МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leqslant ax+b \leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

$x^2-5xy+x+4y^2+2y-2=0$

$x^2+x(1-5y)+4y^2+2y-2=0$

$25y^2-10y+1-16y^2-8y+8=0$

$9y^2-18y+9=0$

$9(y-1)^2$

$x=\frac{5y-1\pm 3(y-1)}{2}$

$\frac{5y-1-3y+3}{2}$

$\frac{2y+2}{2}=y+1$

$\frac{5y+3y-3-1}{2}=\frac{8y-4}{2}=4y-2$

$x-2=y-1$

$x-2=4y-4$

$2^6=$

$4^3=$

$(2^2)^4=4^4=256$

16

$x=y+1$

$x=4y-2$

$(x-y-1)(x-4y+2)=0$

$x^2-4xy+2x-xy+4y^2-2y$

$-x+4y-2$

$x^2-5xy+4y^2+2y+x-2$

$x=2-\frac{\sqrt{10}}{2}$

$y=1-\frac{\sqrt{10}}{2}$

$2-\frac{\sqrt{10}}{2}-2+\frac{2\sqrt{10}}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

$x-2y$

$(3^4)^5$

$2-\frac{2\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}+\frac{10}{4}=\frac{9}{2}-\frac{3\sqrt{10}}{2}$

$=\frac{9-3\sqrt{10}}{2}$

$(2^2)^3=4^3=64$

2^5

$-x+2y=-2+\frac{\sqrt{10}}{2}-2+\frac{2\sqrt{10}}{2}=$

$=-4+\frac{3\sqrt{10}}{2}$

$2-\frac{\sqrt{10}}{2}\geq 2-\frac{2\sqrt{10}}{2}$

$x^{\log_{12}\frac{13}{12}}=12^{\log_{12}x\cdot\log_{12}\frac{13}{12}}=$

$=\left(\frac{13}{12}\right)^{\log_{12}x}$

$\frac{9-3\sqrt{10}}{2}+\frac{3\sqrt{10}-8}{2}+2=\frac{1}{2}+2=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

$5^{\log_{12}x}+x=x^{\log_{12}13}$

$x=12^{\log_{12}x}$

$\left(\frac{5\cdot 12}{12}\right)^{\log_{12}x}+x=x^{\log_{12}13}$

$\left(\frac{5}{12}\right)^2+1$

$\left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12}x}\cdot x+x=x^{\log_{12}13}$

$x\quad\left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12}x}+1=x^{\log_{12}\frac{13}{12}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$x^2+18x = t$, $t > 0$

$\cancel{5^{\log_{12} t}}$

$5^{\log_{12} t} + t = t^{\log_{12} 13}$

$5^{\log_{12} x} + x = x^{\log_{12} 13}$

$5^{\log_8 5}$

$5^{\frac{1}{\log_5 8}}$

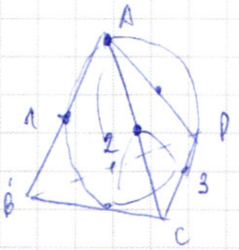
$f(xy) = [\frac{x}{4}] + [\frac{y}{4}]$

$5^{\log_{12} x}$

$f(\frac{x}{y}) < 0$

$t = 5^{\log_5 t}$

$\Rightarrow f(x) + f(\frac{1}{y})$



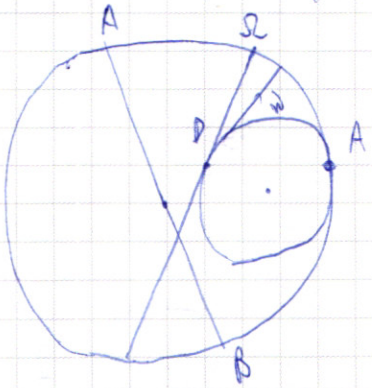
$8x^2 + 30x + 17 = 0$

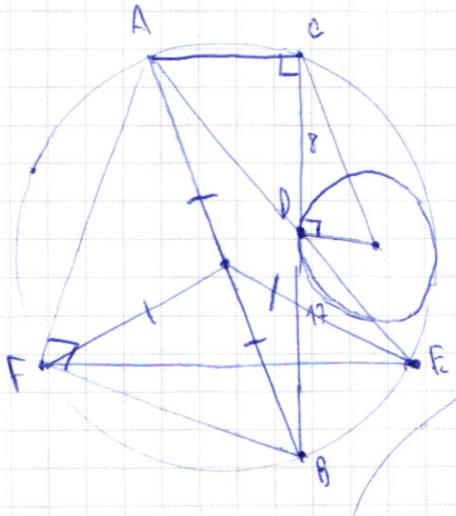
$D = 225 - 136 = 89$

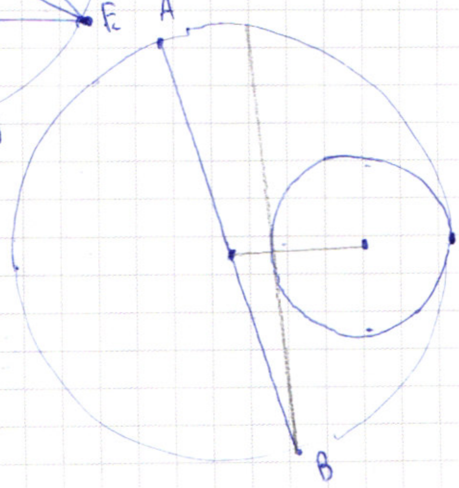
$3x + \frac{2}{4x+3} \leq ax + b \leq -8x^2 - 30x - 12$

$5^{\log_{12} x} = t$

$x = t^{\log_5 12}$



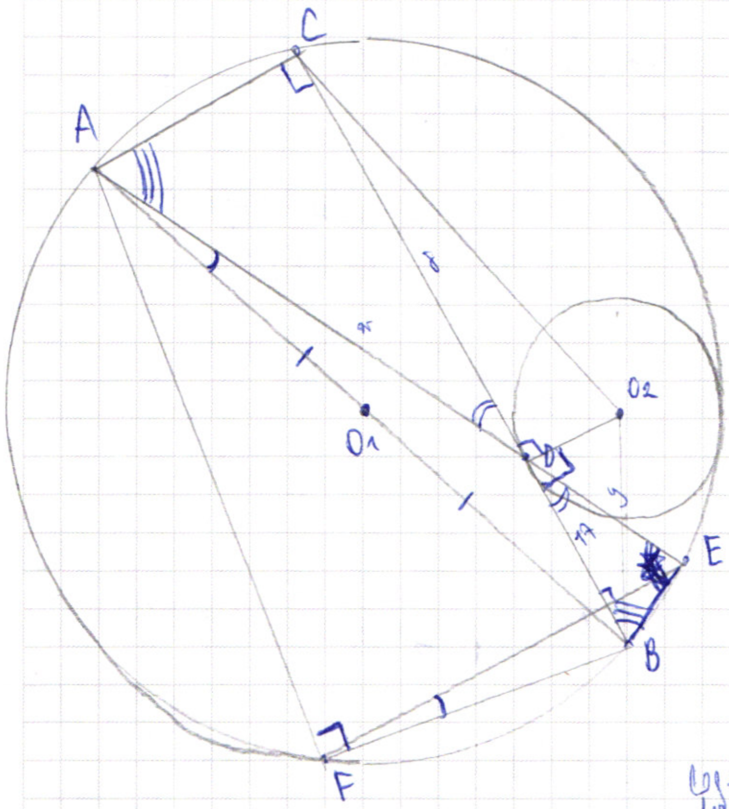


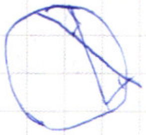


$\frac{9\pi}{9 \cdot 4}$

$+ \operatorname{tg} \frac{9}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$8\cdot17 = xy$

$\frac{x}{8} = \frac{y}{17}$

$x = \frac{8y}{17}$ $= \frac{8y^2}{17}$

$8\cdot17 =$

$y^2 = 17^2$

$y = 17$

$x^2+18x-144>0$

$x = 81+144 = 225$ $x = 144$

-9 ± 15 6 -24

$25+144=169$ $(12^{\log_{12}12})$ 169

$5^{\log_{12}x} + x = x^{\log_{12}13}$

$12^{\log_{12}x} = x$

$5^{\log_{12}x} = t$

$\frac{\log_t x}{\log_t 12}$

$\log_{12}x$

$\log_{12}$

$\log_2 4$ $\frac{1}{\frac{1}{2}}$

$\frac{\log_4 4}{\log_4 2}$

$\log_3 9$

$\log$

$5^{\log_{12}x} = 6$

$\log_{12}x = \log_5 t$

$\frac{\log_5 x}{\log_5 12} = \log_5 t$

$\log_5 x = \log_5 t \log_5 12$

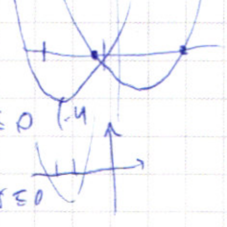
$x\ 5^{\log_5 t \log_5 12} =$

$= t^{\log_5 12}$

$-8x^2-30x-17 \geq ax+b$

$8x^2+x(a+3)+b+17\le0$

для всех x $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$



$f(-\frac{11}{4}),\ f(-\frac{3}{4})\le0$

$8\frac{121}{16} - \frac{11(a+3)}{4} + b+17 \le 0$ $|\cdot4$

$242-11a-33+4b+68\le0$

$4b-11a+209+68\le0$

$\boxed{4b-11a+277\le0}$

$\log_2 x = 4$

$x = 2^4$

$5^{\log_{12}x} = t$

$x = t^{\log_5 12}$ $= 5^{\log_{12}\log_5 12}$

$\frac{8\cdot9}{16} - \frac{3(a+3)}{4} + b+17\le0$ $|\cdot4$

$18-3a-9+4b+68\le0$

$\boxed{4b-3a+77\le0}$

$\left(\frac{5}{12}\right)^t - \left(\frac{13}{12}\right)$

$\left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12} x} - \left(\frac{13}{12}\right)^{\log_{12} x} + 1 = 0$

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b$

$\left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12} x} = -1 + \left(\frac{13}{12}\right)^{\log_{12} x}$

$\frac{12x+11-4ax^2-4bx-3ax-3b}{4x+3} \le 0$

$x = -\frac{3}{4}$

$\left(\frac{5}{12}\right)^t + 1 = \left(\frac{13}{12}\right)^t$

$\left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12} t} - \left(\frac{13}{12}\right)^{\log_{12} t} + 1 = 0$

$\frac{4ax^2 - 12x + 4bx + 3ax - 11 + 3b}{4x+3} \le 0$

$\frac{5^{\log_{12} t}}{12} - \frac{13^{\log_{12} t}}{12} + 1$

$\frac{x^2 \cdot 4a + x(4b+3a-12) + 3b - 11}{4x+3} \le 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

если x ~~часто~~ простое, то $f(x) \ge 0$.

$5^x - 13^x + 12 = 0$

$f(1) = 0$.

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$\left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12} t} + 1 - t^{\log_{12} 13 - 1} = 0$

$\left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12} t} + 1 - t^{\log_{12} \frac{13}{12}} = 0$

$f((-a)(-b)) = f(-a) + f(-b)$

$f(ab) = f(-a) + f(-b)$

$t = 12^{\log_{12} t}$

$\frac{24}{2} = 12 = 4 \cdot 3$

$\frac{x}{y} = ab$

$12^{\log_{12} t \cdot \log_{12} \frac{13}{12}}$

$\frac{24}{4} = 2 \cdot 3$

$= \left(\frac{13}{12}\right)^{\log_{12} t}$

$\left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12} t} \cdot t$

$f\left(\frac{24}{4}\right) = f(-2) + f(-3)$

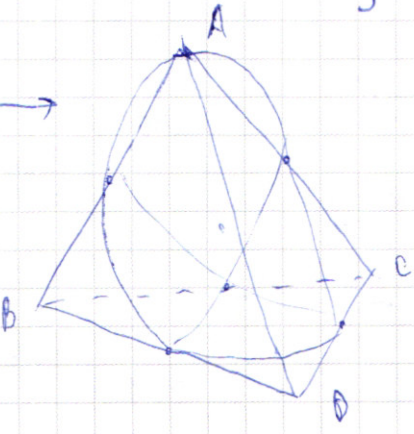
$\left(\frac{5 \cdot 12}{12}\right)^{\log_{12} t} =$

$5^{\log_{12} t} + t = t^{\log_{12} 13}$

$5^{\log_{12} t}$

$5^{\log_{12} x} + x = x^{\log_{12} 13}$

$5^{\log_{12} x} = t$



$x = t^{\log_5 12}$

$x^{\log_{12} 13} = m$

$x^2 = 4$

$x = m^{\frac{1}{\log_{12} 13}}$

$x = m^{\log_{13} 12}$

$a^x + 1 \ge b$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta = -\frac{4}{5}$

$2\cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta = -\frac{\sqrt5}{5} \\ \sin 2\alpha \cos^2\beta = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$\cos^2\beta = \frac{2}{\sqrt5} = \frac{2\sqrt5}{5}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\sin 2\alpha \cos^2\beta$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$2\sin 2\alpha\cos^2 2\beta - \cancel{\sin 2\alpha} + 2\cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta \sin 2\alpha \cos^2 2\beta + \cancel{\sin 2\alpha} = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\alpha \sin 2\beta(1+2\cos 2\beta)$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta(1+2\cos\beta) +$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta(1+2\cos 2\beta) - \sin 2\alpha + \cos 2\alpha$

$+\cos 2\alpha \sin 2\beta(1+2\cos 2\beta) - \cancel{\sin 2\alpha} = -\frac{\sqrt5}{5} - \frac{4}{5}$

$\frac{-1}{\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$

$\frac{-1}{1-\frac{1}{4}}$

$(\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta)(1+2\cos 2\beta) = \frac{4+\sqrt5}{5}$

$\frac{2tg\alpha}{1-x}$

$\frac{2t}{1-t}$

$\sin(2\alpha+2\beta) =$

$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$ $\frac{\sin 2\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \sin 2\alpha\cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha =$

$\frac{2t}{1-t^2} = \frac{\sqrt3}{3}$

$2\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$

$= 2\sin 2\alpha\cos^2 2\beta - \cancel{\sin 2\alpha}\ 2\cos 2\alpha \sin 2\beta + \cancel{\sin 2\alpha} =$

$6t = \sqrt3 - \sqrt3 t^2$

$t^2\sqrt3 + 6t - \sqrt3 = 0$

$D_1 = 9+$

$$= \begin{cases} 2\sin 2\alpha\cos^2 2\beta + 2\cos 2\alpha\sin 2\beta\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \\ \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \end{cases}$$

~~$2tg 2\alpha\cos 2\beta + 2$~~

$$\begin{cases} tg 2\alpha\cos^2 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\beta = \frac{-2}{5\cos 2\alpha} \\ tg 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta = -\frac{\sqrt5}{5\cos 2\alpha} \end{cases}$$

$tg\alpha\cos 2\beta(\cos 2\beta + \sin 2\beta) = -\frac{2}{5\cos 2\alpha}$

$tg\alpha(\cos 2\beta + \sin 2\beta) = -\frac{\sqrt5}{5\cos 2\alpha}$

$\alpha = -\frac{\pi}{12}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} = \frac{2\sqrt5}{5}$ $\sqrt{\frac{25-20}{25}} = \frac{\sqrt5}{5}$

$2\alpha = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$

$2\alpha = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$

$tg 2\alpha \frac{2\sqrt5}{5} + \frac{\sqrt5}{5} = -\frac{\sqrt5}{5\cos 2\alpha}$ $\quad 1 \cdot \frac{5}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cos^2 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = +\frac{2}{5}\cdot\sqrt5$

$2tg 2\alpha + 1 = -\frac{1}{\cos 2\alpha}$

~~$1+tg^2\alpha =$~~

$1+tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$$\begin{cases} \cos 2\beta(tg 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta) = \frac{-2}{5\cos 2\alpha} \\ tg 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta = \frac{-\sqrt5}{5\cos 2\alpha} \end{cases}$$

$\sin 2\alpha \frac{2\sqrt5}{5} = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad -\frac{\sqrt5}{5}$

$30°$

$1+tg\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\sin 2\alpha = -\frac{1}{2}$

$1+\frac{\sqrt3}{3} = \frac{1}{\frac{3}{4}}$

$1+tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\quad tg 2\alpha = \frac{\sqrt3}{3}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} = \frac{2\sqrt5}{5} \Rightarrow \sin 2\beta = \frac{\sqrt5}{5}$.

$1+tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$2tg 2\alpha + 1 = -\frac{1}{\cos 2\alpha}$

$\sin 2\alpha = -\frac{1}{2}$

$\cos 2\alpha = \pm\frac{\sqrt3}{2}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 1 = 0$

$\frac{2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 1}{\cos 2\alpha} = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$5^{\log_{12} t} + t = t^{\log_{12} 13}$

$-\cos 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$-\cos^2 2\beta = -\frac{2}{5}$ $\cos^2 2\beta = \frac{2}{5}$

$\frac{5^{\log_{12} t}}{t} + 1 = t^{\log_{12} 13 - 1}$

$5^{\log_5 t}$

~~sin 2α~~ cos

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$1 - 2\sin^2\alpha$

$\frac{5^{\log_{12} t}}{5^{\log_5 t}} + 1 = t^{\log_{12} 13 - 1}$ $a^{\log_a b}$

$t = \log$

$\sin\alpha = 0 \Rightarrow \cos 2\alpha = 1$

$\sin 2\alpha = 0$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta = \frac{-\sqrt{5}}{5}$

$\sin 2\beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin 2\alpha \cos^2 2\beta = \frac{-2}{5}$

$\sin 2\beta \cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta (\cos 2\beta - 1) + \cos 2\alpha \sin 2\beta (\cos 2\beta - 1) = -\frac{2}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin(2\alpha + 2\beta)(\cos 2\beta - 1) = \frac{\sqrt{5} - 2}{5}$

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y - 12 = 0 \end{cases}$$

$-\frac{\sqrt{5}}{5}(\cos 2\beta - 1) = \frac{\sqrt{5} - 2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5}} = \frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}$

$x^2 - 4x + 9y^2 - 18y - 12 = a(x \quad y \quad 1)(x \quad y \quad 1)$

$\sin 2\beta =$

$D_1 = 4 - 9y^2 + 18y + 12 = -9y^2 + 18y + 16$

$\cos 2\beta - 1 = \frac{2 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$x(y-1) - 2(y-1)$

$\cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$x - 2y = \sqrt{(x-2)(y-1)}$

$(x-2)^2 - 4 + (3y - 3)^2 - 9 - 12 = 0$

$\sqrt{ab}$

$\boxed{(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 5^2}$

$a^2 + 9b^2$

$\Rightarrow$ ~~x~~

$(x-2)^2$

$x - 2y = \sqrt{(x-2)(y-1)}$

$(x-2)^2 = -(3y-3)^2 + 5^2$

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2 + (3y-3)^2 = 5^2 \end{cases}$$

$f(x) = \left[\frac{x}{4}\right]$

$(x-2)^2 = (5 -$

$f(y) =$

$5^{\log_{12}(x^2 + 18x)} + x^2 + 18x \geq |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13}$

$a^1 \vee a^{\log_{12} 13}$

$x^2 + 18x = t$

$f(a) = \left[\frac{a}{4}\right]$

$f(b) = \left[\frac{b}{4}\right]$ $5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$5^{\log_{12} t} \geq t^{\log_{12} 13} - t$ $t(t^{\log_{12} 13 - 1} - 1)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 1) $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

2) $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta =$

$= \sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1) + \cos 2\alpha \cdot 2\sin 2\beta\cos 2\beta + \sin 2\alpha$

$= 2\sin 2\alpha\cos^2 2\beta - \cancel{\sin 2\alpha} + 2\cos 2\alpha\cos 2\beta\sin 2\beta + \cancel{\sin 2\alpha} =$

$= 2\sin 2\alpha\cos^2 2\beta + 2\cos 2\alpha\sin 2\beta\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \quad |:2$

$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} & |: \cos 2\alpha \neq 0 \\ \sin 2\alpha\cos^2 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta\cos 2\beta = -\frac{2}{5} & |: \cos 2\alpha \neq 0 \end{cases}$

При $\cos 2\alpha = 0$ система не имеет решений

Система 1

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta = -\frac{\sqrt5}{5\cos 2\alpha} & (1) \\ \operatorname{tg} 2\alpha\cos^2 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\beta = \frac{-2}{5\cos 2\alpha} & (2) \end{cases}$$

Поделим (2) на (1): ~~умножим~~ $\cos 2\beta = \frac{-2}{5\cos 2\alpha}\cdot\frac{5\cos 2\alpha}{-\sqrt5} = \frac{2\sqrt5}{5}$

$\Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{4\cdot5}{25}} = \pm\frac{\sqrt5}{5}$

1) $\sin 2\beta = \frac{\sqrt5}{5}$ Подставим в (1): $\operatorname{tg} 2\alpha\cdot\frac{2\sqrt5}{5} + \frac{\sqrt5}{5} = \frac{-\sqrt5}{5\cos 2\alpha} \quad \Big|\cdot\frac{5}{\sqrt5}$

$2\operatorname{tg} 2\alpha + 1 = -\frac{1}{\cos 2\alpha}$

$\frac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} + 1 = -\frac{1}{\cos 2\alpha}$

$\frac{2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 1}{\cos 2\alpha} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 1 = 0 \\ \cos 2\alpha \neq 0 \end{cases}$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 + 1 = 0 \quad |:2$

$\cos\alpha(2\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

$\cos\alpha \neq 0$, т.к. по условию $\operatorname{tg}\alpha$ определён.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1

(Нумеровать только чистовики)

$2\sin\alpha+\cos\alpha=0 \quad |:\sqrt{5}$

$\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin\alpha+\frac{\sqrt{5}}{5}\cos\alpha=0$

$\sin(\alpha+\varphi)=0$

$\alpha+\varphi=\pi n$

$\alpha=\pi n-\varphi=\pi n-\arcsin$

$2\sin\alpha+\cos\alpha=0 \quad |:\cos\alpha\neq 0$, т.к. не является решением и $tg\alpha$ существует.

$2tg\alpha+1=0$

$tg\alpha=-\frac{1}{2}$

Вернёмся к системе 1: $\begin{cases} tg2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta=\frac{\sqrt{5}}{5\cos2\alpha} \\ tg2\alpha\cos^22\beta+\sin2\beta\cos2\beta=\frac{-2}{5\cos2\alpha}\end{cases}$

Пусть $tg2\alpha=0 \Rightarrow \cos2\alpha=\pm1$

$\sin2\beta=\frac{-\sqrt{5}}{5\cos2\alpha}$

$\sin2\beta\cos2\beta=\frac{-2}{5\cos2\alpha}$

$2\sin\alpha+\cos\alpha=0 \quad |:\cos\alpha\neq0$ (по условию)

$2tg\alpha+1=0$

$tg\alpha=-\frac{1}{2}$.

2) $\sin2\beta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$. Аналогично $tg2\alpha\frac{2\sqrt{5}}{5}-\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{-\sqrt{5}}{\cos2\alpha}$

$\frac{2\sin2\alpha-\cos2\alpha+1}{\cos2\alpha}=0$

Подставим $\sin2\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos2\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ в (2):

$\frac{4}{5}tg2\alpha+\frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}=-\frac{2}{5\cos2\alpha} \quad |\cdot\frac{5}{2}$

$2tg\alpha+1=-\frac{1}{\cos2\alpha}$

$\cos\alpha(2\sin\alpha-\cos\alpha)=0$

$\cos\alpha\neq0$

$\Rightarrow 2\sin\alpha-\cos\alpha=0 \quad |:\cos\alpha$

$\Rightarrow tg\alpha=\frac{1}{2}$

$tg\alpha=0 \Rightarrow \sin\alpha=0,\ \cos\alpha=\pm1 \Rightarrow \sin2\alpha=0,\ \cos2\alpha=1$ — удовлетворяет

Ответ: $\pm\frac{1}{2}$; 0

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases}$$

(2): $(x-2)^2-4+(3y-3)^2-9-12=0$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=5^2$

$x-2y\geqslant 0$

$\Rightarrow \uparrow^2 \quad (x-2y)^2=xy-x-2y+2$

$x^2-4xy+4y^2-xy+x+2y-2=0$

Разложим: $(x-y-1)(x-4y+2)=0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=y+1 \\ x=4y-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=y-1 \\ x-2=4(y-1) \end{array}\right.$$

1) $x-2=y-1$ в (2):

$(y-1)^2+9(y-1)^2=25$

$10(y-1)^2=25$

$(y-1)^2=\frac{5}{2}$

$y-1=\pm\frac{\sqrt5}{\sqrt2}=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

$y=1+\frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow x=2+\frac{\sqrt{10}}{2},$

$y=1-\frac{\sqrt{10}}{2} \Rightarrow x=2-\frac{\sqrt{10}}{2}.$

2) $x-2=4(y-1)$ в (2):

$16(y-1)^2+9(y-1)^2=25$

$25(y-1)^2=25$

$y-1=\pm1$

$\Rightarrow \quad y=2 \Rightarrow x=6$

$y=0 \Rightarrow x=-2$

$\Rightarrow \quad (6;2); \quad (-2;0); \quad \left(2+\frac{\sqrt{20}}{2}; 1+\frac{\sqrt{20}}{2}\right); \quad \left(2-\frac{\sqrt{20}}{2}; 1-\frac{\sqrt{20}}{2}\right).$

Заметим, что $x-2y \geqslant 0 \quad (x \geqslant 2y)$

$\Rightarrow (-2;0)$ – не удовлетворяет

$\left(2+\frac{\sqrt{20}}{2}; 1+\frac{\sqrt{20}}{2}\right)$ – не удовлетворяет.

Ответ: $(6;2)$;
$\left(2-\frac{\sqrt{20}}{2}; 1-\frac{\sqrt{20}}{2}\right)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

Пусть $x^2+18x = t$. $t>0$, т.к. является аргументом логарифма

$\Rightarrow |x^2+18x| = |t| = t$

$\Rightarrow 5^{\log_{12}t} + t \geqslant t^{\log_{12}13}$

$\left(\frac{5\cdot 12}{12}\right)^{\log_{12}t} + t \geqslant t^{\log_{12}13}$

$\left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12}t}\cdot 12^{\log_{12}t} + t \geqslant t^{\log_{12}13}$

$\left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12}t}\cdot t + t \geqslant t^{\log_{12}13}$ $\quad | : t \neq 0$

$\left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12}t} + 1 \geqslant t^{\log_{12}13 - 1}$

$\left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12}t} + 1 \geqslant t^{\log_{12}\frac{13}{12}}$

$t^{\log_{12}\frac{13}{12}} = \left(12^{\log_{12}t}\right)^{\log_{12}\frac{13}{12}} =$

$= \left(12^{\log_{12}\frac{13}{12}}\right)^{\log_{12}t} = \left(\frac{13}{12}\right)^{\log_{12}t}$

$\Rightarrow \left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12}t} + 1 \geqslant \left(\frac{13}{12}\right)^{\log_{12}t}$ $\quad (1)$

Заметим, что $y = \left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12}t} + 1$ – функция, убывающая на всей $D(y)$, т.к.

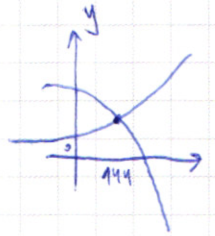
$\left(\frac{5}{12}\right) < 1 \Rightarrow \left(\frac{5}{12}\right)^a < \left(\frac{5}{12}\right)^b$ при $a > b$.

$y=\left(\frac{13}{12}\right)^{\log_{12}t}$ — функция, возрастающая на $D(y)$, т.к. $\frac{13}{12}>1$ и $\left(\frac{13}{12}\right)^{a} > \left(\frac{13}{12}\right)^{b}$ при $a>b$.

Рассмотрим уравнение $\left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12}t}+1=\left(\frac{13}{12}\right)^{\log_{12}t}$

Т.к. слева убывающая функция, а справа возрастающая, то если уравнение имеет корень, то только один.

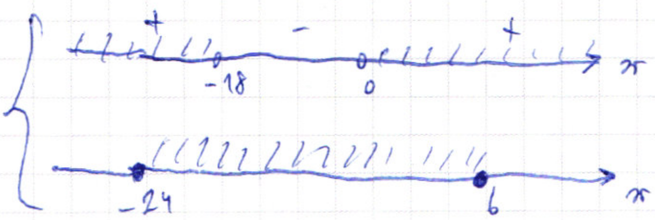
$t=144$ — удовлетворяет.



Значит решением неравенства является промежуток при t, меньших или равных 144, а точнее, т.к. $t>0$, решением является промежуток $t\in(0;144]$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+18x>0 \\ x^2+18x\le 144 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(x+18)>0 \\ x^2+18x-144\le 0 \end{cases} \qquad D_1=81+144=15^2$$

$$x_{1,2}=\frac{-9\pm15}{1}=\begin{matrix}6\\-24\end{matrix}$$



$\Rightarrow x\in[-24;-18)\cup(0;6]$.

Ответ: $x\in[-24;-18)\cup(0;6]$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

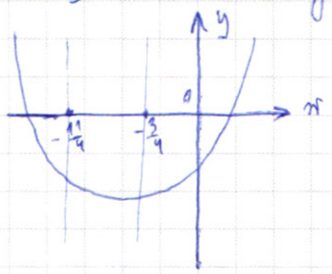
$$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$$

$$-8x^2-30x-17 \geqslant ax+b \qquad f(x)=8x^2+30x+ax+b+17$$

(1) $\quad 8x^2+30x+ax+b+17 \leq 0$ — параболa с ветвями вверх

Чтобы неравенство (1) выполнялось для всех x из промежутка $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$, необходимо и достаточно:

$$\begin{cases} f\left(-\frac{11}{4}\right) \leq 0 \\ f\left(-\frac{3}{4}\right) \leq 0 \end{cases}$$



$$f\left(-\frac{11}{4}\right) = 242-11a-33+4b+68 = 4b-11a+277$$

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = 18-3a-9+4b+68 = 4b-3a+77$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4b-11a+277 \leq 0 \\ 4b-3a+77 \leq 0 \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)