

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED .

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2, BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

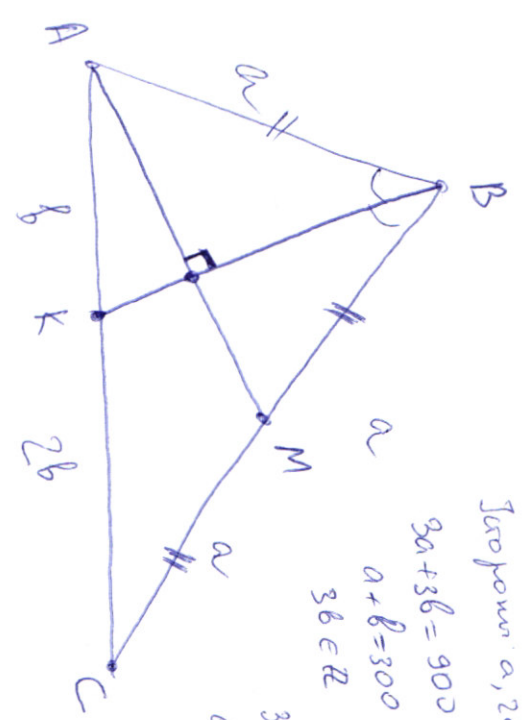
выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{2}; 1]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leq x \leq 22, 2 \leq y \leq 22$ и $f(x/y) < 0$.

$$\begin{aligned}
 a &> 2b-4 \\
 a &\leq 2b+32 \\
 a &> 2-b \\
 a &\leq 5-b \\
 2b-4 &\leq 5-b \\
 3b &\leq 9 \\
 \mathbf{b} &\leq 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a &\leq 2b+32 \\
 a &\geq 2-b \\
 0 &\leq 3b+30 \\
 0 &\leq 4b+2b
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5-b &\geq a \geq 4-2b \\
 a &\leq 2b+32
 \end{aligned}$$



Isosceles: a, 2a, 3b

$$\begin{aligned}
 3a+3b &= 900 \\
 a+b &= 300 \\
 3b &\in \mathbb{Z} \\
 3a > 3b &\Rightarrow a > b \\
 a+b &\in \mathbb{Z} \Rightarrow b \in \mathbb{Z} \\
 a+3b > 2a &\Rightarrow 3b > a
 \end{aligned}$$

Case 1: a > b

$$\begin{cases}
 a+b=300 \\
 a > b \\
 a < 3b
 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 a &\geq b+1 \\
 3b-1 & > a
 \end{aligned}$$

$$3b-1 - (b+1) = \mathbf{2b-2}$$

3b-1: Bsp für Komplex B

$$\begin{aligned}
 3b &> 300-b > b \\
 4b &> 300 > 2b \\
 150 &> b > 75
 \end{aligned}$$

a immer ≠ b

$$b-b = 150 \text{ (?) }$$

$$20 = 3b$$

$$b + \frac{2}{3}b = 300$$

$$\frac{5}{3}b = 300$$

$$3b = 600$$

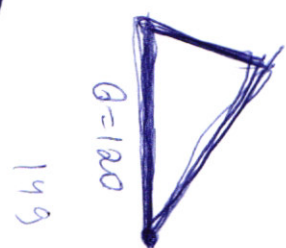
$$\mathbf{b=180} \quad a=180 \quad 360$$

$$3b=a$$

$$b+b=300$$

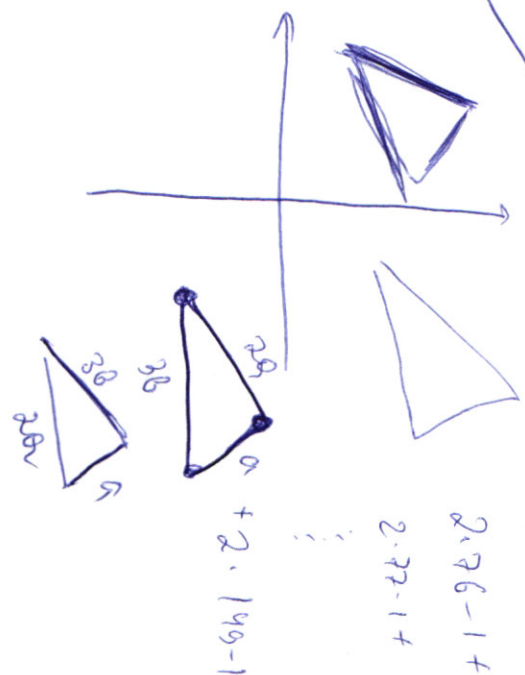
$$\mathbf{b=95} \quad \mathbf{a=91}$$

$$\begin{aligned}
 &2(76+77+\dots+149) - 74 \\
 &+ 1568 \\
 &= 16576
 \end{aligned}$$



$$149 \geq b \geq 76$$

$$76 \rightarrow 2 \cdot 76 - 1 \text{ Bsp}$$



$$\begin{array}{r}
 149 \\
 - 149 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 149 \\
 + 149 \\
 \hline
 298
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 149 \\
 + 149 \\
 \hline
 298
 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

Числа a, b, c - попер. члены геом. прогрессии $\Rightarrow b^2 = ac$
 1 шаг) $a \neq 0$
 $ax^2 - 2bx + c = 0$

$$D = 4b^2 - 4ac = 4(b^2 - ac) = 0$$

$$\Rightarrow \text{корень } x = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a}$$

\Rightarrow Числа $a, b, c, \frac{b}{a}$ сост. геом. прогрессию

$$\Rightarrow c^2 = \frac{b \cdot b}{a}$$

$$c^2 = \frac{b^2}{a}$$

$$b^2 = ac \Rightarrow c^2 = \frac{ac}{a}$$

$$c^2 = c$$

$$\begin{cases} c=0 \\ c=1 \end{cases}$$

2 шаг)

$$a=0 \Rightarrow b=0 \quad c=0$$

Ур-ие $0=0$ корень 0 подходит

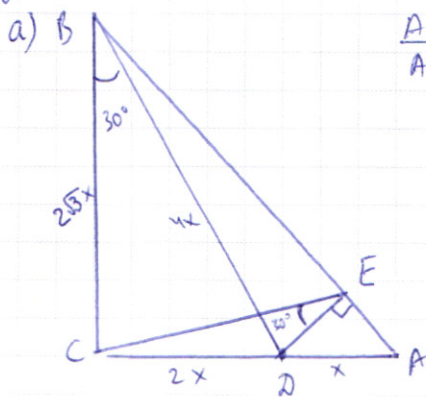
$0, 0, 0, 0$ - геом. прогрессия

$$c=0 \quad \checkmark$$

~~но не подходит в эту задачу~~
 \checkmark позх., если знаменатель прогр. 0

Ответ: ~~числа~~ $1; 0$.

Задача 4



$$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3} \quad \} AD = x \Rightarrow CD = 2x$$

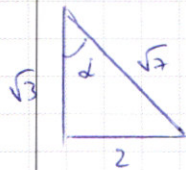
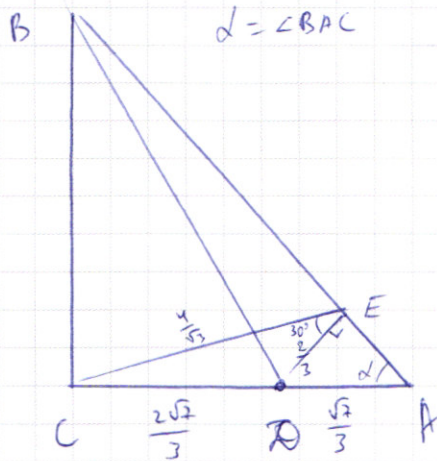
$\angle BCD + \angle BED = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow CDEB$ - впис. четыреху.

$$\Rightarrow \angle CED = \angle CBD = 30^\circ$$

$$\triangle CBD: \angle CBD = 30^\circ \quad CD = 2x \Rightarrow BD = 4x \Rightarrow BC = 2\sqrt{3}x$$

$$\operatorname{tg} \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\delta) AC = \sqrt{7} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3} = AD \quad CD = \frac{2\sqrt{7}}{3}$$



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow \triangle DEA: \frac{DE}{AD} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{3DE}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow DE = \frac{2}{3}$$

$$\triangle CAE: \frac{\sin \alpha}{CE} = \frac{\sin \angle CEA}{AC}$$

$$\angle CEA = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$$

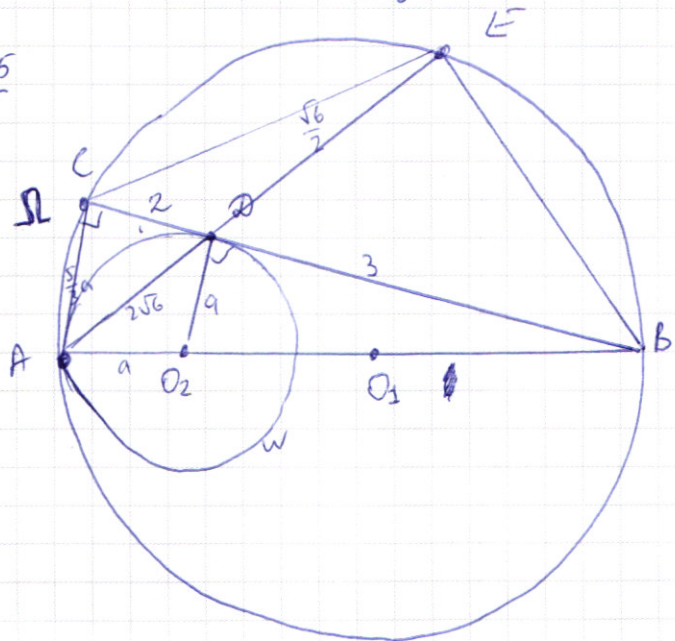
$$\frac{2}{\sqrt{7} \cdot CE} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \sqrt{7}}$$

$$CE = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$S(\triangle CED) = CE \cdot DE \cdot \sin \angle CED \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

- Ответ: а) $\frac{2}{\sqrt{3}}$
 б) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

Задача 5



-] O_1 - центр Ω
- O_2 - центр ω .
- AB - диаметр $O_1, O_2 \in AB$
-] a - радиус меньшей окр.-ти.
- $AO_2 = O_2D = a$
- $\angle O_2DB = 90^\circ$ (т.к. BD касается ω).

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle ACB = 90^\circ$ (т.к. AB - диаметр Ω)

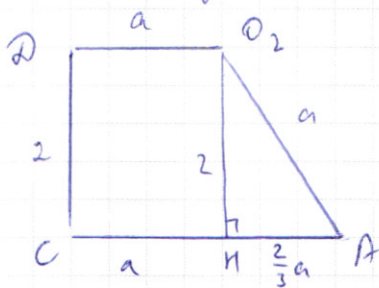
$\Rightarrow O_2 D \parallel AC \Rightarrow \triangle O_2 DB \sim \triangle ACB$

$$\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{DO_2}{CA}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{a}{CA}$$

$$CA = \frac{5}{3}a.$$

∇ проведем трапецию $ACDO_2$



$$CD = 2 \quad DO_2 = a$$

$$O_2 A = a$$

$$CA = \frac{5}{3}a$$

$$\triangle O_2 H \perp AC$$

$$DO_2 HC - \text{трапеция} \Rightarrow DO_2 = CH = a \Rightarrow AH = \frac{5}{3}a - a = \frac{2}{3}a$$

$$O_2 H = DC = 2$$

$$\triangle O_2 HA: a^2 = 4 + \frac{4}{9}a^2 \Rightarrow \frac{5}{9}a^2 = 4 \quad a^2 = \frac{36}{5} \quad a = \frac{6}{\sqrt{5}} \quad \text{— радиус меньшей окр.-м.}$$

$$\triangle CAD: AD = \sqrt{4 + \frac{25}{9}a^2} = \sqrt{4 + \frac{25}{9} \cdot \frac{36}{5}} = \sqrt{4 + 20} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$ACED - \text{впис} \Rightarrow CD \cdot DB = AD \cdot DE \quad (\text{теорема Птолемея отн. к } \Omega)$$

$$2 \cdot 3 = 2\sqrt{6} \cdot DE$$

$$DE = \frac{6}{2\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$S_{ACED} = \frac{1}{2} AE \cdot BC \sin \angle ADC$$

$$\triangle ADC: \sin \angle ADC = \frac{\frac{5}{3}a}{2\sqrt{6}} = \frac{\frac{5}{3} \cdot \frac{6}{\sqrt{5}}}{2\sqrt{6}} = \frac{30}{6\sqrt{30}} = \frac{30\sqrt{30}}{6 \cdot 30} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

$$S_{ACED} = \frac{1}{2} (2\sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{2}) \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{30}}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \sqrt{6} \cdot \frac{5}{6} \sqrt{30} = \frac{25}{24} \sqrt{180} = \frac{25}{24} \cdot 6\sqrt{5} = \frac{25}{4} \sqrt{5}$$

$\triangle ACB$:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AC = \frac{5}{3}a = \frac{5}{3} \cdot \frac{6}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$AB^2 = 20 + 25 = 45 \quad AB = 3\sqrt{5} \Rightarrow \text{радиус большой окр-ти: } \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Ответ: радиус большой окр-ти: $\frac{3\sqrt{5}}{2}$
радиус меньшей окр-ти $\frac{6}{\sqrt{5}}$
площадь $\triangle ACE$ $\frac{25\sqrt{5}}{4}$

Задача 4

$$\begin{cases} x-6y = \sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$$

$$\exists x-6=a \quad y-1=b \Rightarrow x=6+a \quad y=1+b$$

$$\begin{cases} 6+a-6(1+b) = \sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases} \quad \begin{cases} a-6b = \sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+2b^2=18 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+36b^2=13ab \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$$

$$34b^2+18=13ab.$$

$$a = \frac{34b^2+18}{13b}$$

$$\left(\frac{34b^2+18}{13b}\right)^2 + 2b^2 = 18 \quad \exists b^2 = t$$

$$\frac{(34t+18)^2}{169t} + 2t = 18 \Rightarrow (34t+18)^2 + 169 \cdot 2t^2 = 169 \cdot 18t$$

$$34^2 t^2 + 18^2 + 2 \cdot 34 \cdot 18 t + 2 \cdot 169 t^2 = 169 \cdot 18 t \quad /2$$

$$34 \cdot 17 t^2 + 18 \cdot 9 + 34 \cdot 18 t + 169 t^2 = 169 \cdot 9 t$$

$$747 t^2 - 909 t + 162 = 0$$

$$(t-1)(747t-162) = 0$$

$$\begin{cases} t=1 & (1) \\ t = \frac{162}{747} & (2) \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1) $b^2 = 1$

$$\begin{cases} b=1 & a = \frac{34+1b}{13} = 4 \quad (1a) & \text{отбрасываем} & x-6=4 \Rightarrow x=10 & y-1=1 \Rightarrow y=2 \\ b=-1 & a = \frac{34+1b}{-13} = -4 \quad (1b) & \text{отбрасываем} & x-6=-4 \Rightarrow x=2 & y-1=-1 \Rightarrow y=0 \end{cases}$$

(1a) Проверка

$$\underbrace{10 - 2 \cdot 6}_0 = \underbrace{\sqrt{20 - 12 - 10 + 6}}_{\text{?!}}$$

не подходит

(1b) Проверка

$$\begin{cases} 2 = \sqrt{-2+6} \\ 4 - 2 \cdot 2 + 20 = 0 \end{cases} \quad \text{Подходит} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \quad \text{подходит}$$

(2) $b^2 = \frac{162}{247} \quad a^2 = 18 - 2b^2 \quad a^2 = 18 - \frac{324}{247} = \frac{13122}{247}$

$$\begin{cases} b = \sqrt{\frac{162}{247}} & a = \frac{(34+162) \sqrt{247}}{13 \sqrt{162}} & x = a+6 & y = b+1 & (2a) \\ b = -\sqrt{\frac{162}{247}} & a = -\frac{(34+162) \sqrt{247}}{13 \sqrt{162}} & x = a+6 & y = b+1 & (2b) \end{cases}$$

Проверка: (2a) $ab > 0 \Rightarrow$ под корни в 1 уравнении > 0 .

$$x - 6y = a - 6b \quad ? 0$$

$$\text{отбрасываем} \quad a \neq 6b$$

$$\frac{34b^2 + 18}{13b} \quad ? 6b$$

$$\frac{34b^2 + 18 - 78b^2}{13b} \quad ? 0$$

$$\frac{18 - 44b^2}{13b} \quad ? 0 \quad b > 0$$

$$18 \neq 44b^2$$

$$\frac{18}{44} \neq b^2$$

$$\frac{12}{44} \stackrel{?}{>} \frac{162}{747}$$

$$\frac{9}{22} \stackrel{?}{>} \frac{162}{747}$$

$$6723 \stackrel{?}{>} 3564$$

В данном случае решение некорр., т.к. все переходы равносильны.

(20) Проверка

$$x - 6y = a - 6b \stackrel{?}{=} 0$$

$$a \stackrel{?}{\geq} 6b$$

$$\frac{34b^2 + 12}{13b} \stackrel{?}{\geq} 6b$$

$$\frac{12 - 44b^2}{43b} \stackrel{?}{=} 0 \quad b < 0$$

$$0 \stackrel{?}{=} 12 - 44b^2$$

$$44b^2 \stackrel{?}{=} 12$$

$$b^2 \stackrel{?}{\geq} \frac{9}{22}$$

$$\frac{162}{747} < \frac{9}{22}$$

В данном случае $x - 6y < 0$ в 1 ур-ии, а $x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)}$ (?)

Это решение не корр.

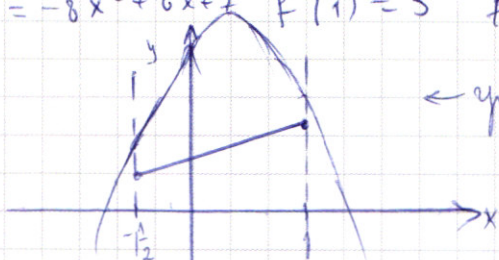
Ответ: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 6 + \frac{32400}{13\sqrt{121014}} + 6 \\ y = \sqrt{\frac{162}{747}} + 1 \end{cases}$

Задача 6

$$ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

$$x_0 = \frac{-6}{-16} = \frac{3}{8} \quad y_0 = \frac{-8 \cdot 9}{64} + \frac{18}{8} + 7 = \frac{9}{8} + 7 = 8\frac{1}{8} \quad \left(\frac{3}{8}, \frac{65}{8}\right) - \text{коорд. верши. параболы}$$

$$f(x) = -8x^2 + 6x + 7 \quad f(1) = 5 \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-8}{4} - \frac{6}{2} + 7 = -2 - 3 + 7 = 2$$



← график $y = f(x)$
(Условно, без масштаба)

График $y = ax + b$ — прямая. Из пер-ва видно, что прямая должна полностью лежать ниже параболы (или совп) на $[-\frac{1}{2}; 1]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

] $g(x) = ax + b$ Чтобы условие выполн, $g(-\frac{1}{2}) \leq f(-\frac{1}{2})$ $g(1) \leq f(1)$

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} + b \leq 2 & (1) \\ a + b \leq 5 \end{cases}$$

$$ax \geq 8x - 6 \quad | :2x-1$$

1) $2x-1 > 0 \quad x > \frac{1}{2} \quad y = 8x - 6 \quad | :2x-1 = 6 - \frac{6}{2x-1}$

2) $2x-1 < 0 \quad x < \frac{1}{2} \quad y = 8x - 6 \quad | :2x-1 = 20x - 6$

$$\exists h(x) = 8x - 6 \quad | :2x-1$$

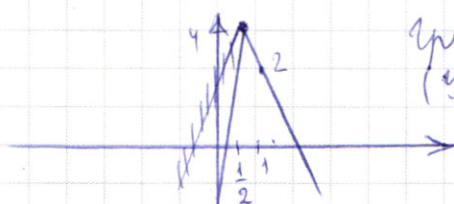
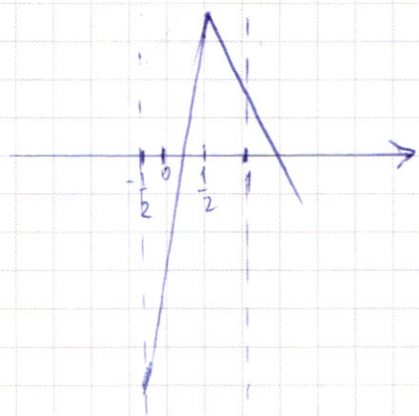


График $y = h(x)$
(Условно, без масштаба)

$$h(\frac{1}{2}) = 4 \quad h(1) = 2 \quad h(-\frac{1}{2}) = -10 - 6 = -16$$



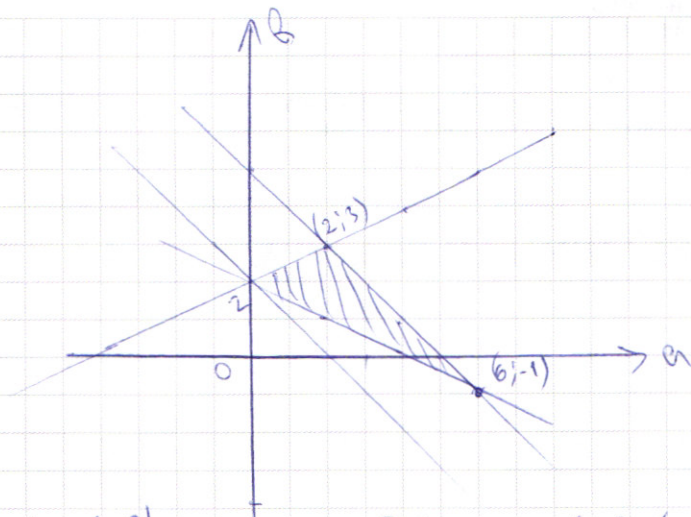
Чтобы прямая $y = ax + b$ лежала выше этого графика, надо x и b задать

$$\begin{cases} g(-\frac{1}{2}) > h(-\frac{1}{2}) \\ g(\frac{1}{2}) > h(\frac{1}{2}) \\ g(1) > h(1) \end{cases} \begin{cases} -\frac{a}{2} + b \geq -16 \\ \frac{a}{2} + b \geq 4 \\ a + b \geq 2 \end{cases} \quad (2)$$

(1) и (2)

$$\begin{cases} -a + 2b \leq 4 \\ a + b \leq 5 \\ -a + 2b \geq -32 \\ a + 2b \geq 4 \\ a + b \geq 2 \end{cases} \begin{cases} 4 \geq 2b - a \geq -32 \\ 5 \geq a + b \geq 2 \\ a + 2b \geq 4 \end{cases}$$

Изобразим точки с координатами (a, b) в плоскости ab .



$$b \leq 2 + \frac{a}{2} \quad b \geq -16 + \frac{a}{2}$$

$$b \geq 2 - a \quad b \leq 5 - a$$

$$b \geq 2 - \frac{a}{2}$$

Получаем набор (a, b) , такие что точки с коорд (a, b) лежат внутри Δ с верши. $(0; 2) (2; 3) (6; -1)$
 Ответ: Набор (a, b) с коорд (a, b) лежат внутри Δ с вершинами $(0; 2) (2; 3) (6; -1)$ и коорд (a, b) (включая границы).

Задача 7

$$f(ab) = f(a) + f(b) \quad f(x/y) + f(y) = f(x) \quad x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \quad \frac{x}{y} > 0 \checkmark$$

$$f(x/y) = f(x) - f(y) \quad f(x/y) < 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$$

$$f(p) = [p/2] \quad f(2) = 1 \quad f(3) = 1 \quad f(5) = 2 \quad f(7) = 3 \quad f(11) = 5 \quad f(13) = 6 \quad f(17) = 8$$

$$f(15) = 9$$

$$f(4) = f(2) + f(2) = 2 \quad f(6) = f(2) + f(3) = 2 \quad f(12) = f(2) + f(4) = 3 \quad f(9) = f(3) + f(3) = 2$$

$$f(10) = f(2) + f(5) = 3 \quad f(12) = f(3) + f(4) = 3 \quad f(14) = f(2) + f(7) = 4 \quad f(15) = f(3) + f(5) = 3$$

$$f(16) = f(4) + f(4) = 4 \quad f(18) = f(2) + f(9) = 3 \quad f(20) = f(4) + f(5) = 4 \quad f(21) = f(3) + f(7) = 4$$

$$f(22) = f(2) + f(11) = 6$$

Ск. пар чисел: $f(x) < f(y)$

Значения $f(x)$ по данным промежуткам:

- 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 9

- 1 гр. II гр. III гр. IV гр. V гр. VI гр. VII гр. VIII

Купно выбора x из группы с меньшим номером, чем y :

- 1) Если y в I группе \Rightarrow нет таких x
- 2) y во II : 4 вар y 2 вар x (8)
- 3) y в III : 6 вар y 6 вар x (36)
- 4) y в IV : 4 вар y 12 вар x (48)
- 5) y в V : 1 вар y 16 вар x (16)
- 6) y в VI : 2 вар y 17 вар x (34)
- 7) y в VII : 1 вар y 19 вар x (19)
- 8) y в VIII : 1 вар y 20 вар x (20)

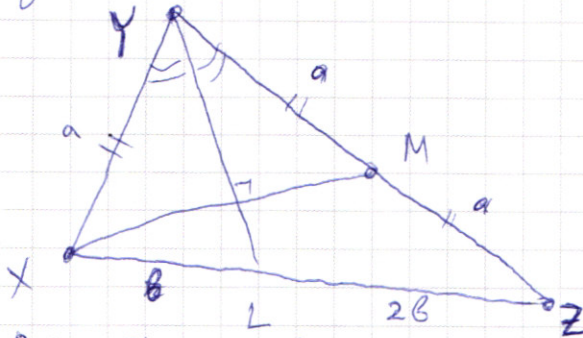
Всего способов выбора (x, y) :

$$8 + \frac{36}{84} + \frac{48}{50} + \frac{16}{39} + 34 + 19 + 20 = 181$$

Ответ: 181

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2



$\triangle XYZ$: YL -биссектриса XM -медиана $XM \perp YL$
 $\triangle XYM$ - р.б (т.к биссектриса совп. с
 высотой)
 $\Rightarrow XY = YM = MZ$ ← т.к XM -медиана.

$$XL : LZ = XY : YZ = 1 : 2$$

$$\begin{cases} XY = YM = MZ = a \\ XL = \frac{2}{3}b \Rightarrow XL = 2b \end{cases}$$

Периметр $3a + 3b = 900$

$$a + b = 300$$

Чтобы \triangle существовал, надо, чтобы выполнялись 3 нер-ва \triangle

$$a + 2a > 3b \Leftrightarrow a > b$$

$$2a + 3b > a \text{ - верно всегда } (a, b > 0)$$

$$a + 3b > 2a \Leftrightarrow b > \frac{2a}{3}$$

$$\begin{cases} a + b = 300 \Leftrightarrow a = 300 - b \\ a > b \\ b > \frac{2a}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 300 - b > b \\ 3b > 300 - b \end{cases}$$

$$300 > 2b \Leftrightarrow b < 150$$

$$4b > 300 \Leftrightarrow b > 75$$

$76 \leq b \leq 149$ Для каждого b из этого промежутка можно построить

$$3b > a > b \quad 3b - 1 \geq a \geq b + 1 \text{ - всего } 2b - 1 \text{ вар.}$$

Для $b = 76$ $2 \cdot 76 - 1$ вар

$b = 77$ $2 \cdot 77 - 1$ вар

$b = 149$ $2 \cdot 149 - 1$ вар.

$$\rightarrow \text{всего } 2(76 + 77 + \dots + 149) - 74 =$$

$$= 2 \left(\frac{(76 + 149) \cdot 74}{2} \right) - 74 =$$

$$= 225 \cdot 74 - 74 = 224 \cdot 74 = 16576,$$

~~Всего существует 16576 вариантов~~

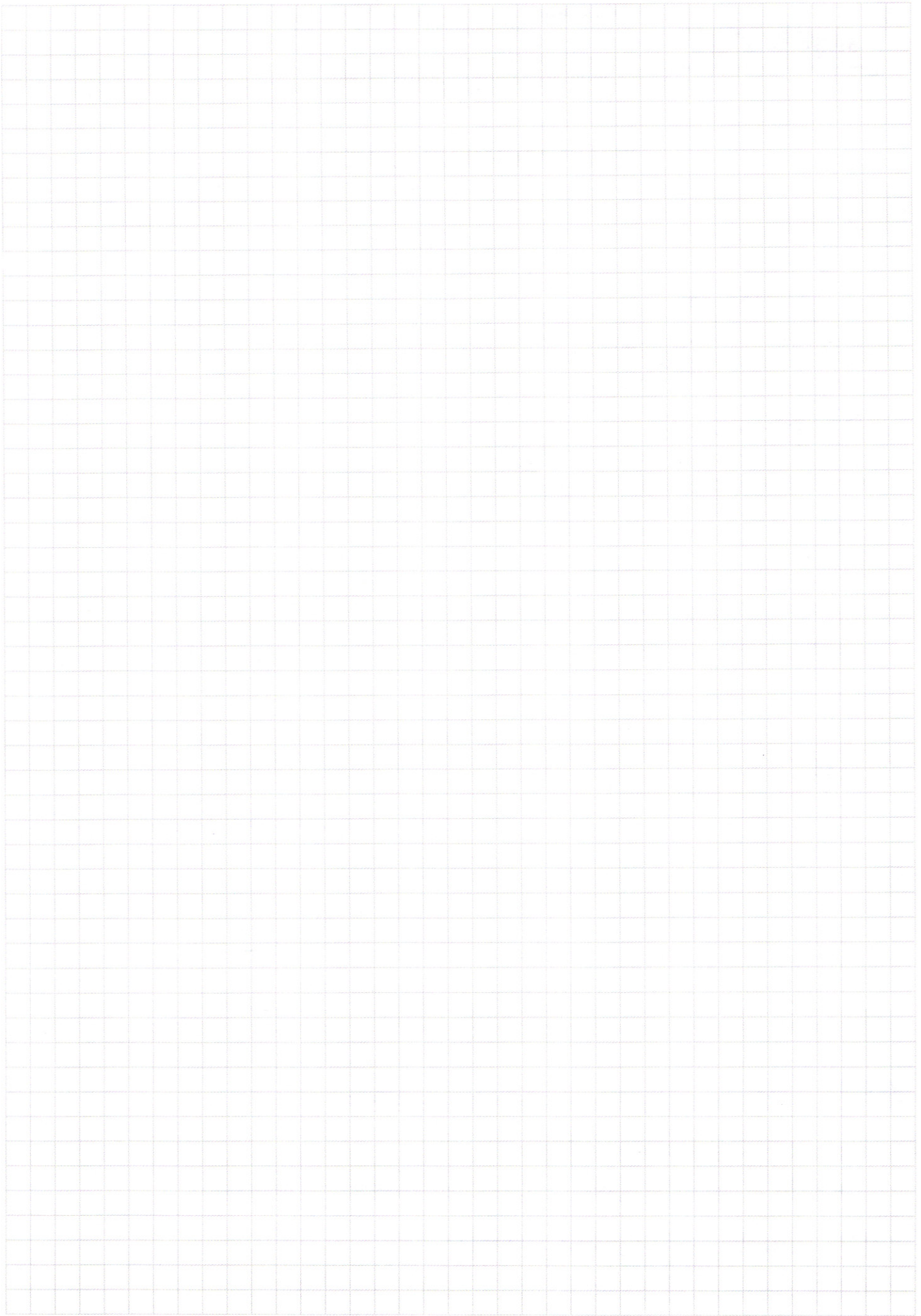
~~Всего существует 16576 вариантов~~

~~Всего существует 16576 вариантов~~

~~Всего существует 16576 вариантов~~

~~Всего существует 16576 вариантов~~

Ответ: 16576.



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

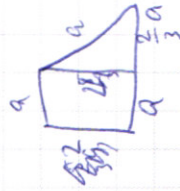
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

~~(x-6)^2 + 2y^2 - 12y + 20 = 0~~

$$x - 6y = \sqrt{(x-6y)(y+1)}$$

$$y(x-6) - (x-6)$$



$$\begin{aligned} a^2 &= 4 + \frac{4}{9}a^2 \\ \frac{5}{9}a^2 &= 4 \\ a^2 &= \frac{36}{5} \\ a &= \frac{6}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$25 + \frac{25}{9}a^2 = 46^2$$

$$\begin{aligned} 16 + \frac{25}{9}a^2 &= 46 + 4ab \\ 25a^2 + 16 \cdot 9 - 4ab &= 0 \\ -9 + 4b^2 &= 4ab \\ 25a^2 + 16 \cdot 9 - 4b^2 + 9 &= 0 \\ 25a^2 + 144 - 9 - 4b^2 &= 0 \end{aligned}$$

a; b; c d

$$ax^2 - 2bx + c = 0$$

$$c^2 = bd \quad x = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

$$c^2 = b \left(\frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} \right)$$

$$ac^2 = b^2 + b\sqrt{b^2 - ac}$$

$$b^2 = ac$$

$$ac^2 = b^2$$

$$ac^2 = ac$$

$$ac(c-1) = 0$$

$$c = 1 \quad \begin{cases} a = 0 \\ e = 0 \end{cases}$$

0 или 1

S_{ABCE}

$$CD = 2 \quad BD = 3$$

$$DE \cdot AD = 6$$

$$\sin \cos d = \frac{2}{AD}$$

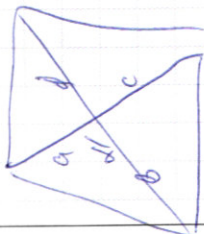
$$\frac{AC}{2} = \frac{BE}{DE}$$

$$a^2 + 9 = (ab - a)^2$$

$$9 = 4b^2 - 4ab$$

$$4b^2 - 4ab$$

$$180 \sqrt{\frac{36}{5}}$$

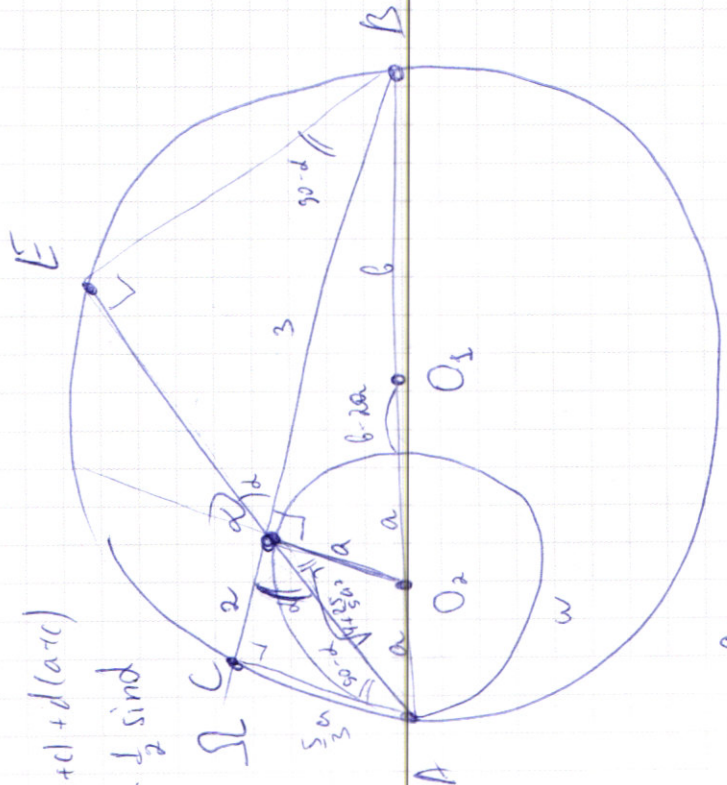


$$\frac{1}{2} ab \sin d$$

$$+ad + cd + bc$$

$$b(a+c) + d(a+c)$$

$$\frac{1}{2} ab \sin d$$



$$\frac{3}{5} = \frac{a}{CA} \quad 5a = 3CA \quad CA = \frac{5}{3}a$$

$$\begin{cases} a^2 + 36b^2 = 13ab \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$$

$$34b^2 + 18 = 13ab$$

$$a = \frac{34b^2 + 18}{13b}$$

$$\frac{(34b^2 + 18)^2}{169b^2} + 2b^2 = 18$$

$$(34k + 18)^2 + 169 \cdot 2k^2 = 18$$

$$34^2 k^2 + 18^2 + 2 \cdot 34 \cdot 18k + 169 \cdot 2k^2 = 18 \cdot 169k$$

$$34 \cdot 17 k^2 + 169k^2 + (34 \cdot 18 - 169 \cdot 9)k + 18 \cdot 9 = 0$$

$$747k^2 - 909k + 162 = 0$$

$$\begin{array}{r} 747 \\ \times 17 \\ \hline 1269 \\ + 162 \\ \hline 909 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ \times 2 \\ \hline 578 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1578 \\ \times 169 \\ \hline 797 \end{array}$$

$$S = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

$$\frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{169}{68} \cdot 101.9$$

$$\begin{array}{r} 7224 \\ \times 74 \\ \hline 1896 \\ 568 \\ \hline 16576 \end{array}$$

$$AD:AC = 1:3$$

$$\frac{\sin d}{CE} = \frac{\sin 120^\circ}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{7} \cdot CE} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$$

$$\sqrt{3}CE = 4 \Rightarrow CE = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$CE = \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos d = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

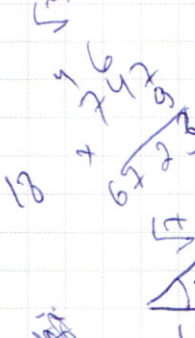
$$\frac{AE \cdot 3}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

$$AE = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

$$\frac{18}{572}$$

$$AC = \sqrt{7}$$



$$\sin d = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{DE \cdot 3}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$DE = \frac{2}{3}$$

$$\frac{9 \cdot 16}{8} = 9$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{16}{8} = 1$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{16}{8} = 1$$

$$\begin{array}{r} 262 \\ \times 62 \\ \hline 128 \\ 156 \\ \hline 1624 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 162 \\ \times 24 \\ \hline 648 \\ 324 \\ \hline 3888 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 245 \\ \times 247 \\ \hline 980 \\ 490 \\ \hline 60815 \end{array}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan \angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}}{3}$$

$$(2b-a)^2 = a^2 + 9$$

$$4b^2 - 4ab + a^2 = a^2 + 9$$

~~10~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}$$

$$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$$

~~$$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$$~~

$$36 + 2$$

~~$$x + y = 6$$~~

$$(x-6)^2 + (y-2)^2 + y^2 = 20$$

$$(x-6y)^2 = xy - 6y - x + 6$$

$$x^2 + 36y^2 - 12xy = xy - 6y - x + 6$$

$$x^2 + 36y^2 - 13xy + 6y + x - 6 = 0$$

~~$$(x-6y)^2 + 12$$~~

$$(x^2 - 12xy + 36y^2) + 6y + x - 6 = 0$$

$$x - 6y$$

$$(x-6y)^2$$

$$(x+6y)^2 - 24xy = xy - 6y - x + 6$$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$$

$$(x-6y)^2 = xy - 6y - x + 6$$

$$x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x + 6$$

$$(x-6)^2 +$$

$$x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)}$$

$$x - 6 = a \quad y - 1 = b$$

$$x = 6 + a \quad y = b + 1$$

$$a^2 + 2b^2 = 20$$

$$6 + a - 6b - b = \sqrt{ab}$$

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 = 20 \end{cases}$$

$$a^2 + 36b^2 - 12ab = ab$$

$$a^2 + 36b^2 = 13ab$$

$$a^2 + 2b^2 = 20$$

$$24b^2 = 13ab - 20$$

$$\frac{24b^2 + 20}{13b} = a$$

$$\left(\frac{24b^2 + 20}{13b}\right)^2 + 2b^2 = 20$$

$$\frac{24b^2 + 20}{169b^2} + 2b^2 = 20$$

$$\frac{24t + 20}{169t} + 2t = 20$$

$$24t + 20 + 2 \cdot 169t^2 = 20 \cdot 169t$$

~~$$24t + 20$$~~

$$20 - 2b^2 + 36b^2 - 13ab = 0$$

$$20 + 34b^2 - 13ab = 0$$

$$a^2 + 36b^2 - 12ab = ab$$

$$a^2 + 2b^2 = 20$$

$$a^2 = 20 - 2b^2$$

$$\frac{24t+20}{169t} + 2t = 20$$

$$24t+20+2 \cdot 169t^2 = 20 \cdot 169t$$

$$12t+10+169t^2 = 10 \cdot 169t$$

$$169t^2 - 1678t - 10 = 0$$

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 36b^2 - 12ab = ab \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$$

$$a^2 + 36b^2 = 13ab$$

$$a^2 + 2b^2 = 18$$

$$34b^2 = 13ab + 18$$

$$a = \frac{34b^2 - 18}{13b}$$

$$\frac{(34b^2 - 18)^2}{169b^2} + 2b^2 = 18$$

$$\frac{(34t - 18)^2}{169t} + 2t = 18$$

$$34^2 t^2 - 2 \cdot 34t \cdot 18 + 18^2 + 2 \cdot 169t^2 = 18 \cdot 169t$$

$$\begin{array}{r} 1690 \\ - 12 \\ \hline 1678 \\ 5 \quad 6 \quad 6 \\ 1678 \\ \hline 2 \times 1678 \\ 113424 \\ 11646 \\ \hline 10068 \\ + 20268 \\ \hline 1648 \\ 2814684 \\ \hline 6760 \\ \hline 2821444 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 3 \\ 169 \\ 40 \\ \hline 6760 \end{array}$$

$$3 \cdot 10^6 \quad 10^3 \cdot 1,7$$

$$\begin{array}{r} 2821444 \\ - 28 \\ \hline 021 \\ - 20 \\ \hline 14 \\ - 12 \\ \hline 24 \\ - 24 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 200 \cdot 200 \\ 40000 \\ 600 \cdot 600 \\ 360000 \\ 800 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 839 \\ 839 \\ \hline 17551 \\ 17514 \\ \hline 6712 \\ \hline 703921 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 810 \\ 810 \\ \hline 16100 \\ 648 \\ \hline 656106 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 82 \\ 182 \\ 164 \\ \hline 656 \\ 6724 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 83 \\ 83 \\ \hline 1649 \\ 664 \\ \hline 6889 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 85 \\ 85 \\ \hline 1725 \\ 680 \\ \hline 7225 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$34.17 t^2 - 34.18 t + 18 \cdot 9 + 169 t^2 = 9 \cdot 169 t$$

$$34.17 t^2 - 237 t + 18 \cdot 9 + 169 t^2 = 0$$

$$647 t^2 - 237 t + 18 \cdot 9 = 0$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 237 \\ \times 237 \\ \hline 1659 \\ 474 \\ \hline 56169 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 647 \\ \times 162 \\ \hline 11294 \\ + 3882 \\ \hline 104914 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 34 \\ \times 17 \\ \hline 238 \\ 37 \\ \hline 578 \\ + 169 \\ \hline 647 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 169 \\ + 68 \\ \hline 237 \end{array}$$

$$34^2 t^2 + 18^2 + 2 \cdot 34 \cdot 18 + 2 \cdot 169 t^2 = 18 \cdot 169 t$$

$$34.17 t^2 + 18 \cdot 9 + 34.18 t + 169 t^2 = 9 \cdot 169 t$$

$$647 t^2 - 846 t + 162 = 0$$

$$324 t^2 - 13ab = -18$$

$$34b^2 + 18 = 13ab$$

$$a = \frac{34b^2 + 18}{13b}$$

$$\frac{(34b^2 + 18)^2}{169b^2} + 2b^2 = 18$$

$$\frac{(34t + 18)^2}{169t} + 2t = 18$$

$$(4t + 18)^2 + 2 \cdot 169 t^2 = 18 \cdot 169 t$$

$$2b^2 = 18 - a^2$$

$$a^2 + 324 - 18a^2 - 13ab = 0$$

$$17a^2 + 13ab - 324 = 0$$

$$324 - 17a^2 = 13ab$$

$$b = \frac{324 - 17a^2}{13a}$$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$(x-6)^2 - 2(y-1)^2 + 20 - 38 = 0$$

$$(x-6)y - (x-6) \cdot \frac{(x-6)(y-1)}{a} = 0$$

$$x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \quad x = a+6 \quad y = b+1$$

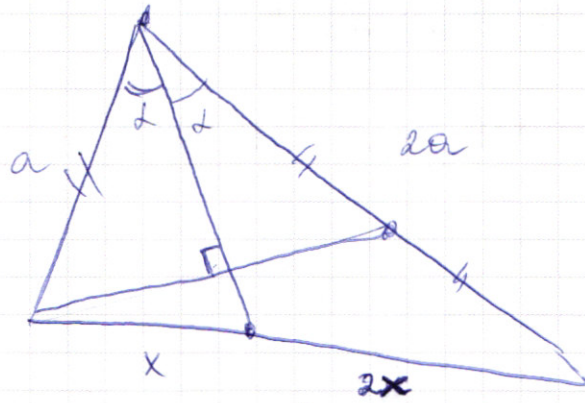
$$a+6 - b(b+1) = \sqrt{ab}$$

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 36b^2 - 13ab = 0 \\ a^2 + 2b^2 = 18 \end{cases}$$

$$a = -4$$

$$b = 1$$

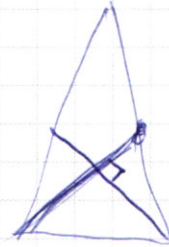
$$-4 + 6 = \sqrt{4}$$



$3b$

$$3a + 3b = 900$$

$$\begin{cases} 3a \geq 3b \\ 2a + 3b \geq a \\ a + 3b \geq 2a \end{cases}$$



$$\begin{cases} a + b = 300 \\ a \geq b > 0 \\ 3b \geq a \end{cases}$$

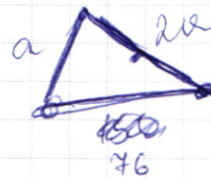
$$3b \geq a \geq b \\ a + b = 300$$

$$a = 300 - b$$

$$3b \geq 300 - b \geq b$$

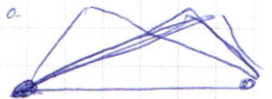
$$4b \geq 300 \geq 2b \\ 150 \geq b \geq 75$$

$$b \in [75; 150]$$



$$b \in [76; 149]^a$$

$$b < a < 3b$$



Для конгр b $2b-1$ вар a $b+1 \leq a \leq 3b-1$

$$\begin{array}{r} 149 \\ - 76 \\ \hline 73 \end{array} \quad 74$$

$$1 \leq a \leq 5$$

$$3b-1 - (b+1) + 1 = 2b-1 \text{ вар}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 2$

$x_6 = \frac{-6}{-16} = \frac{3}{8}$

$y = 8x - 6|2x - 1|$

$x \geq \frac{1}{2} \quad y = 8x - 6(2x - 1) = 8x + 6 - 12x = 6 - 4x$

$x < \frac{1}{2} \quad y = 8x + 6(2x - 1) = 20x - 6$

$6 - 8 + 7 = 5$

$\frac{-8 \cdot 9}{64} - \frac{16}{8} + 7 = \frac{-18}{8} - 2 + 7 = -2.25 - 2 + 7 = 2.75 = \frac{11}{4}$

$\frac{-6}{-16} = \frac{3}{8}$

$\frac{-8 \cdot 9}{64} + \frac{16}{8} + 7 = -2.25 + 2 + 7 = 6.75 = \frac{27}{4}$

$\frac{9}{2} + 7 = 11.5 = \frac{23}{2}$

$2b \geq a - 32$

$b \geq \frac{a}{2} - 16$

$0; 0; 0; 0$

Если нечет в числит, y не параболы

$$2b \geq 4 - a$$

$$b \geq 2 - \frac{a}{2}$$

$$b \geq 2 - a$$

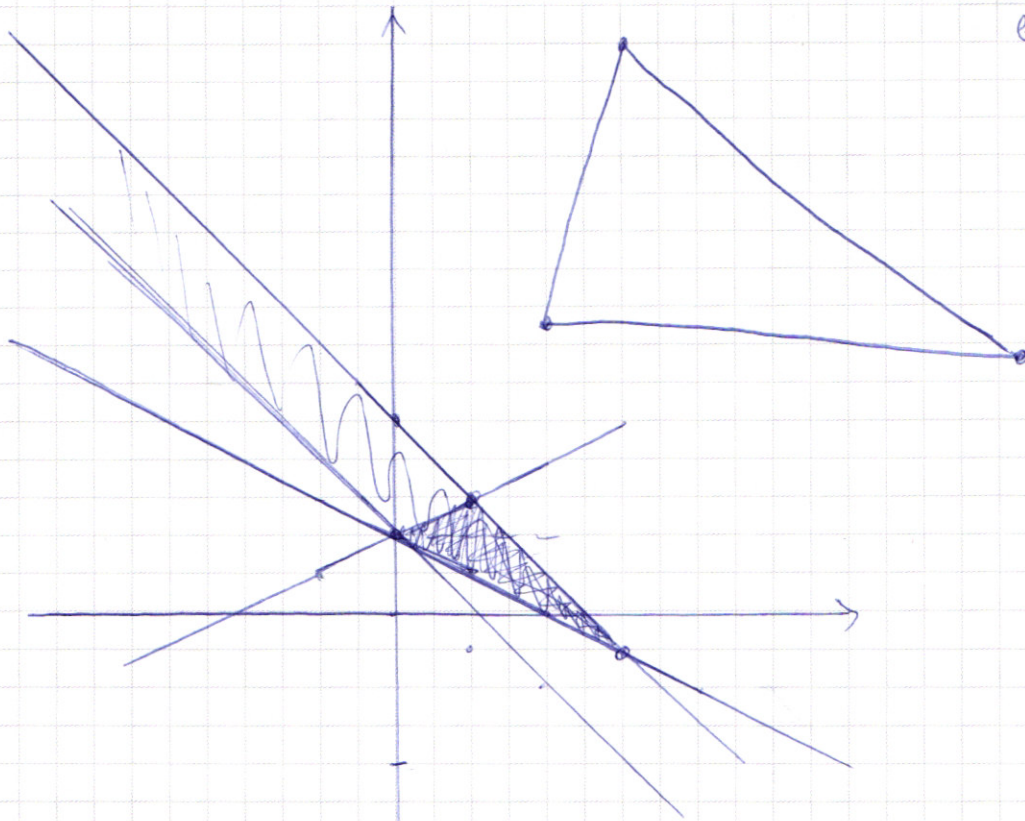
$$b \leq 5 - a$$

$$2 \geq b - \frac{a}{2}$$

$$b \leq 2 + \frac{a}{2}$$

$$2b \geq a - 32$$

$$b \geq \frac{a}{2} - 16$$



$$f(2) = 1$$

$$f(3) = 1$$

$$f(5) = 2$$

$$f(7) = 3$$

$$f(11) = 5$$

$$f(13) = 6$$

$$f(17) = 8$$

$$f(19) = 9$$

$$2 + 4 + \frac{6 + 4 + 4}{10}$$

$$2 + \frac{4 + 6 + 4 + 1 + 2 + 2}{10}$$

21 число

$$\begin{array}{r} 2 \\ 84 \\ + 50 \\ + 39 \\ \hline 181 \end{array}$$

f : поочередно \rightarrow ?

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$f(a) = f(a) - f(1) \quad f(1) = 0$$

$$f(x/y) < 0 \quad 2 \leq x \leq 22$$

$$2 \leq y \leq 22$$

$$f(x/y) + f(y) = f(x)$$

$$f(x) - f(y) < 0$$

$$f(x) < f(y)$$

для простых

~~...~~

$$f(4) = 2$$

$$f(6) = 2$$

$$f(8) = 3 \quad f(9) = 2 \quad f(10) = 3$$

$$f(12) = 3 \quad f(14) = 4$$

$$f(15) = 3 \quad f(16) = 4$$

$$f(18) = 3$$

$$f(20) = 4$$

$$f(21) = 4$$

$$f(22) = 6$$