МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha =$

$= \sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1) + 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha =$

$= 2\sin 2\alpha\cdot\cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha = 2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta +$

$+ \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha) = 2\cos 2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta) = 2\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) =$

$= -\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = -\frac{2}{17} \quad \rightarrow \quad \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

1) $\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1. \quad \uparrow^2 \quad (\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha < 0^{*})$

$\sin^2 2\alpha + 8\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha + 16\cos^2 2\alpha = 1 \qquad (\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1)$

$8\sin 2\alpha\cos 2\alpha + 15\cos^2 2\alpha = 0$

$\cos 2\alpha(8\sin 2\alpha + 15\cos 2\alpha) = 0 \qquad \cancel{\alpha = -\frac{\pi}{4}+\pi n}$ * не подх.

$\left[\begin{array}{l} \cos 2\alpha = 0 \rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2} \Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{\pi}{4}+\pi n \\ 8\sin 2\alpha = -15\cos 2\alpha \quad \cancel{\sin 2\alpha} \neq 0 \text{ с уч. * } \left(\begin{array}{c}\cos 2\alpha < 0 \\ \Downarrow \\ \sin 2\alpha > 0\end{array}\right) \end{array}\right.$

$\downarrow$

$\operatorname{tg}\alpha = \pm 1$

$\cancel{-\frac{8}{15} = \operatorname{ctg}2\alpha \Rightarrow \operatorname{tg}2\alpha}$

$\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ одновременно не могут быть равны нулю => $\sin 2\alpha \neq 0$ и $\cos 2\alpha \neq 0$ иначе нет решений.

$\Rightarrow \operatorname{tg}2\alpha = -\frac{15}{8} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \qquad \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha - 1} = \frac{15}{8}$

$16\operatorname{tg}\alpha = 15\operatorname{tg}^2\alpha - 15 \qquad 15\operatorname{tg}^2\alpha - 16\operatorname{tg}\alpha - 15 = 0$

$D = 256 + 225\cdot 4 = 256 + 900 = 1156 = 34^2$

$\operatorname{tg}\alpha_{1,2} = \frac{16\pm 34}{30} = \left[\begin{array}{l}\frac{5}{3} \\ -\frac{3}{5}\end{array}\right.$

Задача 4 (пр.)

$\triangle ABC$.

$\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{2R}{13} = \dfrac{65}{13} = 5$

$\dfrac{AC}{DC} = \dfrac{60}{12} = 5$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{DC} \Rightarrow AD$ - бис-са $\angle BAC$.

Пусть $(O_2G_1) \cap (AD) = E'$

$\triangle ADC: \angle ADC = 90° - \angle DAC = 90° - \angle BAD$

$\angle ADC = \angle G_1DE'$ - верт.

$E'G_1 \perp BC \Rightarrow \angle G_1DE' = 90° - \angle DE'G_1 = \angle ADC = 90° - BAD$

$\Rightarrow \angle BAD = \angle DE'G_1 \Rightarrow \triangle E'O_2A$ р/б $\Rightarrow E'O_2 = O_2A = R$

$\Rightarrow E' \in \Omega$. и $E' = E$

$\Rightarrow EF$ - диам $\Omega \Rightarrow \triangle EFA$ прям.

$\triangle AFE \sim \triangle CDA \quad (\angle A = \angle E)$

$\Rightarrow \dfrac{AD}{EF} = \dfrac{AF}{CD} \rightarrow AF = \dfrac{AD \cdot CD}{EF} = \dfrac{12\sqrt{26} \cdot 12}{65} = \dfrac{144\sqrt{26}}{65}$

$\dfrac{AD}{EF} = \dfrac{AE}{AC} \rightarrow AE = \dfrac{AD \cdot AC}{EF} = \dfrac{12\sqrt{26} \cdot 60}{65} = \dfrac{144\sqrt{26}}{13}$

$S_{AEF} = AF \cdot AE \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{144\sqrt{26}}{65} \cdot \dfrac{144\sqrt{26}}{13} = \dfrac{144^2 \cdot 26}{5 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 2} = \dfrac{144^2}{65}$

$\angle AFE = \operatorname{arctg} \dfrac{AE}{AF} = \operatorname{arctg} 5$.

Ответ: $R = \dfrac{65}{2}$

$r = \dfrac{156}{5}$

$S_{AFE} = \dfrac{144^2}{65}$

$\angle AFE = \operatorname{arctg} 5$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $\sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

Аналогично ...

$\left[\begin{array}{l} \cos 2\alpha = 0 \\ 8\sin 2\alpha = 15\cos 2\alpha \end{array}\right.$ – уже считали.

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{15}{8} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$15 - 15\operatorname{tg}^2\alpha = 16\operatorname{tg}\alpha$ $\quad 15\operatorname{tg}^2\alpha + 16\operatorname{tg}\alpha - 15 = 0$

$D = 256 + 225\cdot 4 = 34^2$

$\operatorname{tg}\alpha_{1,2} = \frac{-16 \pm 34}{30} = \left[\begin{array}{l} -\frac{5}{3} \\ \frac{3}{5} \end{array}\right.$

Ответ: $\pm\frac{3}{5}$; $\pm\frac{5}{3}$; ± 1

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}} \sin 2\alpha$$

$$a^{\log_5 12} + a \geq a^{\log_5 13}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

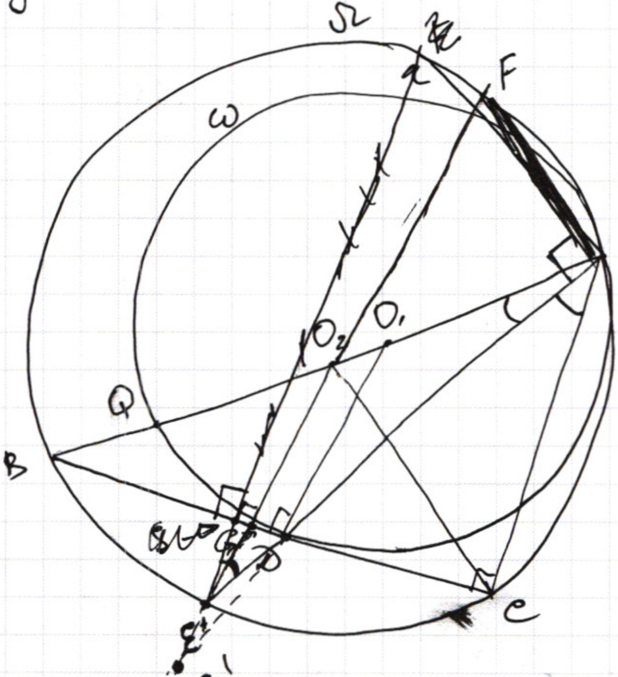
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4



AB - сек. для ω $\Rightarrow$

BD - кас. для ω

$BQ \cdot AB = BD^2$

Пусть $O_1A = O_1Q = r$

$O_2B = O_2A = R$

- радиусы ω и Ω соотв.

(O_1 и O_2 - центры)

$(2R-2r)\cdot 2R = 169$

$(R-r)R = \frac{169}{4}$

$O_2G \perp BC \Rightarrow BG = GC$

($BO_2 = CO_2 \Rightarrow \triangle BO_2C$ р/б $\Rightarrow O_2G$ - выс и мед)

$\Rightarrow BG = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\cdot(12+13) = \frac{25}{2} = 12{,}5.$

$\angle ACB = 90^\circ$ - опир на AB - диам.

$O_1D \perp BC$ - радиус в точку касания

$\triangle ABC \sim \triangle O_1BD$ по остр уг. $\angle ABC$ - общ.

$\Rightarrow \frac{BO_1}{AB} = \frac{BD}{BC} \to \frac{2R-r}{2R} = \frac{13}{25} \to 50R - 25r = 26R$

$r = \frac{24}{25}R$

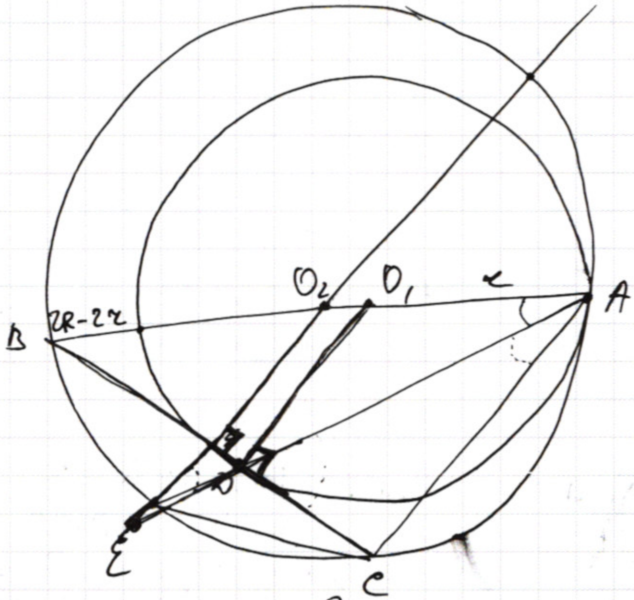
$\left(R - \frac{24}{25}R\right)R = \frac{169}{4}$

$\frac{R^2}{25} = \frac{169}{4} \to R = \frac{65}{2}$ $\quad r = \frac{24}{25}\cdot\frac{65}{2} = \frac{12\cdot 13}{5} = \frac{156}{5}$

$\triangle ABC$ прям $\Rightarrow AC^2 = AB^2 - BC^2 = (2R)^2 - 25^2 = 65^2 - 25^2 = 4225 - 625 =$

$= 3600 \to AC = 60$

$\triangle ADC$ прям $\Rightarrow AD^2 = AC^2 + DC^2 = 3600 + 144 = 3744 \to AD = 12\sqrt{26}$



$\cancel{2R-2r}$ $\quad \frac{2R}{2R-r} = \frac{25}{13}$

$\frac{R}{2R-r} = \frac{12,5}{13}$ $\quad 26R = 50R - 25r$

$25r = 24R$

$\cancel{\frac{2R-r}{2R}} = \cancel{\frac{13}{25}}$ $\quad r = \frac{24}{25}R$

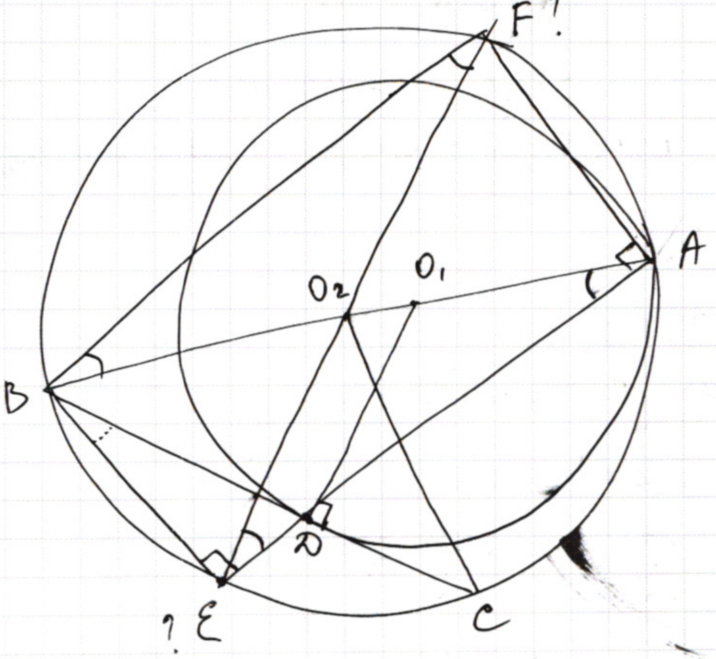
$(2R-2r)\cdot 2R = 169$

$4\left(R - \frac{24}{25}R\right)\cdot R = 169$

$\frac{R^2}{25} = \frac{169}{4}$

$R = \frac{65}{2}$

$\frac{DE}{AD} \overset{?}{=} \frac{AO_1}{O_1O_2}$



$\sin 2\alpha = -\frac{15}{8}\cos 2\alpha$

$-\frac{15}{8}\cos 2\alpha + 4\cos 2\alpha = \ \dots$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5.

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$a=b=1$: $f(1)=2f(1) \to f(1)=0$

$f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0$

$f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]=0$

$f(4)=f(2\cdot 2)=f(2)+f(2)=0+0=0$

$f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=1.$

Аналогично получаем остальные значения для аргументов от 4 до 28 $\in N$.

$f(6)=0$, $f(7)=1$, $f(8)=0$, $f(9)=0$, $f(10)=1$,
$f(11)=2$, $f(12)=0$, $f(13)=3$, $f(14)=1$, $f(15)=1$,
$f(16)=0$, $f(17)=4$, $f(18)=0$, $f(19)=4$, $f(20)=1$,
$f(21)=1$, $f(22)=2$, $f(23)=5$, $f(24)=0$, $f(25)=2$,
$f(26)=3$, $f(27)=0$, $f(28)=1$.

$f(1)=f(a\cdot\frac{1}{a})=f(a)+f(\frac{1}{a})=0 \to f(\frac{1}{a})=-f(a)$

$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)<0 \Rightarrow f(x)<f(y).$

1) $f(x)=0$, $f(y)>0$: x – 9 штук. y – 16 шт.
$\Rightarrow$ пар $9\cdot 16=144$.

2) $f(x)=1$, $f(y)>1$: x – 8 штук. y – 8 шт.
$\Rightarrow$ пар $8\cdot 8=64$.

3) $f(x)=2$, $f(y)>2$: x – 3 шт. y – 5 шт.
$\Rightarrow$ пар $3\cdot 5=15$

4) $f(x)=3$, $f(y)>3$: x – 2 шт., y – 3 шт.
$\Rightarrow$ пар $2\cdot 3=6$

5) $f(x)=4$, $f(y)>4$: x – 2 шт., y – 1 шт.
$\Rightarrow$ пар $2\cdot 1=2$.

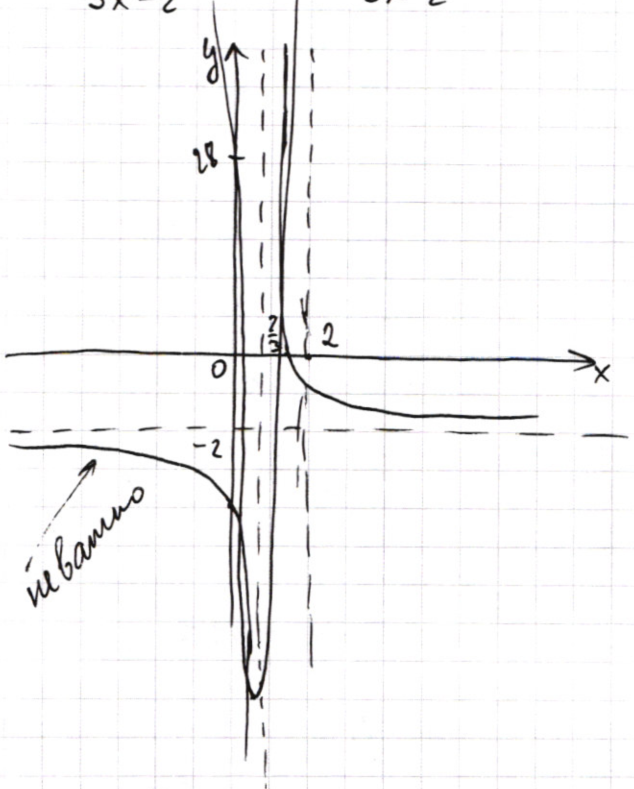
6) $f(x)=5$, $f(y)>5$ $\varnothing$.

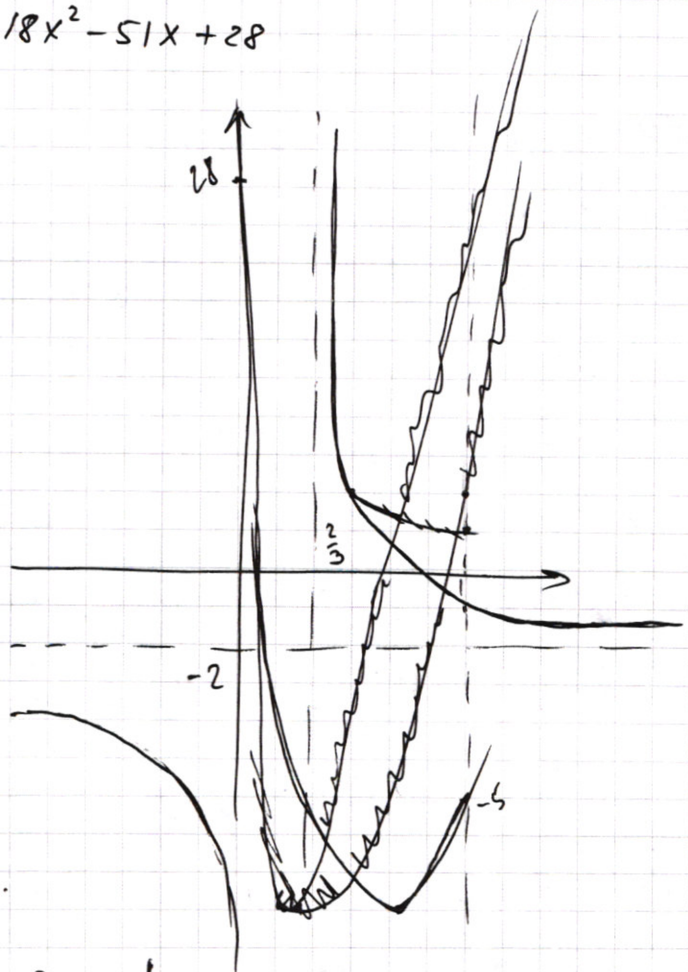
Всего пар $144+64+15+6+2=208+23=231$.

Ответ: 231.

Задача 6

$$\frac{8-6x}{3x-2}=-2+\frac{4}{3x-2}\geq ax+b\geq 18x^2-51x+28$$





$-2+\frac{4}{3x-2}=ax+b$ – нет корней.

$\frac{2}{3}a+b\geq 18\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-51\cdot\left(\frac{2}{3}\right)+28=2$ | условие для параболы

$2a+b\geq 18\cdot 2^2-51\cdot 2+28=-5$

$2a+b\leq -2+\frac{4}{6-2}=-2+1=-1.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6. (пр.)

~~2a+3b≥6~~

$$\begin{cases} b \geq 2 - \frac{2}{3}a \\ b \geq -2a-5 \\ b \leq -1-2a \end{cases}$$

$(3b-2a+6)^2 + 12(2b+8) \leq 0$

$-2(3x-2)+4 = (ax+b)(3x-2)$

$-6x+4+4 = 3ax^2+3bx-2ax-2b$

$3ax^2 + x(3b-2a+6) - 2b - 8 = 0$

$D = (3b-2a+6)^2 + 12(2b+8) \leq 0$

Задача 3

$26x-x^2 = a$, с учётом ОДЗ $a>0$.

исходное $\Leftrightarrow$ $a^{\log_5 12} + a \geq 13^{\log_5 a}$

$a^{\log_5 12} + a \geq a^{\log_5 13}$

$a^{\log_5 13} - a^{\log_5 12} \leq a$

$26x - x^2 = y$

$x_0 = -\frac{26}{-2} = 13$

$y_0 = -169 + 169\cdot 2 = 169$

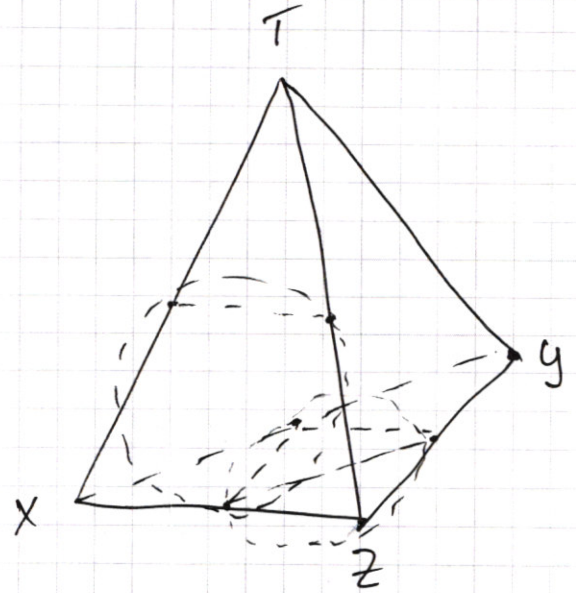
$a \in (0;169)$.

при $a \in (0;1]$ верно (т.к. $a^{\log_5 13} < a^{\log_5 12}$, т.к. $\log_5 12 < \log_5 13$)

$\Rightarrow$ $0 < 26x - x^2 \leq 1$.

$$\begin{cases} x(x-26)>0 \rightarrow x\in(-\infty;0)\cup(26;+\infty) \\ x^2-26x+1\geq 0 \\ D = 676-4 = 672 = (4\cdot\sqrt{42})^2 \qquad x_{1,2} = \frac{26 \pm 4\sqrt{42}}{2} = 13 \pm 2\sqrt{42} \\ x \in (-\infty;\ 13-2\sqrt{42}] \cup [13+2\sqrt{42};+\infty). \end{cases}$$

$x \in (-\infty;0)\cup(26;+\infty)$



$xy = \sqrt{3}$

$tx = \sqrt{2}$

$Tz = 2$

$$\begin{array}{r} \times 51 \\ 51 \\ \hline 51 \\ 255 \\ \hline 2601 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times 28 \\ 72 \\ \hline 56 \\ 196 \\ \hline 2016 \end{array}$$

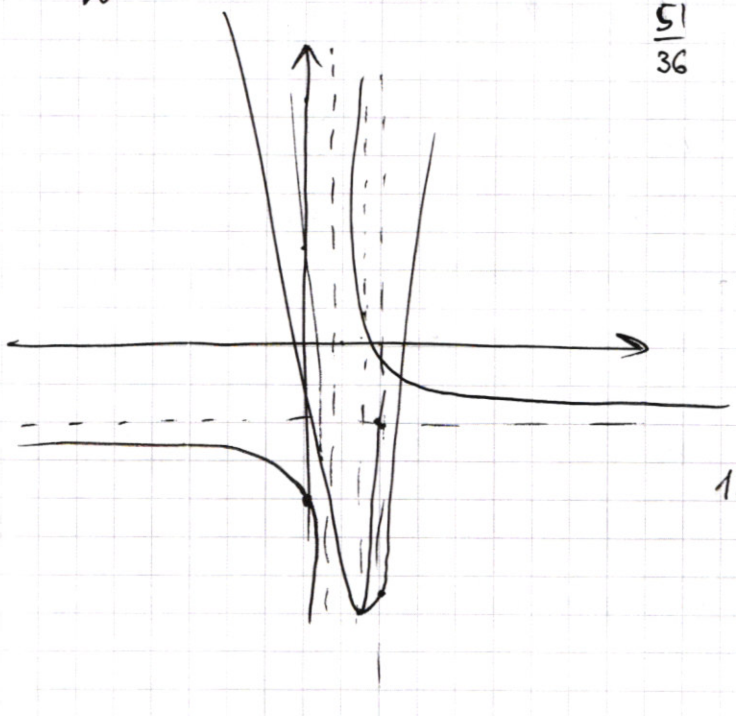
$$\begin{array}{r} -2601 \\ 2016 \\ \hline 595 \end{array}$$

$18x^2 - 51x + 28 \le ax + b \le \frac{\cancel{8} - 6x}{3x-2} = \frac{-2(3x-2)+4}{3x-2} =$

$= -2 + \frac{4}{3x-2}$

$D = 2601 - 2016 =$

$\frac{51}{36}$



$\frac{51^2}{72} - \frac{51^2}{36} + 28 = -\frac{51^2}{72} + 28 =$

$= -\frac{2601}{72} + 28 < 0$

$$\begin{array}{r|l} -2601 & 72 \\ 216 & \overline{36} \\ 441 & \end{array}$$

$18 \cdot \frac{4}{9} - 51 \cdot \frac{2}{3} + 28 = 8 - 34 + 28 = 2$

$\frac{2}{3}a + b > 2$

$-2 + \frac{4}{6-2} = -2 + \frac{4}{4} = -1.$

$18 \cdot 4 - 102 + 28 = -30 + 28 = -2$

$2a + b \le -1.$

$2a + b \ge -2$

$a^{\log_5 12} + a \ge a^{\log_5 13}$

$26x - x^2 = 5$

$x^2 - 26x + 5 = 0$

$D = 676 - 20 = 656$ ~~[illegible]~~

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2.

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

ОДЗ: $xy-6x-y+6\geq 0$

$(x-1)(y-6)\geq 0$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \quad \uparrow^2 \ (y\geq 6x) \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

$y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6$

$y^2+y(1-13x)+36x^2+6x-6=0$

$D=169x^2-26x+1-144x^2-24x+24=25x^2-50x+25=25(x-1)^2$

$$y_{1,2}=\frac{13x-1\pm(5x-5)}{2}=\left[\begin{array}{ll}\frac{18x-6}{2}=9x-3 & 1)\\ \frac{8x+4}{2}=4x+2 & 2)\end{array}\right.$$

1) $9(x-1)^2+(9x-3-6)^2=90$

$9(x-1)^2+81(x-1)^2=90$

$(x-1)^2=1 \rightarrow \left[\begin{array}{lll} x=2 & y=15 & 15\geq 12 \ ✓ \\ x=0 & y=-3 & y\geq 6x \Rightarrow \text{не подх.}\end{array}\right.$

2) $9(x-1)^2+(4x+2-6)^2=90$

$9(x-1)^2+16(x-1)^2=90$

$(x-1)^2=\frac{90}{25} \quad (x-1)^2=\frac{18}{5} \rightarrow x-1=\pm\frac{3\sqrt2}{\sqrt5} \rightarrow x=1\pm\frac{3\sqrt2}{\sqrt5}$

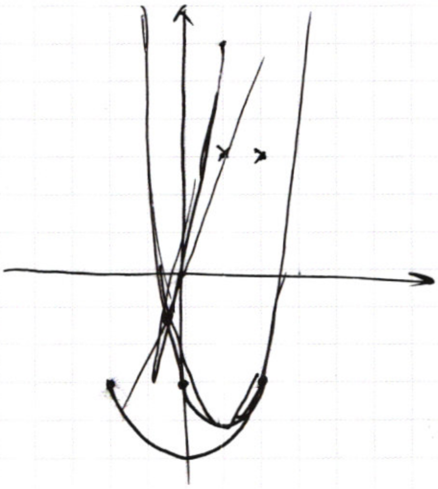
$x=1+\frac{3\sqrt2}{\sqrt5} \quad y=4\cdot\left(1+\frac{3\sqrt2}{\sqrt5}\right)+2=6+\frac{12\sqrt2}{\sqrt5}$

$6+\frac{12\sqrt2}{\sqrt5}\geq 6\left(1+\frac{3\sqrt2}{\sqrt5}\right)=6+\frac{18\sqrt2}{\sqrt5}$ – неверно $\Rightarrow$ не подх.

$x=1-\frac{3\sqrt2}{\sqrt5} \quad y=4\left(1-\frac{3\sqrt2}{\sqrt5}\right)+2=6-\frac{12\sqrt2}{\sqrt5}$

$6-\frac{12\sqrt2}{\sqrt5}\geq 6\left(1-\frac{3\sqrt2}{\sqrt5}\right)=6-\frac{18\sqrt2}{\sqrt5}$ – верно.

Ответ:
$x=2 \quad y=15$
или
$x=1-\frac{3\sqrt2}{\sqrt5} \quad y=6-\frac{12\sqrt2}{\sqrt5}$



$9 \cdot 1 +$

$9(x-1)^2+(6x-6)^2=90$

$(x-1)^2+4(x-1)^2=10$

$(x-1)^2=2$

$x-1=\pm\sqrt{2}$

$x=1\pm\sqrt{2}$

$y^2+y(1-13x)+36x^2+6x-6=0$

$D=169x^2-26x+1-144x^2-24x+24=25x^2-50x+25=25(x-1)^2$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(1)=2f(1) \to f(1)=0$

$f(p)=[p/4]$

$f($

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(4)=2f(2)=0$

$f(5)=1$

$f(6)=0$

$f(7)=1.$

4 5 6 7 8 9 10 11

12 13 14 15 16 17

18 19 20 21 22

23 24 25 26 27 28

$f(14)=f(2)+f(7)=1.$

$\frac{x}{y}\in[1;7].$

$f(a\cdot\frac{1}{a})=f(a)+f(\frac{1}{a})=0$

$a\in N$

$f(\frac{1}{a})\le 0.$ $a\in[4;28]$

при $a=p$ $=0$

$f(\frac{b}{a})=f(b)+f(\frac{1}{a})=f(b)-f(a)$

$f(b)<f(a)$?

$\sin(2(\alpha+\beta)) = \cancel{2\sin(\alpha+\beta)}\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cdot \cos x$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$x = \sin 2\alpha \ , \ y = \cdot$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \rightarrow \cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

1) $+$ $\quad -\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$4\sin 2\beta - \cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

~~$x = -\frac{1}{\sqrt{17}}$~~

~~$x^2+y^2 = 1$~~

~~$xa + yb + c = -\frac{2}{17}$~~

$a^2+b^2 = 1$

$\sin(\alpha+\beta) = a, \ \cos = b$

$2ab = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \rightarrow \underset{a}{\sin 2\alpha} \cdot \underset{x}{\cos 2\beta} + \underset{by}{\sin 2\beta} \cdot \underset{b}{\cos 2\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta) \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$(\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha)\cos 2\beta + \sin 2\beta(\cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta - \sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta)$
$+ \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$ax + by = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad \uparrow^2 \quad a^2x^2 + b^2y^2 + 2abxy = \frac{1}{17}$

$a^2+b^2 = 1 \quad \underline{a^2x^2} + b^2y^2 + a^2y^2 + b^2x^2 = 1$

$x^2+y^2 = 1 \quad a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy = ay(ay-bx) + bx(bx-ay) =$

$(ax+by)x + y(bx-ay) + a = -\frac{2}{17} \quad = (ay-bx)^2 = \frac{16}{17}$

$ax^2 + x(by+by) - ay^2 + a + \frac{2}{17} = 0 \quad \cos(2\beta+2\alpha) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$D = 4b^2y^2 - 4a(a + \frac{2}{17} - ay^2) = 4b^2y^2 + 4a^2y^2 - 4a^2 - \frac{8}{17}a$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha (2\cos^2 2\beta - 1) + 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\cancel{2}\cos^2 2\beta \cdot \sin 2\alpha + \cancel{2}\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{17}$

$\cos 2\beta (\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha) = -\frac{1}{17}$

$\cos 2\beta \cancel{\cdot} \cdot \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{17}$

$\cos 2\beta = -\frac{1}{17} \cdot \left(-\frac{\sqrt{17}}{1}\right) = \frac{1}{\sqrt{17}} \to \sin 2\beta = \pm \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

① $\frac{1}{\sqrt{17}} \sin 2\alpha + \frac{4}{\sqrt{17}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1 \quad \uparrow^2$

$\sin^2 2\alpha + 8\sin 4\alpha + 16\cos^2 2\alpha = 1$

$8\sin 4\alpha + 15\cos^2 2\alpha = 0$

$16\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha + 15\cos^2 2\alpha = 0$

$\cos 2\alpha = 0 \quad 16\sin 2\alpha + 15\cos 2\alpha = 0$

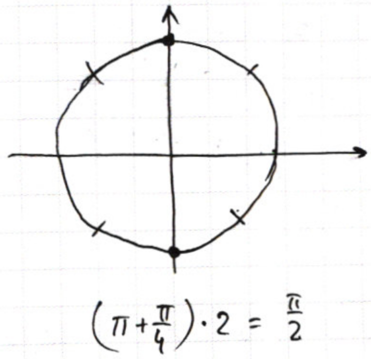
$$\begin{array}{r|l} -1156 & 4 \\ \underline{8} & \overline{289} \\ -35 & \\ \underline{32} & \\ 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} -34 \\ \underline{16} \\ 18 \end{array}$$

$\cos 2\alpha = 0 \quad \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 2\alpha = \pm 1$

$\cos\alpha \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}$

$\sin\alpha = \pm\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$



$\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \cdot 2 = \frac{\pi}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___

(Нумеровать только чистовики)

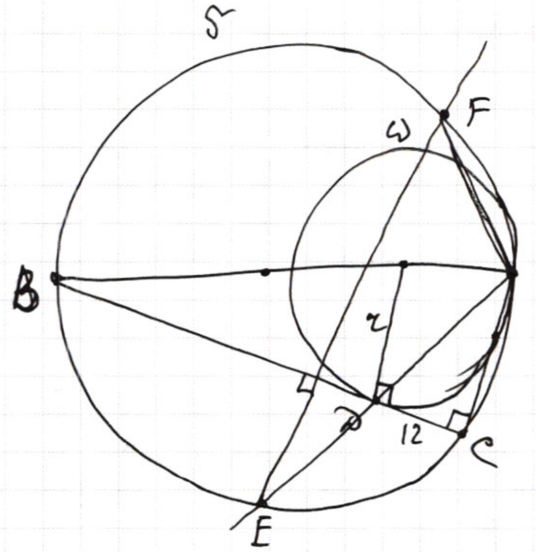
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$R - ?$

$r - ?$

$\angle AFE - ?$

$S_{AFE} - ?$

$BD = 13$

$CD = 12$

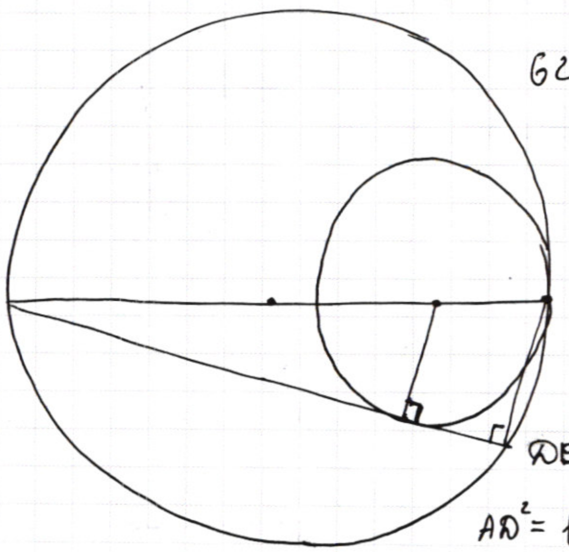
$\frac{13}{25} = \frac{r}{AC}$

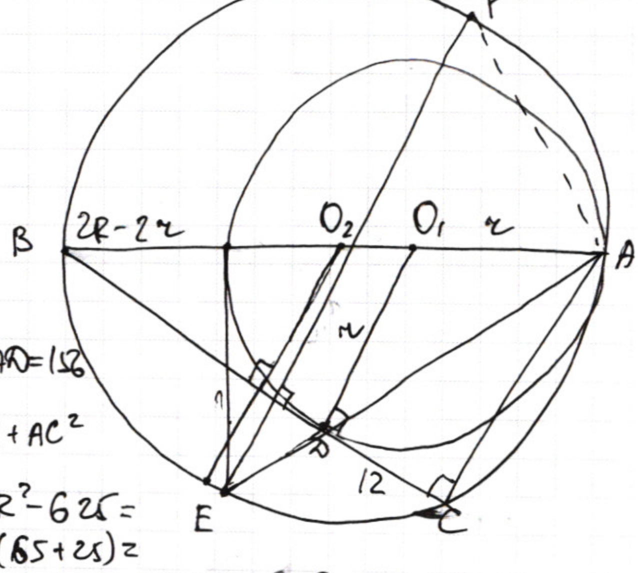
$AC^2 = 4R^2 - 625$

$\frac{169}{625} = \frac{r^2}{4R^2 - 625}$

$625r^2 = 676R^2 - 169 \cdot 625$

$\times\ 26 \cdot 26$: 156, 52, 676





$DE \cdot AD = 156$

$AD^2 = 144 + AC^2$

$(2R-2r) \cdot 2r = 169$

$169 + 4r^2 - 4Rr = 0$

$625r^2 - 676R^2 + 625(4Rr - 4r^2) = 0$

$-1875r^2 - 676R^2 + 2500Rr = 0$

$AC^2 = 4R^2 - 625 =$
$= (65-25)(65+25) =$
$= 40 \cdot 80 = 3600 \to AC = 60$

$\times\ 625 \cdot 3 = 1875$

$\times\ 676 \cdot 4 = 2704$

$416 \,|\, 4$ → 104

$\times\ 2704 \cdot 1875$: 13520, 18928, 21632, 2704, 5070000

~~6250000~~ − ~~5070000~~ = ~~1180000~~

$\times\ 144 \cdot 21$: 144, 288

$- 3744 \,|\, 9$ → 416; 36, 14, 9, 54

$900 + 36$ 936

$2 \cdot 3 \cdot 2$ $12\sqrt{21}$ 104, 21

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} = \sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 3x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \qquad y \geq 6x$$

$$3(x-1)^2+(y-6)^2=90$$

$$y^2+36x^2-12xy=xy-6x-y+6$$

$$y^2+36x^2-13xy+6x+y-6=0$$

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)} \qquad 26x-x^2=y>0$$

$$y^{\log_5 12}+y \geq 13^{\log_5 y}$$

$$y^{\log_5 12}+y \geq y^{\log_5 13}$$

$$y\left(y^{\log_5 12-1}+1-y^{\log_5 13-1}\right) \geq 0$$

$$y^{\log_5 12}+y \geq y^{\log_5 13}$$

$$y \geq y^{\log_5 12}\left(-1+y^{\log_5 \frac{13}{12}}\right)$$

$$y^{\log_5 \frac{12}{5}}-y^{\log_5 \frac{13}{5}}+1 \geq 0 \qquad -\left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5 y}+\left(\frac{12}{5}\right)^{\log_5 y}+1 \geq 0$$

$$\frac{1}{2}\log_5 12^2=\log_{25}144 \qquad \frac{12^{\log_5 y}}{y}-\frac{13^{\log_5 y}}{y}+1 \geq 0$$

$$\log_{25}169 = \log_{25}$$

$$12^{\log_5 y}-13^{\log_5 y}+y \geq 0$$

$$\log_5 12+\log_5 13=$$

$$\log_5\frac{13}{5}\cdot\log_5 13\cdot y^{\log_5\frac{13}{25}}$$

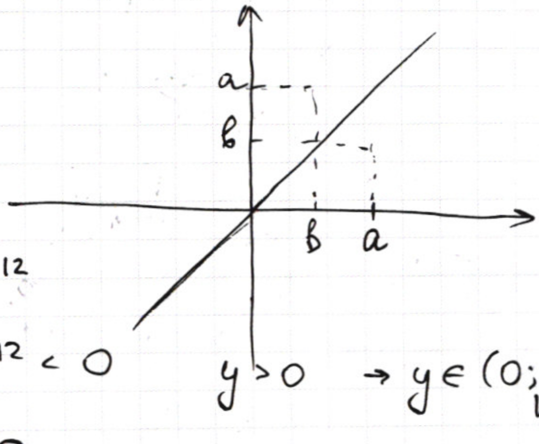
$$y^{\log_5 13}-y^{\log_5 12}-y \leq 0$$

$$\Rightarrow \log_5 13\cdot y^{\log_5\frac{13}{5}}-\log_5 12\cdot y^{\frac{12}{5}}-1 \leq 0$$

$$y^{\log_5 13} \leq y^{\log_5 12}+y$$

$$\nearrow \qquad \nearrow \qquad \nearrow$$

$$y^{\log_5 13}-y^{\log_5 12} \leq y$$



$y\in(0;1)$: $\quad y^{\log_5 13}<y^{\log_5 12}$

$$y^{\log_5 13}-y^{\log_5 12}<0$$

$y>0 \quad \to y\in(0;1)$ подх.

$y \geq 1$: $\quad y^{\log_5 13}-y^{\log_5 12}=a$

$$a^{\log_5 13}-a^{\log_5 12}=y$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)