МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

© МФТИ, 2022

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$b = ak$, $c = ak^2$ (k - множ. геом. прогрессии)

$ax^2 + 2bx + c = 0 \iff ax^2 + 2akx + ak^2 = 0.$

$D = 4a^2k^2 - 4a^2k^2 = 0.$

$x = \frac{-2ak}{2a} = -\frac{k}{2}$ (это 4ый член геом прогрессии, поэтому

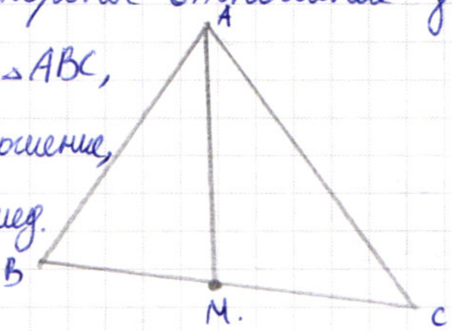
~~x=~~ $x = ak^3$; $ak^3 = -\frac{k}{2} \iff ak^2 = -\frac{1}{2}$, а т.к $c = ak^2$,

то 3ий член геом. прогрессии равен$(-\frac{1}{2})$

Ответ: $c = -\frac{1}{2}$

№2.

Докажем, что если в $\triangle$ бисс. и мед. перпендикулярны, то в этом $\triangle$ есть 2 стороны отношение длин которых равно $\frac{1}{2}$. Рассмотрим $\triangle ABC$,



где не выполняется данное отношение, не умаляя общности проведем мед. из A на сторону BC. т.к

$BM \neq AB$ и $AM \neq MC$ биссектрисы из вершин B и C не $\perp AM$, иначе к бисс оказалось высотой и получилось, что либо ~~BA=BM~~ $AB=BM$, либо $MC=AM$. Бисс. не может выходить из A т.к тогда бисс. должна была быть $\perp AM$, а т.к бисс. делит угол пополам, то одна половина оказалась бы больше 90°, т.е весь угол больше 180°, противоречие, тогда у искомого $\triangle$ следующие стороны: x, $2x$, y.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$x+2x+y=1200.$ ($x+2x>600$ из нер-ва $\cancel{\ne}\Delta$)

$3x>600 \iff x>200$

из нер-ва Δ $x+y>600.$ т.е $2x<\cancel{30}600$

$x<300$, Тогда нам подойдут треугольники где

$x\in[201;299]$, и x - целое. т.е всего таких треугольников 99

Ответ: 99

№3.

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0. \end{cases}$$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=2(x-1)^2+(y-2)^2-3=0.$

$\sqrt{xy-2x-y+2}=\sqrt{(1-x)(2-y)}.$

$(y-2x)^2=(1-x)(2-y)$

$1-x=a$; $2-y=b$; $y-2x=2a-b$

$$\begin{cases} (2a-b)^2=ab. \\ 2a^2+b^2-3=0. \end{cases}$$

$b=\sqrt{3-2a^2}$

$4a^2-4ab+b^2=ab.$

$4a^2-5a\sqrt{3-2a^2}+3-2a^2=0.$

$2a^2+3=5a\sqrt{3-2a^2}$ ($a\geq0$ т.к левая часть очев. больше 0) (квадрат и const)

$4a^4+12a^2+9=75a^2-50a^4.$

$6a^4-7a^2+1=0.$

$(a^2-1)(6a^2-1)=0.$ (убираем отриц. корни)

$a=\pm1.$ $a=\pm\sqrt{\frac{1}{6}}.$

При $a=\pm1$, $b=\sqrt{3-2}=1.$

При $a=\pm\sqrt{\frac{1}{6}}$ $b=\sqrt{3-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{8}{3}}.$

Ответ: $a=1, b=1$; $a=\sqrt{\frac{1}{6}}$, $b=\sqrt{\frac{8}{3}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

$f(1)=f(1)+f(1) \iff f(1)=2f(1) \Rightarrow f(1)=0.$

$f(\frac{x}{y})+f(\frac{y}{x})=f(1)=0 \Rightarrow f(\frac{x}{y})=-f(\frac{y}{x})$

$f(2)=[2/2]=1 \quad f(3)=1 \quad f(5)=2 \quad f(7)=3 \quad f(11)=5$

$f(13)=6 \quad f(17)=8 \quad f(19)=9$ (всё из условия $f(p)=[p/2]$)

$f(4)=f(2)+f(2)=2$; $f(6)=f(2)+f(3)=2$; $f(8)=f(2)+f(4)=3.$

$f(9)=f(3)+f(3)=2$; $f(10)=f(5)+f(2)=3$; $f(12)=f(3)+f(4)=3$

$f(14)=f(2)+f(7)=4$; $f(15)=f(3)+f(5)=3$; $f(16)=f(2)+f(8)=4.$

$f(18)=f(6)+f(3)=3$; $f(20)=f(5)+f(4)=4$; $f(21)=f(7)+f(3)=4.$

$f(\frac{x}{y})+f(y)=f(x) \iff f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$ (т.е $f(y)>f(x)$).

при $x=1$ $f(1)=0$ т.е y - любое неравное 1 ($y=2\ldots21$)

при $x=2$ $f(2)=1$ ($y\neq2,3,1$. $y=4,5\ldots21$)

при $x=3$ $f(3)=1$ ($y=4,5\ldots21$)

при $x=4$ $f(4)=2$, т.к $f(1)$, $f(2), f(3), f(5), f(4), f(6), f(9) \leq 2$, то $y=7,8,10\ldots21$

при $x=5,6,9$ ($y=7,8,10\ldots21$).

при $x=7,8,10,12,15,18$ $f(x)=3$ т.е $f(y)>3$ ($y=11,13,17,19,14,16,20,21$)

при $x=14,16,20,21$ $f(x)=4$ т.е $f(y)>4$ ($y=11,13,17,19$)

при $x=11$ $f(x)=5$, $f(y)>5$ ($y=13,17,19$)

при $x=13$ $f(x)=6$, $f(y)>6$ ($y=17,19$)

при $x=17$ $f(x)=8$, $f(y)>8$ ($y=19$)

при $x=19$ $f(x)=9$, $f(y)>9$ (таких y нет)

Посчитаем кол-во пар x, y; при $x=1$; 20 пар.

($x=2$; 18 пар); ($x=3$; 18 пар); ($x=4,5,6,9$; $14\cdot4=56$ пар); ($x=7,8,10,12,15,16,18$; $8\cdot7=56$ пар); ($x=14,16,20,21$; $4\cdot4=16$ пар); ($x=11$; 3 пары) ($x=13$; 2 пары); ($x=17$; 1 пара); ($x=19$; 0 пар)

Посчитаем повторяющиеся пары. (при $x=1$, таких пар нет.

при $x=2$, все $y \vdots 2$. таких пар 9.; при $x=3$, $y \vdots 3$, пар 6.

при $x=4$, $y \vdots 2$, пар 7; при $x=5$, $y \vdots 5$, пар 3; при $x=6$, $y \vdots 2$ или 3 пар 9

при $x=7$, $y \vdots 7$, пар 2; при $x=8$, $y \vdots 2$, пар 3; при $x=9$, $y \vdots 3$, пар 4;

при $x=10$, $y \vdots 2$ или 5, пар 3; при $x=11$, $y \vdots 11$, пар 0; при $x=12$; $y \vdots 3$ или 2, пар 4;

при $x=13$, $y \vdots 13$, пар 0; при $x=14$, $y \vdots 2$ или 7, пар 0; при $x=15$, $y \vdots 3$ или 5, пар 2;

при $x=16$, $y \vdots 2$, пар 0; при $x=17$, $y \vdots 17$, пар 0; $x=18$, $y \vdots 3$ или 2, пар 4;

при $x=19$, $y \vdots 19$, пар 0; при $x=20$, $y \vdots 2$ и 5, пар 0; при $x=21$, $y \vdots 3$ или 7, пар 0

(Повтор. пара это пара вида $\frac{km}{kn}$, где k - целое больше 1.

Итого пар:

$20+18+18+56+56+16+3+2+1-9-6-7-3-9-2$

$-3-4-3-4-2-4 = 20+112+16+1-4-3-4-4 = 149-15 = 134$.

Ответ: 134.

☐ черновик ☑ чистовик

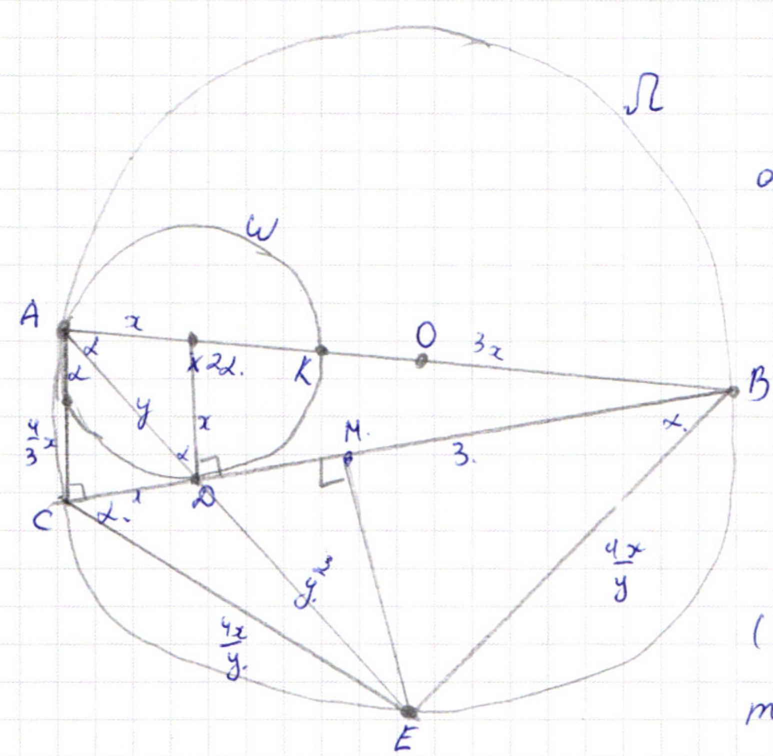
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



1.) т.к A – т. касания ω и Ω, то A, X, O лежат на одной прямой (X- центр ω, O– центр Ω). на прямой AB.

2.) $\angle ACB = 90^\circ$ т.к опир. на диаметр AB. $\angle XDB = 90^\circ$ т.к это угол между кас. и радиусом. Тогда $AC \parallel XD$ (соот. $\angle ACD$ и $\angle XDB$ равны), тогда $\triangle ABC \sim \triangle XBD$ по 2м углам ($\angle ACD = \angle XDB$; $\angle ABC$ общий) $\Rightarrow \frac{AB}{BX} = \frac{BC}{BD} = \frac{4}{3} \Rightarrow BX = 3x$; $AX = x$.

3.) Пусть $\angle DAK = \alpha$, тогда $\angle DXK = 2\alpha$ (т.к верш. угла в центре окружности). $\cancel{\frac{XD}{A}}$ $\angle XDA + \angle DAX = \angle DXB$ (~~внешн~~ смежный) $\Rightarrow \angle XDB = \alpha$, тогда $\triangle AXD$ – р/б и $AX = XD = x$.

4.) $\frac{XD}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{4} = \frac{x}{AC} \Rightarrow AC = \frac{4}{3}x$.

5.) т. Пифагора для $\triangle ABC$: $BC^2 + AC^2 = AB^2 \Leftrightarrow 16 + \frac{16}{9}x^2 = 16x^2$

$16 = \frac{16\cdot 9 - 16}{9}x^2 \Leftrightarrow 16 = \frac{16\cdot 8}{9}x^2 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

6.) радиус ω это XD. $XD = x = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; радиус Ω это AB. $AB = 4x = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

7.) $\angle \cancel{D}BAC = \angle BXD$ (т.к $\triangle ABC \sim \triangle XBD$) $\Rightarrow \angle DAC = \alpha$, тогда $\angle CBE = \angle EAC = \alpha$ (опир. на одну дугу); $\angle BCE = \angle EAB = \alpha$ (опир. на одну дугу)

8.) Пусть $AD = y$. $\triangle ADB \sim \triangle CDE$ по 2м углам ($\angle BAD = \angle CBE = \alpha$)

$\angle ADB = \angle CDE$ (вертик.)) $\Rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{AB}{CE} \Leftrightarrow y = \frac{4x}{CE} \Rightarrow CE = \frac{4x}{y}$.

~~9.) $\triangle ADC \sim \triangle BDE$ по 2м углам ($\angle CAD = \angle DBE = \alpha$; $\angle ADC = \angle BDE$ (вертик.))~~

~~$\Rightarrow \frac{AD}{DB} =$~~ 9.) т.к $\triangle CEB$ - р/б ($\angle ECB = \angle EBC = \alpha$), то $CE = BE = \frac{4x}{y}$.

10.) т.к $\triangle ADB \sim \triangle CDE$, то $\frac{AD}{CD} = \frac{BD}{DE} \Leftrightarrow \frac{y}{1} = \frac{3}{DE} \Rightarrow DE = \frac{3}{y}$

11.) из т. Птолемея сумма произведений противоположных сторон равна произведению диагоналей: $AB \cdot CE + AC \cdot BE = AE \cdot BC$ (т.к 4х угольник вписан!).

$4x \cdot \frac{4x}{y} + \frac{4}{3}x \cdot \frac{4x}{y} = 4\left(y + \frac{3}{y}\right) \Leftrightarrow \frac{16x^2}{y} + \frac{16x^2}{3y} = 4y + \frac{12}{y}$

$\frac{64x^2}{3y} = 4y + \frac{12}{y} \Leftrightarrow \frac{64}{3}x^2 = 4 \cdot y^2 + 12$; $x^2 = \cancel{\ } \frac{3\sqrt{2}}{4}$; $x^2 = \frac{9}{8}$

$\frac{64}{3} \cdot \frac{9}{8} = 4y^2 + 12 \Leftrightarrow 4y^2 = 12 \Rightarrow y = \sqrt{3}$.

12.) $CE = \frac{4x}{y} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$; т.к $\triangle CEB$ - р/б ($\angle ECB = \angle EBC = \alpha$), то мед. EH также высота, тогда $MC = 2$

13.) по т. Пифагора для $\triangle CME$: $ME^2 + \cancel{CE^2} = MC^2 = CE^2$

$ME = \sqrt{6 - 4} = \sqrt{2}$.

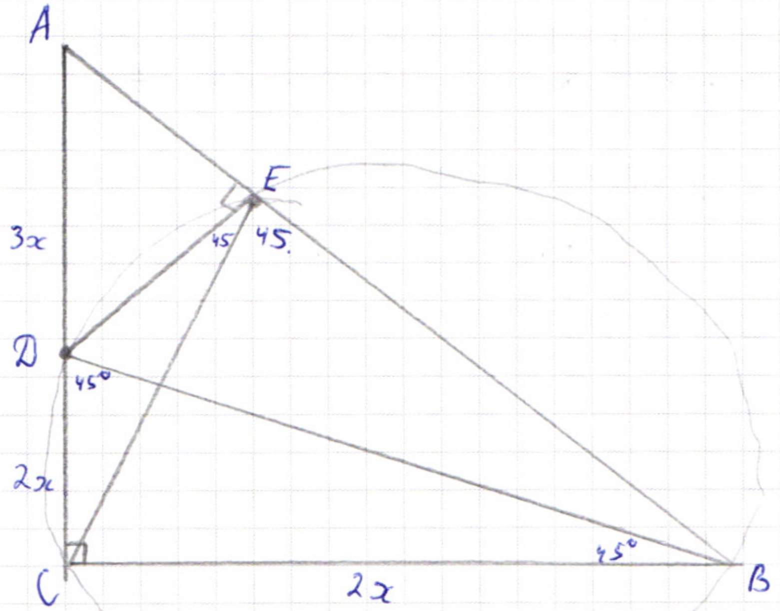
14.) $S_{BECA} = S_{BAC} + S_{BEC}$; $S_{BAC} = \frac{BC \cdot AC}{2} = \frac{4 \cdot 4x}{6} = \frac{4 \cdot 3\sqrt{2}}{6} = 2\sqrt{2}$

$S_{BEC} = \frac{EM \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot 4}{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow S_{BECA} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Ответ: $R_\omega = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; ~~$R_\Omega$~~ $R_\Omega = 3\sqrt{2}$; $S_{BECA} = 4\sqrt{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 4.



1.) пусть $AD = 3x$, тогда $AC = 5x$ и $DC = 2x$.

2.) $DEBC$ - вписанный т.к $\angle DEB = \angle DCB$ $(DEB = 180^\circ - \angle AED = 90^\circ)$ ~~те~~ $= 90^\circ$ т.е сумма противополож. углов 180°

3.) $\angle DBC = \angle DEC = 45$ (опир. на одну дугу) $\Rightarrow \angle CDB = 180^\circ - \angle DCB - \angle DBC = 45^\circ$, тогда $\triangle CDB$ - р/б и $CD = CB = 2x$.

4.) $tg\angle BAC = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{2x}{5x} = \dfrac{2}{5}$

~~5.) AC =~~ 5.) $AC = 5x = \sqrt{29} \Rightarrow x = \sqrt{1,16} = \sqrt{\dfrac{29}{25}}$.

$S_{ACB} = \dfrac{AC \cdot BC}{2} = \dfrac{5x \cdot 2x}{2} = 5x^2 = 5 \cdot 1,16 = \dfrac{29}{5} = 5,8$.

Ответ: $tg\angle BAC = \dfrac{2}{5}$; $S_{ACB} = 5,8$

№6.

1.) $2x^2 - x - 1 \le ax + b$.

$2x^2 - x(a+1) - 1 - b \le 0$.

$D = (a+1)^2 + 8(b+1)$

$x_{1,2} = \frac{a+1 \pm \sqrt{D}}{4}$ т.е $x \in \left[\frac{a+1-\sqrt{D}}{4} ; \frac{a+1+\sqrt{D}}{4}\right]$

тогда $\frac{a+1-\sqrt{D}}{4} \le -\frac{1}{4}$; $\frac{a+1+\sqrt{D}}{4} \ge \frac{3}{2}$.

$a - \sqrt{D} \le -2$; $a + \sqrt{D} \ge 5$.

2.) $ax + b \le x + |2x - 1|$

$x(1-a) - b + |2x-1| \ge 0$

при $x \ge \frac{1}{2}$.

$x(1-a) - b + 2x - 1 \ge 0$.

$x(3-a) - b - 1 \ge 0$.

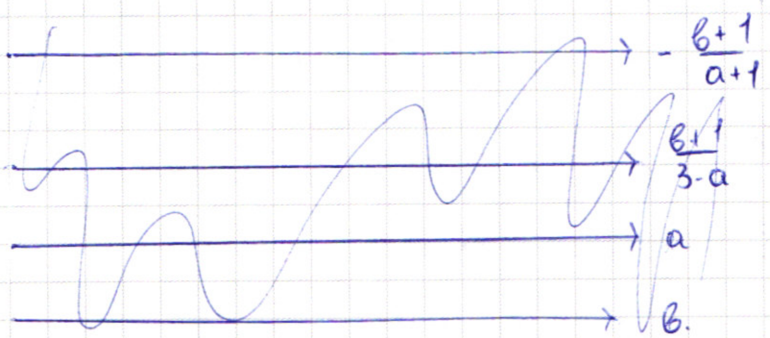
$x \ge \frac{b+1}{3-a}$, при $a < 3$, и $x \le \frac{b+1}{3-a}$, при $a > 3$

при $x < \frac{1}{2}$.

$x(1-a) - b - 2x - 1 \ge 0$

$x(-1-a) \ge b + 1$

$x \ge -\frac{b+1}{a+1}$, при $a < -1$, и $x \le -\frac{b+1}{a+1}$, при $a > -1$.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

т.е при $a > 3$ $\frac{b+1}{3-a}$ и $-\frac{b+1}{1+a} \geq -\frac{1}{4}$

при $a \in (-1; 3)$ $\frac{b+1}{3-a} \leq \frac{3}{2}$; $-\frac{b+1}{1+a} \geq -\frac{1}{4}$

при a ~~$\in$~~ < -1 $\frac{b+1}{3-a}$ и $-\frac{b+1}{1+a}$ $\leq \frac{3}{2}$

при $a=3$ $b=-1$; при $a=-1$, $b=-1$.

Ответ: $a=3$ $b=-1$; ~~при~~ $a=-1$, $b=-1$.

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1|$

$\frac{1}{4}$ $\frac{9}{2} - \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = 2$ $-\frac{1}{4} + \frac{3}{2}$

$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1$

$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$

3,5

$(2x+1)(x-1)$

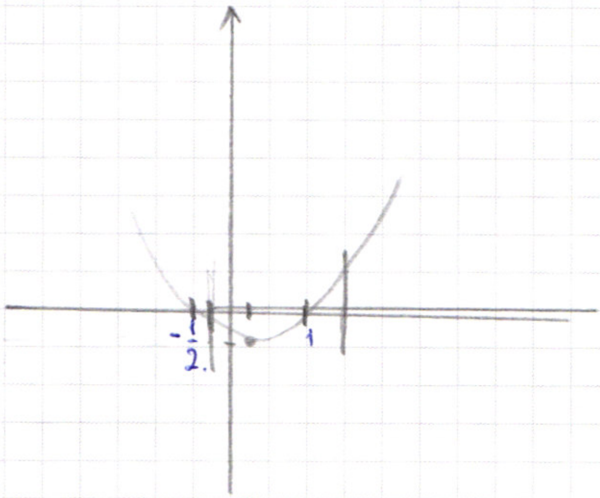
$2x^2 - x - 1 \le ax + b$

$2x^2 - x(1+a) - 1 - b \le 0$

$D = (1+a)^2 + 8(1+b)$

$ax + b \le x + |2x-1|$

$x(1-a) + |2x-1| \ge b$



$f(1) = 2f(1)$ $f\left(\frac{x}{y}\right)$

$f(1) = 0$

$\cancel{f(2) = f(1) + f(2)}$

$f(2) = 1$

$f(3) = 1$ $f\left(\frac{3}{2}\right) = f(3) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$f(5) = 2$ $f\left(\frac{5}{2}\right)$ $f\left(\frac{3}{y}\right) = \cancel{f\left(\frac{1}{3}\right)} + f(3) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(4) = 2f(2) = 2$ $f\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right)$ $f\left(\frac{4}{y}\right) = f(4) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$f\left(\frac{5}{3}\right) = f(5) + f\left(\frac{1}{3}\right)$

1, (2 ... 21) 4, (7 ... 21) 7, (

2, (4 ... 21) 5, (7 ... 21)

3, (4 ... 21) 6, (7 ... 21)

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

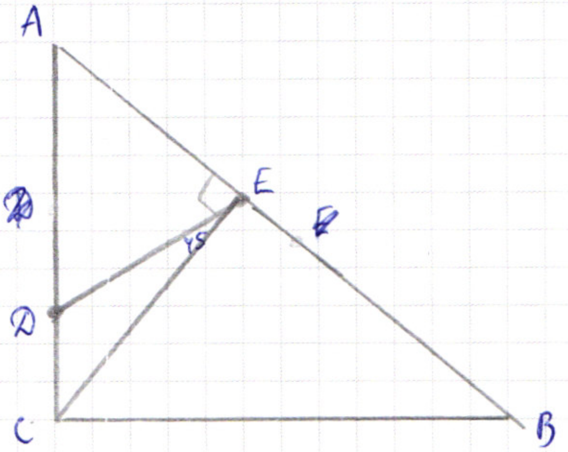
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

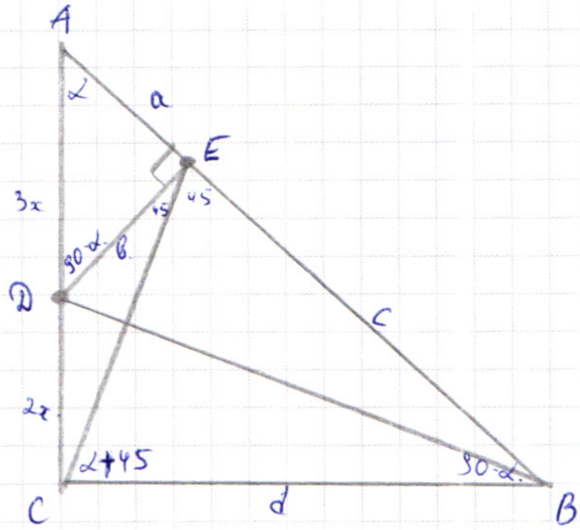
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





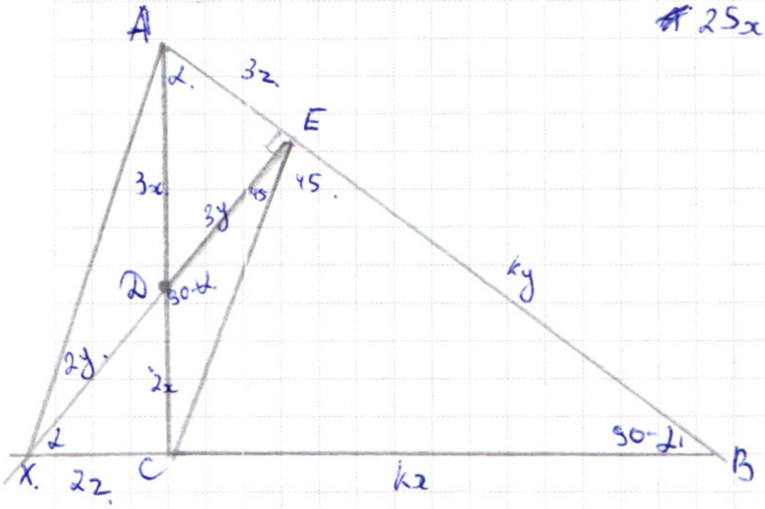
$$\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC} \qquad \frac{a}{5x}=\frac{3x}{a+c}=\frac{b}{d}$$

$$a^2+b^2=9x^2$$

$$\frac{DE}{AE}=\frac{BC}{AC}$$

$$a^2+ac=15x^2$$

$$25x^2=AE^2+EC^2+\sqrt{2}AE\cdot EC$$



$$\frac{BX}{AB}=\frac{BE}{BC}=\frac{EX}{AC}=\frac{y}{x}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$-(y+x-xy-2)$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3.$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2.$

$y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0$

$(y-x)^2-3xy+3x^2+2x+y-2=0$

$(1-x)(1-y)+1-x.$

$(y-2x)^2=(1-x)(2-y)$

$1-x=a$

$2-y=b.$

$4a^2-5ab+b^2=ab.$

$2a-b=2-2x-2+y$

$(2a-b)^2=ab$

$2a^2+b^2=3.$

$\frac{2}{3}\cdot\frac{\cancel{32}}{3}-4\cdot\frac{2}{3}\frac{10}{3}+\frac{8}{3}$

$4a^2-4ab+b^2=ab$

$-\sqrt{\frac{2}{3}}-\frac{\sqrt{8}}{3}.$

$4a^2-5ab+b^2=0.$

$2a^2-3ab+3=0.$

$-3ab=b^2-6.$

$b^2+3ab-6=0$

~~$a(2a-3b)=$~~ $3.$

~~$b(b-3a)=6$~~

$b=\sqrt{3-2a^2}=\cancel{\sqrt{2}}\ \sqrt{\frac{8}{3}}.$

$6x^2-7x+1=0$

$(6x-1)(x-1)=0$

$4a^2-5a\sqrt{3-2a^2}+3-2a^2=0$

$2a^2-5a\sqrt{3-2a^2}+3=0$

$2a^2=1 \qquad a=1.$

$6a^4-7a^2+1=0.$

$2a^2+3=5a\sqrt{3-2a^2}$

$a=\sqrt{\frac{1}{2}} \qquad a=\cancel{\ }\sqrt{\frac{1}{6}}$

$4a^4+12a^2+9=75a^2-50a^4.$

$54a^4-63a^2+9=0.$

$4a^4-4a^2+1=0 \iff (2a^2-1)=0.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

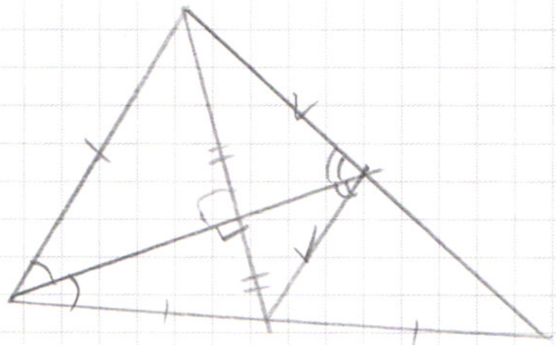
(заполняется секретарём)

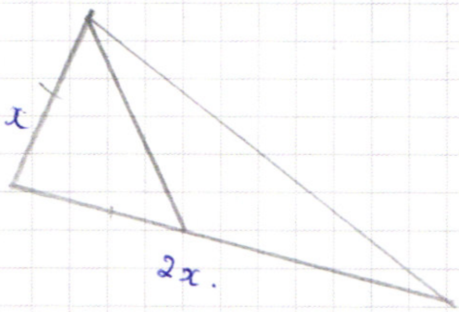
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a, b, c a, ak, ak^2

$x = \cancel{-ak \pm \sqrt{a^2k^2 - 4a^2k^2}}$

$\frac{-ak}{2a} = -\frac{k}{2}$ $ak^2 = -\frac{k^2}{2} - 1$





$x + 2x + y = 1200$

$3x + y = 1200$

$3x \geq 600$ $x \geq 200$

$y \geq x$

$x + y \geq 600$

1	2	(1, 2)	5
2	4	(3, 4, 5)	11
3	6	(4, 5, 6, 7, 8)	13
4	8	(5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)	17

99

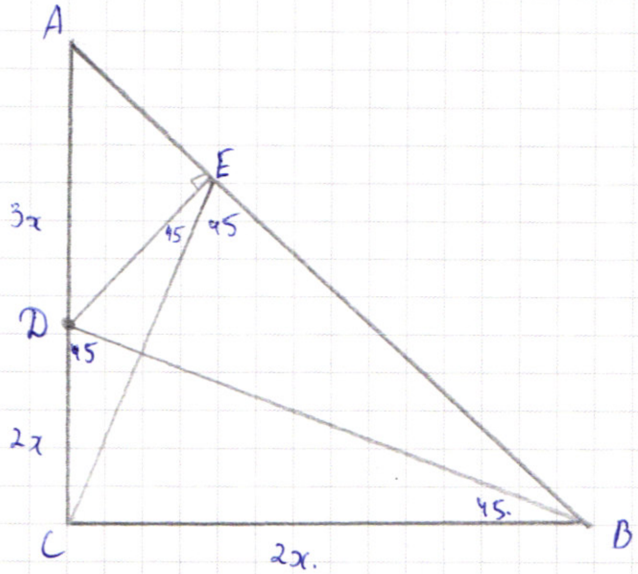
201	402	597
202	404	594
250	500	450
299	598	303

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

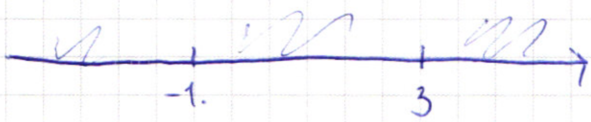


$\cancel{2x^2 - x - 1}$

$2x^2 - x(a+1) - 1 - b \leq 0$

$D = (a+1)^2 + 8(b+1).$

$x_{1,2} =$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

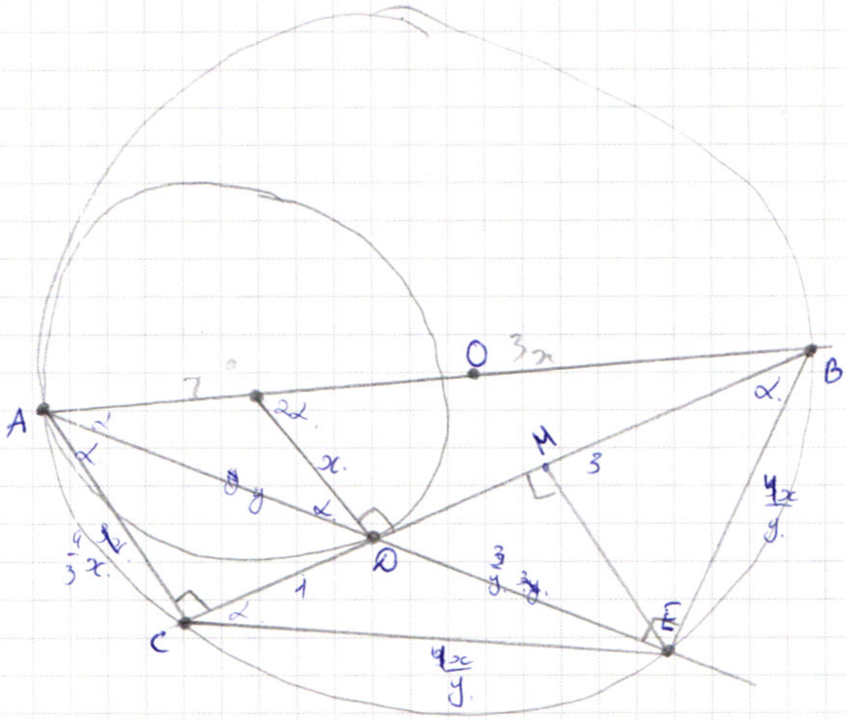
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$y = \sqrt{\frac{183}{21}}$

$CE \cdot AB + CA \cdot BE = BC \cdot AE$

$16 + 9x^2 = 16x^2$

$7x^2 = 16$

$x = \frac{4}{\sqrt{7}} \quad \frac{1}{\sqrt{7}}$

$CE = \frac{3x}{y}$

$\frac{16x^2}{y} + \frac{16x^2}{3y} = 4\left(y + \frac{3}{y}\right)$

$\frac{64x^2}{3y} = 4y + \frac{12}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{64}{3}x^2 = 4y^2 + 12$

$\frac{64 \cdot 16}{21} = 4y^2 + 12 \qquad 4y^2 = \frac{64 \cdot 16 - 12 \cdot 21}{21} =$

$= \frac{1024 - 252}{21} = \frac{772}{21}$

$1 \quad \frac{y}{3}$

$\frac{3x}{m} = \frac{y}{3}$

$\frac{9x}{y} = m$

$y = \frac{4x}{CE}$

$CE = \frac{4x}{y}$

$BE =$

$\frac{y}{3} = \frac{4 \cdot 3x}{3BE}$

772 | 4
4 | 183
37
36
12

$y^2 = \frac{183}{21}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)