МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Пусть q - знаменатель прогрессии, тогда $b=aq$, $c=aq^2$

$ax^2-2bx+c=0$

$ax^2-2aqx+aq^2=0$

$a\cdot(x^2-2qx+q^2)=0$

$a(x-q)^2=0$

$a=0 \Rightarrow$ прогрессия из нулей.

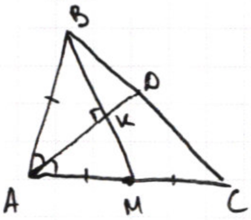
$x=q$ - четвертый член прогрессии, значит $aq^3=q \Rightarrow aq^2=1$

Тогда $c=aq^2=1$ - третий член прогрессии

Ответ: 1.

№2

Рассмотрим треугольник, у которого бис-са перпендикулярна медиане. Они не могут выходить из одной вершины, т.к. иначе угол при вершине будет больше 180°, чего быть не может.



В $\triangle ABC$ AD - бис-са, BM - медиана, пересек. в т. K, $\angle AKB=90^\circ$

Тогда в $\triangle ABM$ AK - бис-са и высота, зн $\triangle ABM$ - р/б, $AB=AM$

Поскольку AD - бис-са, $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}=\frac{1}{2}$. Если $AB=x$, $BD=y$, то

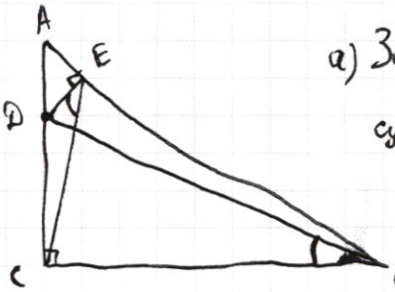
$3x+3y=900 \Rightarrow x+y=300$. Но из отрезков x, $2x$, $3y$ составлен тр-к, по нер-ву тр-ка:

$$\begin{cases} x<2x+3y \\ 2x<x+3y \\ 3y<3x \\ x+y=300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>y \Rightarrow x+y>2y \Rightarrow y<150,\ x>150 \\ x<3y \Rightarrow x+y<4y \Rightarrow y>75,\ x<225 \\ x+y=300 \end{cases}$$

Тогда всего 74 варианта пар x-y: $(76;224)$; $(77;223)$; ... $(149;151)$

Ответ: 74 треугольника.

№ 4



а) Заметим, что четыр. $CDEB$ - вписанный, т.к $\angle DCB = \angle DEB = 90^\circ$ сумма против. углов 180°. Тогда $\angle DEC = \angle DBC = 30^\circ$, т.к они опираются на 1 дугу.

То есть в прямоуг. тр-ке CDB $\angle DBC = 30^\circ$, $\angle CDB = 60^\circ$

$$\frac{BC}{DC} = tg\,60^\circ = \sqrt{3} \Rightarrow tg\,\angle CAB = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{\frac{3}{2}DC} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

б) $AC = \sqrt{7} \Rightarrow BC = AC \cdot tg\,\angle CAB = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \Rightarrow AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \frac{7}{\sqrt{3}}$

$DC = \frac{2\sqrt{7}}{3}$, $AD = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$\triangle ACB \sim \triangle AED$ по 2 углам с коэфф. $k = \frac{AB}{AD} = \sqrt{21}$

Тогда $AE = \frac{AC}{\sqrt{21}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $DE = \frac{BC}{\sqrt{21}} = \frac{2}{3}$

$\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{7}}{\frac{7}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

По т. косинусов для $\triangle CAE$: $EC^2 = AC^2 + AE^2 - 2AE \cdot AC \cos \angle CAE =$

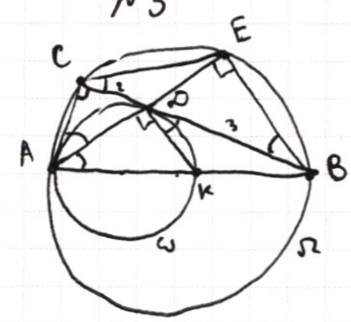
$= 7 + \frac{1}{3} - 2\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{16}{3} \Rightarrow EC = \frac{4}{\sqrt{3}}$

Тогда $S_{DEC} = \frac{DE \cdot EC \cdot \sin \angle DEC}{2} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

Ответ: а) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5



Пусть R - радиус Ω, r - радиус ω.

AB - диаметр $\Rightarrow \angle ACB = 90^\circ$, AK - диаметр $\Rightarrow \angle ADK = 90^\circ$

$\Rightarrow DK \parallel BE \Rightarrow \angle KDB = \angle DBE = \angle CAE$ (последнее равенство из вписанности, опираются на 1 дугу)

~~$\angle BDK$~~ $\angle DAK = \angle BDK$ по т. об угле между касат. и хордой.

Зн $\angle CAE = \angle EAB \Rightarrow AD$ - бис-са, тогда в $\triangle CAB$ $\frac{AC}{AB} = \frac{2}{3}$

По т. Пифагора для $\triangle ACB$: $4R^2 = \frac{16}{9}R^2 + 5^2 \Rightarrow \frac{20}{9}R^2 = 25 \Rightarrow R^2 = \frac{9}{4}\cdot 5$

т.е $R = \frac{3}{2}\sqrt{5}$

Степень точки B относ ω: $BD^2 = BK\cdot BA \Rightarrow 9 = 2R\cdot(2R-2r) \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \frac{4R^2-9}{4R} = \frac{45-9}{4R} = \frac{9}{R} = \frac{6}{\sqrt{5}}$

$\sin\angle CAB = \frac{CB}{AB} = \frac{5}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Степень точки D относ. Ω: $-AD\cdot DE = -CD\cdot DB \Rightarrow AD\cdot DE = 6$

$\triangle ADK \sim \triangle AEB$ $k = \frac{AK}{AB} = \frac{2r}{2R} = \frac{\frac{6}{\sqrt{5}}}{\frac{3}{2}\sqrt{5}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{4}{1} \Rightarrow AD = 2\sqrt{6}, DE = \sqrt{\frac{3}{2}}$

$\triangle ADB \sim \triangle CDE$, т.к $\angle ECD = \angle DAB$, $\angle CED = \angle DBA$, коэфф. $\frac{AD}{CD} = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$,

т.е $\frac{AB}{CE} = \sqrt{6} \Rightarrow CE = EB = \frac{AB}{\sqrt{6}} = \frac{2R}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

$S_{ACEB} = S_{ACB} + S_{CEB} = \frac{AC\cdot CB}{2} + \frac{CE\cdot EB\cdot \sin\angle CEB}{2} = \frac{\frac{2}{3}2R\cdot 5}{2} + \frac{CE^2\cdot\sin\angle CAB}{2} =$

$= 5\sqrt{5} + \frac{9\cdot 5\cdot\sqrt{5}}{6\cdot 3\cdot 2} = 5\sqrt{5}\left(1+\frac{1}{4}\right) = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

Ответ: $R = \frac{3}{2}\sqrt{5}$; $r = \frac{6}{\sqrt{5}}$; $S = \frac{25\sqrt{5}}{4}$.

№ 3

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} & (1) \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 & (2) \end{cases}$$

Решим ур-ние (1):

$$x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}$$

$$(x-6) - 6(y-1) = \sqrt{(x-6)(y-1)}$$

ОДЗ: $(x-6)(y-1) \geq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 6 \\ y \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 6 \\ y < 1 \end{cases} \end{array}\right.$

$$\left((x-6) - 6(y-1)\right)^2 = (x-6)(y-1)$$

$$(x-6)^2 - 12(x-6)(y-1) + 36(y-1)^2 = (x-6)(y-1)$$

$$(x-6)^2 - 13(x-6)(y-1) + 36(y-1)^2 = 0$$

$$\left((x-6) - 4(y-1)\right)\left((x-6) - 9(y-1)\right) = 0$$

$$(x - 2 - 4y)(x + 3 - 9y) = 0$$

$$y = \frac{x-2}{4} \text{ или } y = \frac{x+3}{9}$$

Ур-ние (2):

$$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$$

$$x^2 - 12x + 36 + 2y^2 - 4y + 2 = 18$$

$$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$$

Подставим решение (1)-ур-ния во (2), найдем, какие являются реш. системы

$$(x-6)^2 + 2\left(\frac{x-2}{4} - 1\right)^2 = 18$$

$$(x-6)^2 + 2\left(\frac{x-6}{4}\right)^2 = 18$$

$$(x-6)^2\left(1 + \frac{1}{8}\right) = 18$$

$$(x-6)^2 = 16$$

$$\left[\begin{array}{l} x - 6 = 4 \\ x - 6 = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10,\ y = 2 \\ x = 2,\ y = 0 \end{array}\right.$$

$$(x-6)^2 + 2\left(\frac{x+3}{9} - 1\right)^2 = 18$$

$$(x-6)^2 + 2\left(\frac{x-6}{9}\right)^2 = 18$$

$$(x-6)^2\left(1 + \frac{2}{81}\right) = 18$$

$$(x-6)^2 = \frac{81 \cdot 18}{83}$$

$$\left[\begin{array}{l} x - 6 = \frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}} \\ x - 6 = -\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 + \frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}},\ y = 1 + \frac{27\sqrt{2}}{9\sqrt{83}} \\ x = 6 - \frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}},\ y = 1 - \frac{27\sqrt{2}}{9\sqrt{83}} \end{array}\right.$$

Все решение подходят под условие ОДЗ

Ответ: $(10; 2)$; $(2; 0)$; $\left(6 + \frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}; 1 + \frac{27\sqrt{2}}{9\sqrt{83}}\right)$, $\left(6 - \frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}; 1 - \frac{27\sqrt{2}}{9\sqrt{83}}\right)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

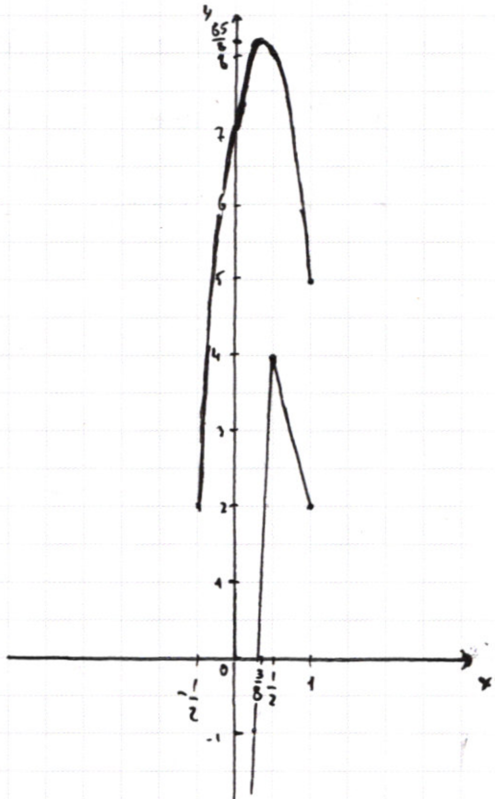
$8x - 6|2x-1| \leq ax+b \leq -8x^2+6x+7$

$-8x^2+6x+7$ – парабола, ветви вниз

Координаты вершины: $\left(\frac{3}{8}; \frac{65}{8}\right)$

При $x=1$ $y=5$

$x=-\frac{1}{2}$ $y=2$



$$y = 8x-6|2x-1| = \begin{cases} -4x+6, & x \geq \frac{1}{2} \quad (1) \\ 20x-6, & x < \frac{1}{2} \quad (2) \end{cases}$$

(1): $x=1$, $y=2$

$x=\frac{1}{2}$, $y=4$

(2): $x=-\frac{1}{2}$, $y=-16$

Точки $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$, $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$, $(1;5)$ лежат на 1 прямой $2x+3$

Прямая $ax+b$ должна проходить не выше точек $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ и $(1;5)$ и ниже точки $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$. Значит единственная такая прямая это $2x+3$

$a=2$, $b=3$

Ответ: $(2;3)$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№7

$f(x) = f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$, т.е $f(x) < f(y)$

Если $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, где p_i - простое число, то $f(x) = \alpha_1 f(p_1) + \ldots + \alpha_k f(p_k) =$
$= \alpha_1 \left[\frac{p_1}{2}\right] + \ldots + \alpha_k \left[\frac{p_k}{2}\right]$.

Если x, y - простые, то $f(x) = \left[\frac{x}{2}\right]$, $f(y) = \left[\frac{y}{2}\right]$, зн. $x < y$

От 2 до 22 простые 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 - 8 штук. Но $\left[\frac{2}{2}\right] = \left[\frac{3}{2}\right] = 1$,
т.е пара 2,3 не подходит, зн. всего пар простых x, y: $\frac{8 \cdot 7}{2} - 1 = 27$

черновик ☑ чистовик Страница № 6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a,\ b=aq,\ c=aq^2$

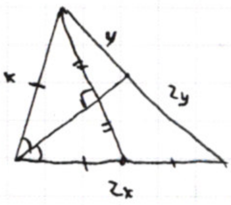
$ax^2-2bx+c=0$

$ax^2-2aqx+aq^2=0$

$a(x^2-2qx+q^2)=0$

$a(x-q)^2=0$

$x=q \Rightarrow aq^3=q \Rightarrow c=aq^2=1$



$3x+3y=900$

$x+y=300$

$2x<x+3y \quad x<3y$

$3y<3x \quad y<x$

$x+y<4y \quad y>75 \quad x<225$

$x+y>2y \quad y<150 \quad x>150$

$\boxed{74}$

$x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6}$

$x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)}$

$(x-6)(y-1)\geq 0$

$x^2+2y^2-12x-4y+20=0$

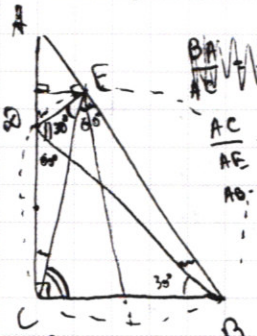
$x^2-12x+36+2y^2-4y+2-18=0$

$(x-6)^2+2(y-1)^2-18=0$

$(x-3)(x-9)+(y-1)^2+(y-4)(y+2)=0$

$x^2-12xy+36y^2=xy-6y+x+6$

$x^2-13xy+36y^2+6y+x-6=0$



$\frac{DE}{AE}=\frac{BC}{AC}$

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$

$\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}$

$AB\cdot AE=3AD^2$

$AC=\sqrt{7} \quad AD=\frac{\sqrt{7}}{3} \quad AE=$

$DC=\frac{2\sqrt{7}}{3}$

$BC=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

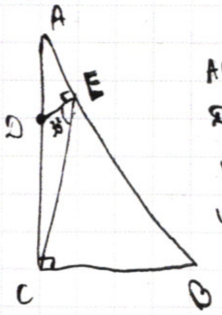
$AE=\frac{AC}{\sqrt{21}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{BC}{DC}=tg60^\circ=\sqrt{3}$

$\frac{BC}{AC}=\frac{BC}{\frac{3}{2}DC}=\boxed{\frac{2}{\sqrt{3}}}$

$AB=\sqrt{7+\frac{28}{3}}=\frac{7}{\sqrt{3}}$

$k=\frac{AB}{AD}=\frac{\frac{7}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{7}}{3}}=\sqrt{21}$



$AC^2=AE^2+EC^2+AE\cdot EC$

$DC^2=DE^2+EC^2-\sqrt{3}DE\cdot EC$

$13AD^2=AD^2+2EC^2+EC(AE+DE)(1-\sqrt{3})$

$12AD^2=2EC^2+EC(AE+DE)(1-\sqrt{3})$

$ED=\frac{BC}{k}=\frac{\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}=\frac{2}{3}$

$EC^2-\frac{2}{\sqrt{3}}EC+\frac{4}{9}-\frac{28}{9}=0$

$x^2-\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{24}{9}=0$

$S_{DEC}=\frac{DE\cdot EC\cdot\frac{1}{2}}{2}$

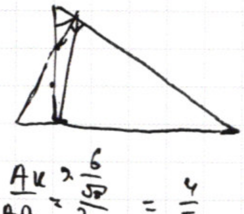
$7=\frac{1}{3}+EC^2+\frac{1}{\sqrt{3}}EC$

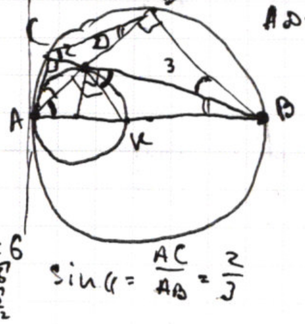
$EC^2+\frac{1}{\sqrt{3}}EC-\frac{20}{3}=0$

$EC=-\frac{5}{\sqrt{3}}$ не подх

$\boxed{EC=\frac{4}{\sqrt{3}}}$

$=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}}{2}=\frac{2}{3\sqrt{3}}$





$AD\cdot DE=CD\cdot DB=6$

$BK\cdot BA=BD^2=9$

$(2R-2r)\cdot 2R=9$

$4R^2-4rR=9$

$4R^2=\left(\frac{2}{3}2R\right)^2+5^2$

$4R^2=\frac{16}{9}R^2+25$

$\frac{20}{9}R^2=25 \quad R^2=9\cdot\frac{5}{4} \Rightarrow R=\boxed{\frac{3}{2}\sqrt{5}} \Rightarrow r=\frac{4R^2-9}{4R}=R-\frac{9}{4R}=\frac{3}{2}\sqrt{5}-\frac{3}{2\sqrt{5}}$

$\frac{AC}{AB}=\frac{2}{3}$

$r=\frac{45-9}{4R}=\frac{36}{4R}=\frac{9}{R}=\boxed{\frac{6}{\sqrt{5}}}$

$AC=\frac{2}{3}\cdot 2R=2\sqrt{5}$

$S_{ACB}=\frac{2\sqrt{5}\cdot 5}{2}=5\sqrt{5}$

$AD=\frac{AK}{AB}=\frac{\frac{6}{\sqrt{5}}}{\frac{3}{2}\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$

$\frac{AD}{DE}=\frac{4}{1}$

$AD\cdot DE=6$

$AD=2\sqrt{6}$

$DE=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$CE=\frac{CD}{AD}\cdot AB$

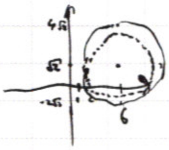
$\sin\varphi=\frac{AC}{AB}=\frac{2}{3}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}$ $\qquad x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$

$\sqrt{(x-6)(y-1)}$ $\qquad (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

$2 = y\sqrt{2}$



$$\begin{cases} x^2 - 13xy + 36y^2 + 6y + x - 6 = 0 \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$2x^2 - 12xy$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) =$

$x - 6 - 6y + 6 = (x-6) - 6(y-1)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) = f(x)$

$(x-6)^2 - 12(x-6)(y-1) + 36(y-1)^2 = (x-6)(y-1)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$(x-6)^2 - 13(x-6)(y-1) + 36(y-1)^2 = 0$

$D = 169 - 144 = 25$

$(x - 6 - 4(y-1))(x - 6 - 9(y-1)) = 0$

$(x - 4y - 2)(x - 9y + 3) = 0$

$y = \frac{x-2}{4} \qquad y = \frac{x+3}{9}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 6 \\ y \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 6 \\ y \leq 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$(x-6)^2 + 2\left(\frac{x-2}{4} - 1\right)^2 = (x-6)^2 + 2\left(\frac{x-6}{4}\right)^2 = (x-6)^2\left(1 + \frac{1}{8}\right) = 18$

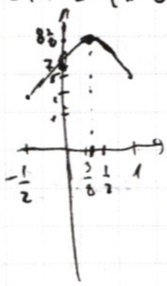
$(x-6)^2 \frac{1}{8} = 2$

$(x-6)^2 = 16$

$x - 6 = 4$

$x = 10 \qquad y = 2$

$(x-6)^2 + 2\left(\frac{x+3}{9} - 1\right)^2 = (x-6)^2 + 2\left(\frac{x-6}{9}\right)^2 = (x-6)^2\left(1 + \frac{2}{81}\right) = 18$



$(x-6)^2 = \frac{18 \cdot 81}{83}$

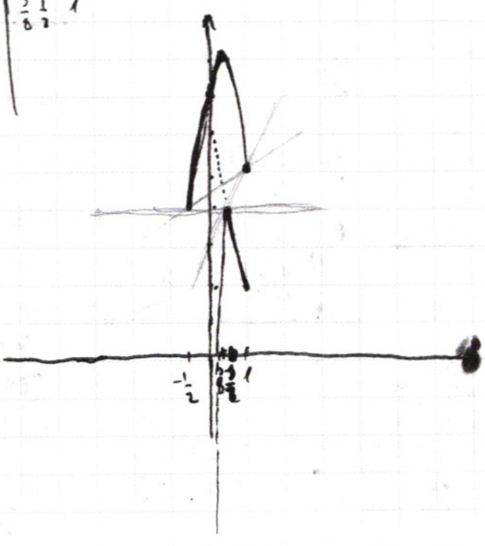
$-8x^2 + 6x + 7 \qquad D = 36 + 224 = 260$

$x_0 = -\frac{6}{2 \cdot 8} = \frac{3}{8} \qquad y_0 = -\frac{9}{8} + \frac{18}{8} + 7 = \frac{9}{8} + 7 = \frac{65}{8}$

$x - 6 = 27\sqrt{\frac{2}{83}}$

$-4x + 6 = 8x - 6(2x-1) \qquad x \geq \frac{1}{2}$

$20x - 6 = 8x - 6(1-2x) \qquad x < \frac{1}{2}$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)