=0$ – 10 вариантов.
$f(y)>0$ – 14 вариантов.

Всего: $14\cdot 10=140$ вариантов.

2) $f(x)=1$ – 7 варантов
$f(y)>1$ – 7 вариантов

Всего: $7\cdot 7=49$ вариатов

3) $f(x)=\cancel{3}2$ – 3 варианта
$f(\cancel{y})>2$ – 4 варианта

всего: $3\cdot 4=12$ вариантов.

4) $f(x)=3$ – 1 вариант
$f(y)>3$ – 3 варианта

всего: $3\cdot 1=3$ варианта.

5.) $f(x)=4$ – 2 варианта
$f(\cancel{y})>4$ – 1 вариант.

всего: $2\cdot 1=2$ варианта.

Других наборов, когда $\cancel{x}f(y)>f(x)$ нет.

Всего: $\cancel{t}\ \underbrace{140+49}_{189}+\underbrace{12+3}_{17}+\underbrace{3+2}_{5}=206$

Ответ: 206.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N. 4.

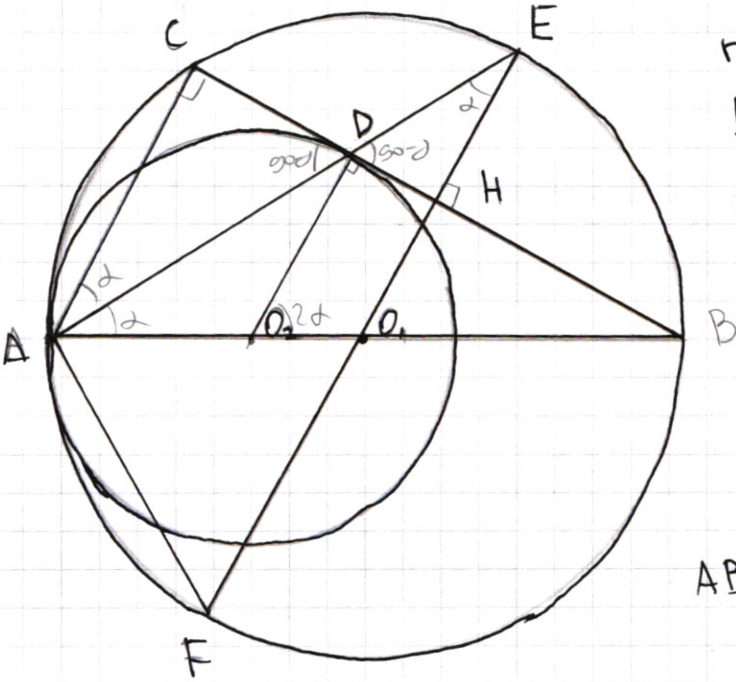
$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$

$r, R - ?$

$\angle AFE - ?$

$S_{\triangle AEF} - ?$



r - радиус ω

R - радиус Ω

O_1 - центр Ω

O_2 - центр ω

AB - диаметр.

1) $O_2D \perp CB$
$O_1E \perp CB$ $\Big\}$ $O_2D \parallel O_1E \Rightarrow \angle ADO_2 = \angle AEO_1$

$\underbrace{\angle A - \text{общий}}$

$\triangle AO_2D \sim \triangle AO_1E$:

$\angle AO_2D = \angle AO_1E$

по Th. синусов:

$AD = 2r \cdot \sin \angle AO_2D$

$AE = 2R \cdot \sin \angle AO_1E$

$\frac{AD}{AE} = \frac{2r \cdot \sin \angle AO_2D}{2R \cdot \sin \angle AO_1E} = \frac{r}{R}$

$k = \frac{r}{R}$

$AO_2 = O_2D = r$

$AO_1 = O_1E = \frac{r}{k} = R$

$AO_1 = O_1E = R$ — радиусы; EF - диаметр.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$AC \perp CB$ ($\angle ACB$ опирается на диаметр)

$O_2D \perp CB$ (касательная и радиус)

$O_2D \parallel AC$

По Th. о пропорц. отрезках:

$$\frac{BD}{O_2B} = \frac{CD}{AO_2}$$

$$BD \cdot AO_2 = CD \cdot O_2B \quad ; \quad AO_2 = r$$

$$O_2B = 2R - r$$

$$\frac{17}{2} r = \frac{15}{2}(2R - r)$$

$$17r = 30R - 15r$$

$$30R = 32r \quad ; \quad 2R = \frac{32}{15} r.$$

$\triangle O_2DB$ - прямоугольный.

$O_2D = r$

$O_2B = 2R - r = \frac{32}{15} r - r = \frac{17}{15} r$

$BD = \frac{17}{2}$

По Th. Пифагора:

$$\left(\frac{17}{15} r\right)^2 = r^2 + \left(\frac{17}{2}\right)^2$$

$$\frac{289}{225} r^2 = r^2 + \frac{289}{4}$$

$$\frac{64}{225} r^2 = \frac{289}{4}$$

$$\frac{8}{15} r = \frac{17}{2} \qquad r = \frac{15 \cdot 17}{8 \cdot 2} = \frac{255}{16}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$R = \frac{32}{30} r = \frac{32}{30} \cdot \frac{255}{16} = \frac{2 \cdot 255}{30} = \frac{255}{15} = 17.$

$\left.\begin{array}{l} EF\text{-диаметр} \\ CB \perp EF \\ CB \cap EF = H \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} CH = HB \\ \smile CE = \smile EB \end{array}$

Пусть $\angle AEF = \alpha$

тогда $\angle EDH = 90 - \alpha$; $\angle CDA = \angle EDH = 90 - \alpha$

$\angle CAD = 90 - \angle CDA = 90 - (90 - \alpha) = \alpha.$

Заметим, что ~~∠CAD опирается~~ CAB опирается на $\smile CB$; $\smile CE = \smile EB \Rightarrow AE$ – биссектриса ~~∠CAE~~ $\angle CAB$

$\Downarrow$

$\angle CAD = \angle DAB = \angle \alpha$

$\angle CAB = 2\alpha.$ $\angle DO_2B = \angle CAB$ (параллельные CA и O_2D и секущая AB)

~~$\cos \angle CAB =$~~

$\angle DO_2B = 2\alpha$

$\cos \angle DO_2B = \frac{O_2D}{O_2B} = \frac{r}{\frac{17}{15} r} = \frac{15}{17}.$

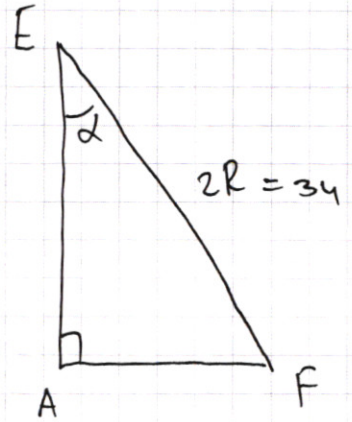
$\cos 2\alpha = \frac{15}{17}$;

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\frac{15}{17} = 2\cos^2\alpha - 1$; $2\cos^2\alpha = \frac{32}{17}$

$\cos^2\alpha = \frac{16}{17}$; $\cos\alpha \sqrt{\frac{16}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

Рассмотрим $\triangle AEF$ - прямоуг.



$$AE = 2R \cdot \cos\alpha = 2R \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} =$$

$$= 2 \cdot 17 \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} = 8\sqrt{17}$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$S_{AEF} = \frac{1}{2} EF \cdot AE \cdot \sin\alpha = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 34 \cdot \overset{4}{\cancel{8}}\cancel{\sqrt{17}} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{17}}} = 136.$$

Ответ: ~~r =~~ $R_\omega = \frac{255}{16}$; $R_\Omega = 17$; $\angle AEF = \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}$;

$S_{AEF} = 136$

N. 1.

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}. \qquad tg\,\alpha - ?$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin(2\alpha) = \cancel{2\,\sin}\ 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) =$$

$$= 2\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{4\beta}{2}\right) = 2\sin(2\alpha+2\beta) \cdot \cos 2\beta$$

$$2\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{= -\frac{1}{\sqrt{5}}} \cdot \cos 2\beta = -\frac{2}{5}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{5}} \cos 2\beta = -\frac{2}{5}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 2\beta = \frac{\sqrt5}{5} \Rightarrow$ ~~sinα=~~ $\sin 2\beta = \pm\frac{\sqrt{20}}{5} = \pm\frac{2\sqrt5}{5}$

1) $\sin 2\beta = \frac{2\sqrt5}{5}$.

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{\sqrt5}{5} + \frac{2\sqrt5}{5} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \quad | \cdot \sqrt5.$

~~$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$~~

~~$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha +$~~

~~При $\cos 2\alpha = 0$ $(\sin 2\alpha = -1)$~~

~~Выражение выполнено.~~

~~$\sin 2\alpha = -1$; $2\alpha = -\frac{\pi}{4}$~~

~~$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = -1$ $\quad 2\alpha = -\frac{\pi}{2}$~~

~~sin $\quad \alpha = -\frac{\pi}{4}$~~

~~$\boxed{tg\,\alpha = -1}$~~

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 2 = -1$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 1 = 0$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha + 4\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 0$

$3\cos^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - \sin^2\alpha = 0 \quad | : \cos^2\alpha \neq 0$

при $\cos^2\alpha = 0$ выражение не верно.

$3 + 2tg\alpha - tg^2\alpha = 0$

$tg^2\alpha - 2tg\,\alpha - 3 = 0$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = 3 \end{array}\right.$$

2) $\sin 2\beta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha$$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad | \cdot \sqrt{5}.$$

$$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$$

$$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - 2(2\cos^2\alpha - 1) = -1$$

$$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - 4\cos^2\alpha + 2 = -1$$

$$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - 4\cos^2\alpha + 3 = 0$$

$$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - 4\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha = 0$$

$$3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha - \cos^2\alpha = 0 \qquad | : \cos^2\alpha \neq 0$$

(при $\cos\alpha = 0$ выражение не выполнено)

$$3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0$$

$$D = 4 + 12 = 16$$

$$tg\alpha = \frac{-2+4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$tg\alpha = \frac{-2-4}{6} = -1$$

Ответ: $-1; \frac{1}{3}; 3$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N. 6

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3.$$

$(a;b)$: выполняется для $\forall x: x \in [\frac{1}{4};1]$

$$\frac{16x-16}{4x-5} = \cancel{16x}\ \frac{4(4x-5)+4}{4x-5} = 4+\frac{4}{4x-5}.$$

Замена: $y=4x$; $y \in [1;4]$

$$\cancel{4+\frac{4}{a-5} \le a}$$

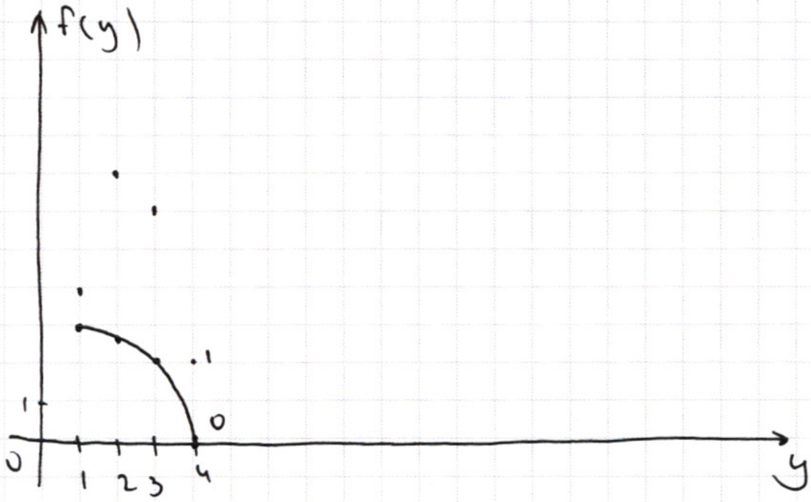
$$4+\frac{4}{y-5} \le a\frac{y}{4}+b \le -2y^2+9y-3$$

$4+\frac{4}{y-5}$:

1	2	3	4
3	$\frac{8}{3}$	2	0

$-2y^2+9y-3$:

1	2	3	4
4	7	6	1


f(y)
1
0
0
1 2 3 4
y

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

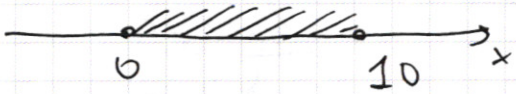
$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

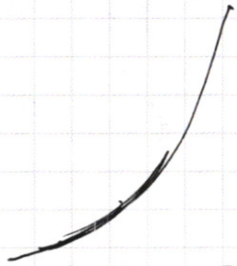
$10x - x^2 > 0$

$x^2 - 10x < 0$

$10x + (10x-x^2)^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x - x^2 > 0$





$\cancel{\log_5(10x + (10x-x^2)^{\log_3 4}) \geqslant x^2 + \log_5(x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)})}$

$10x - x^2 + (10x-x^2)^{\log_3 4} \geqslant 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x - x^2 = a$

$a + a^{\log_3 4} \geqslant 5^{\log_3 a}$ $\qquad a^{\log_3 4} = 5^{\log_5 a \cdot \log_3 4}$

$\log_3(a + a^{\log_3 a}) \geqslant \cancel{\log_3} \log_3 5$

$5^{\log_3 a} = a^{\log_a 5 \cdot \log_3 a}$

$a + a^{\log_3 4} \geqslant a^{\log_a 5 \cdot \log_3 a}$.

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$a + a^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 a}$ $-32x^2+36x-3=$

$a^{\log_3 4} = 3^{\log_3 a \cdot \log_3 4}$ $D=36^2-4\cdot 3\cdot 32=$

$5^{\log_3 a} = \cancel{3}\ \cancel{a^{\log_a 5 \cdot \log_3 a}}$ $=$ 2^6

$3^4 \cdot 2^4 - 4\cdot 3\cdot 32 =$

$3^{\log_3 5 \cdot \log_3 a}$ $= \cancel{4\cdot 3(}$

$\log_5(a+a^{\log_3 4}) \geq \log_3 a \cdot \cancel{\log_5} 5$

$\log_5 a+a^{\log_3 4} \geq \dfrac{\log_5 a}{\log_5 3}$ $\cancel{3(3}$

$\log(a+a^{\log_3 4}) \geq 5^{\cancel{\log_3 a}}$

$5^{\log_3 a} = \cancel{a^{\log_a a}}$

$a^{\log_a 5 \cdot \log_3 a} =$

$\dfrac{16x-16}{4x-5} \leq ax+b \leq -32x^2+36x-3$

$\dfrac{16x-16}{4x-5} = \dfrac{4(4x-5)+4}{4(x-5)} = 4+\dfrac{4}{4x-5}$

$-32x^2+36x-3$ $4x-5$

$\square$ черновик $\square$ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a+a^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 a}$

$5^{\log_3 a} = a^{\log_a 5 \cdot \log_3 a} = a^{\log_3 5}$

$\cancel{a+1}$ $a+a^{\log_3 4} \geq a^{\log_3 5}$

$a+a^{\log_3 4} - a^{\log_3 5} \geq 0$

$a(1+a^{\log_3 4-1} - a^{\log_3 5})=0$

$a^{\log_3 4-1} - a^{\log_3 5-1}$

$36^2-4\cdot 3\cdot 32 =$

$= 36\cdot 36 - 12\cdot 32 =$

$= 12\cdot 3\cdot 36 - 12\cdot 32 =$

$= 12(3\cdot 36-32)$

$12(108-32) =$

$12 \cdot 76 =$

$= 38\cdot 12$

$36 \times 3 = 108$

$108 - 32 = 76$

$-18+27-3=$

$-8+18-3$

$-32+36-3$

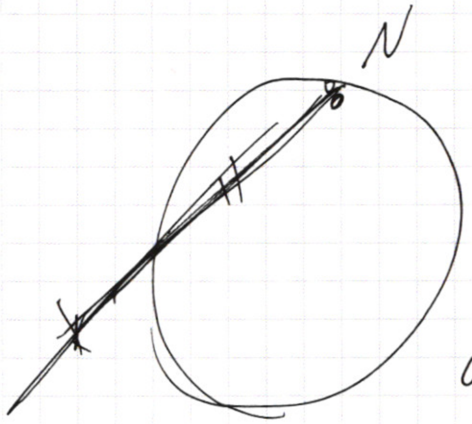
$24-18$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

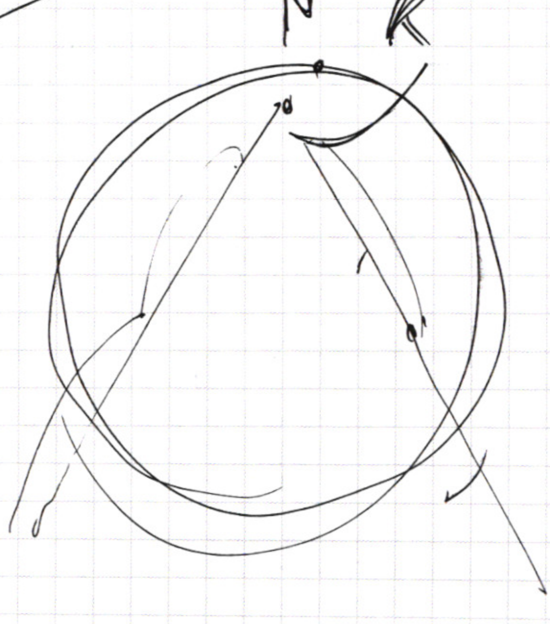
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$a^{\log_3 3} + a^{\log_3 4} \geqslant a^{\log_3 5}.$

$a^{\log_3 3} + a^{\log_3 4} \geqslant a^{\log_3 5}$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad\quad$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$tg\,\alpha$?

$2\alpha = x$; $\quad 2\beta = y$

$\sin(x+y) = \frac{-1}{\sqrt{5}}$ $\quad$; $\quad$ $\sin(x+2y)+\sin x = -\frac{2}{5}$.

(1)

$\sin x \cdot \cos 2y + \sin 2y \cdot \cos x = -\frac{2}{5}$.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$.

1) $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

$$\begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}. \\ \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y-45=0 \end{cases}$$

$$x^2-12x+36y^2-36y-45=0$$

$$D=144-4$$

$$\begin{cases} x^2+36y^2-12x-36y=45 \\ x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \end{cases}$$

$$x-12y=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)}$$

$$x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)}$$

$x-12y>0$

$x>12y$

$x>6$

$$\cancel{x^2-2xy^2+144}$$

$$x^2-12xy+144y^2=2xy-12y-x+6$$

$$x^2-14xy+x+144y^2+12y-6=0$$

$$x^2+x(1-14y)+144y^2+12y-6=0$$

$$D=1-28y+196y^2$$

$$\begin{array}{r} \times\, 14 \\ 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 156 \end{array}$$

$36 \mid 12$

$$\cancel{x-12y=\sqrt{2xy-12y-x-}}$$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$3y-x$

$$x(x-12)+36y(y-1)=45$$

$45+36+9.$

$$x^2-12x+36+36y^2-36y+9=90$$

$$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$$

$$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$$

$$\begin{array}{r} +\,36 \\ 9 \\ \hline 45 \end{array}$$

$$(12y-6)^2+9(2y-1)^2=90$$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases}(x-6)^2+9(2y-1)^2=90\\ x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)}\end{cases}$$

$x-6-6(2y-1)=x-6-12y+6=x-12y.$

$(x-6)=a$ ≥ 0

$(2y-1)=b.$ $> a$

$$\begin{cases}a^2+9b^2=90\\ a-6b=\sqrt{ab}\end{cases}$$

$a^2+9b^2=90$

$a^2-12ab+36b^2=ab$

$a^2-13ab+36b^2=0$

$D=169b^2-4\cdot 36b^2=169b^2-144b^2=$
$=25b^2$

36
4
444

$a=\frac{13b^2\pm 5b^2}{2}$

$a=\frac{18b}{2}=9b$

$a=\frac{8b}{2}=4b.$

$81b^2+9b^2=90$

$90b^2=90$

$b^2=1$

$$\begin{cases}a=9\\ b=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}a=-9\\ b=-1\end{cases}$$ -9

$16b^2+9b^2=90$

$25b^2=90$

$5b^2=14$

$b^2=\frac{14}{5}$

$b=\pm\sqrt{\frac{14}{5}}$

$a-6b=4b-6b=-2b\geq 0$

6

$a^{\log_3 4} + a \geq a^{\log_3 5}$

$\log_3(a^{\log_3 4} + a)) \geq \log_a \cdot \log_3 5$

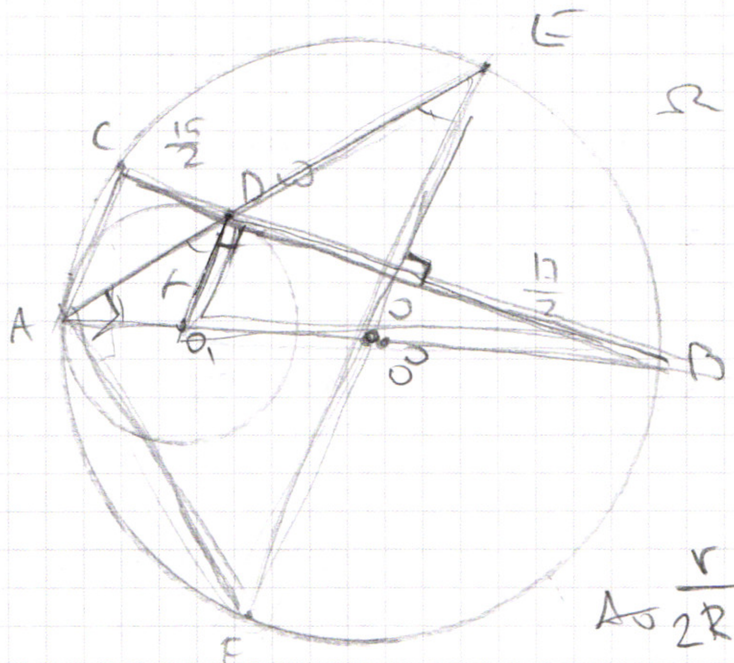
~~$\log_3(a$~~

$\log_3(a(1 + a^{\log_3 4 - 1})) \geq \log_3 a \cdot \log_3 5$

$\log_3 a + \log_3(1 + a^{\log_3 4}) \geq \log_3 a) \log_3 5$

~~$\log_3 a$~~ $(\log$

$255 : 15 = 17$



~~15.1~~

$15 \times 17 = 255$

$\frac{r}{2R - r} = \frac{15}{17}$

~~15~~

$17r = 30R - 15r$

$30R = 32r$

$17 \times 17 = 289$

$15 \times 15 = 225$

$289 - 225 = 64$

$\frac{15 \cdot 17}{8 \cdot 2} =$

$34 \times 4 = 136$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

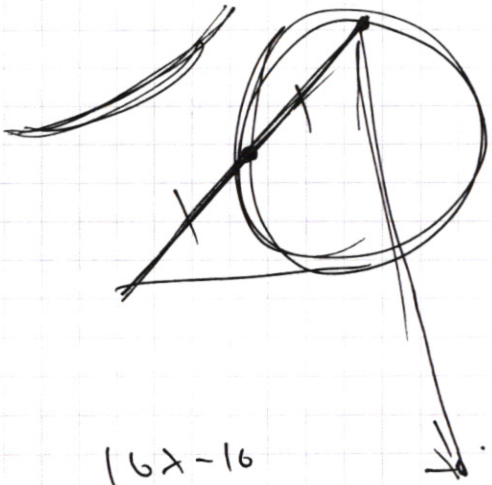
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

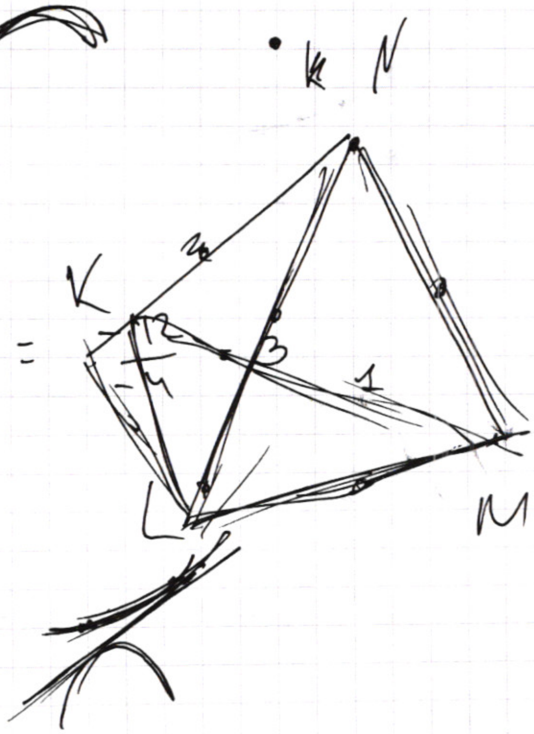
$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3.$

$-32x^2+36x-3.$

$x = -\frac{b}{2a} = \cancel{\frac{-72}{-64}} = \cancel{\frac{36}{32}} \quad \frac{-36}{-64} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$

$f\left(\frac{9}{16}\right) = -32 \cdot \frac{81}{16^2} + 36 \cdot \frac{9}{16} - 3 =$





$\frac{16x-16}{4x-5}$ $\quad \frac{4-16}{1-5} =$ K

$\frac{16x-16}{4x-5} = \frac{4(4x-5)+4}{4x-5} =$

$= 4 + \frac{4}{4x-5}$

$\begin{array}{r} +189 \\ 17 \\ \hline 206 \end{array}$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$;

$a, b: \forall x \in [\frac{1}{4}; 1]$

Замена $y=4x$; $x=\frac{y}{4}$; $x^2=\frac{y^2}{16}$

$\frac{4y-16}{y-5} \le \frac{a}{4}y+b \le -2y^2+9y-3$

72
-128

$[1;4]$

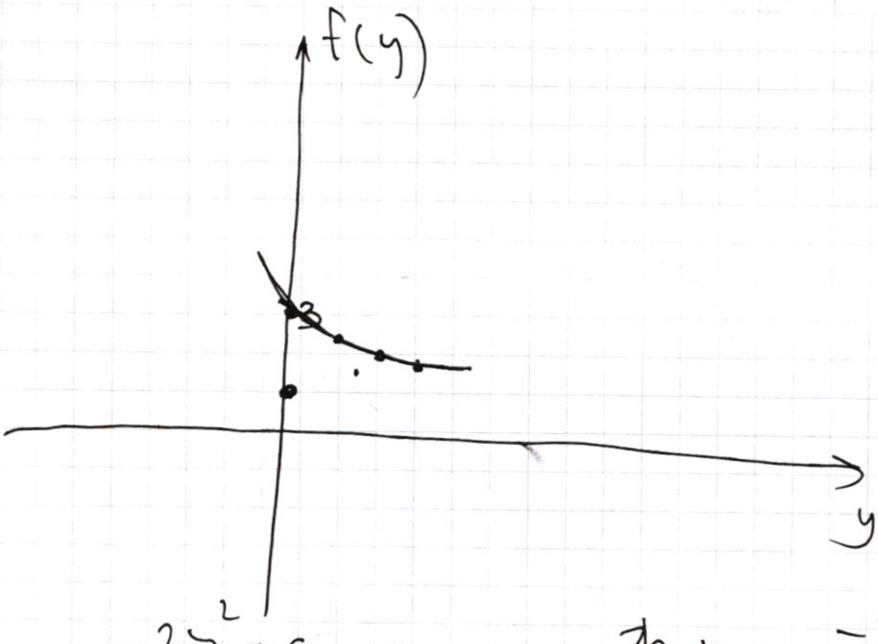
$\frac{4(y-5)+4}{y-5} = 4+\frac{4}{y-5}$

$4+\frac{4}{-4}=4-1=3$

2

$4+\frac{4}{2-5}=4-\frac{4}{3}$

$\frac{12}{3}-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$



3: $4+\frac{4}{3-5}=4+\frac{4}{-2}=$

$=4-2=2$

$-2y^2+9y-3$.

$x_0=\frac{-9}{-4}=2{,}14$

$36-3-32=$ $36-35=1$

2: $-32\cdot4+36\cdot2-3=$

$4(\cancel{36-32})-3=$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$.

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$. $\quad 1-\frac{1}{5} \quad \frac{4}{5}$

$2\alpha+2\beta = x \quad ; \quad \cancel{2\alpha = y}$.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta+\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$.

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos\beta+\cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$.

$\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}+\frac{1}{5}\ldots\ldots$

1).

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta+\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\beta+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$.

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$\sin(2\alpha+2\beta) - \frac{1}{\sqrt5}$

$\cancel{\sin(2\alpha+2\beta+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}}$ $\qquad \begin{matrix} \sin\alpha \\ +\ \sin\beta \end{matrix}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = -\frac{2}{5}.$

$\cancel{2}\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{\cancel{2}}{5}$

$\cancel{-}\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos(2\beta) = \cancel{-}\frac{1}{5}$

$\cos(2\beta) = \frac{\sqrt5}{5}$; $\sin 2\beta = \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{2\sqrt5}{5}.$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{5}.$

$\sin 2\alpha\ \cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{\sqrt5}{5} + \cancel{\sin}\ \cos 2\alpha\cdot\frac{2\sqrt5}{5} = -\frac{1}{\sqrt5}.$

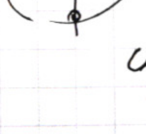
~~2sin2~~

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2(2\cos^2\alpha - 1) = -1$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 4 = -1$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \neq 3$



$\sin 2\alpha = -1$

$\cancel{\cos}\ tg\frac{\pi}{8}$; $tg\frac{\pi}{4} = tg^2\frac{\pi}{8}$