МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$(x-1)=a$
$(y-2)=b$

$y-2-2x+2$ $=\sqrt{(x-1)(y-2)}$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

$2(x^2-2x+1$ $=2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

$\sqrt{(p-c)(p-a)(p-b)(p-d)}$

$b-2a=\sqrt{ab}$
$2a^2+b^2=3$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1)] a-первое член прогрессии
b-второй $\Rightarrow b = a\cdot q$, где q-знаменатель прогрессии
c-третий $\Rightarrow c = a\cdot q^2$
d-четвертый $\Rightarrow d = a\cdot q^3$

$ax^2+2bx+c=0$ d-корень $\Rightarrow$ подставив вместо x d мы получим тождество

$a\cdot a^2\cdot q^6 + 2\cdot a\cdot q\cdot aq^3 + a\cdot q^2 = 0$

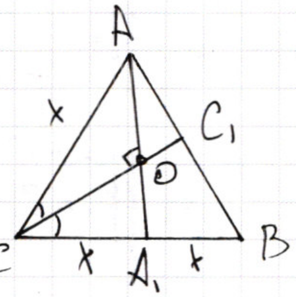
$aq^2(a^2q^4+2aq^2+1)=0$

1. $aq^2=0 \Rightarrow$ третий член прогрессии $=0$

2. $aq^2\neq 0 \Rightarrow a^2q^4+2aq^2+1=0$
$D=0 \Rightarrow aq^2 = -\frac{2}{2} = -1$ - третий член прогресс.

Ответ: 0 ; -1

(2)



указанные в условии медиана и бисс. не могут выходить из 1ой вершины т.к. тогда

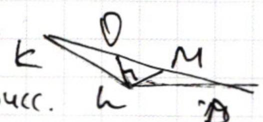
такой случай не возможен т.к.

1) ∠-острый

бисс. лежит строго внутри ∠ $\Rightarrow$ медиана, перпендикулярная ей идет вне ∠ $\Rightarrow$ попадает на продолжение противолежащей стороны, а не на саму сторону

2) ∠-прямой
Аналогично п.1, + стоит добавить, что ни один из ∠, образов. бисс. $\neq 0$

3) ∠-тупой



] Дан △KLP; ∠KLP-тупой; LM-мед; LO-бисс. ∠OLM=90°
]∠KLO=α
∠KLO=∠OLP (т.к. OL-бисс.) $\Rightarrow$ ∠OLP=β+90° (т.к. нам известно что ∠OLM=90°) $\Rightarrow \alpha=\beta+90° \Rightarrow$ ∠KLO можем представить в виде 90°+γ $\Rightarrow$ ∠KLP = β+90°+γ+90° $\Rightarrow$ ∠KLP=180°+(β+γ), что невозможно, ведь ∠ в △ не может превосходить 180° (а β,γ>0)
$\Rightarrow$ указанные в условии медиана и ~~высота~~ биссектр. выходят из разных вершин, из каких именно - значения не имеет т.к. мы просто получим зеркальный рисунок $\Rightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

∃ дан $\triangle ABC$; CC_1 – биссектр.; AA_1 – медиана

$AA_1 \cap CC_1 = O$

$\triangle ACO = \triangle A_1CO$ (т.к. $\angle COA = \angle COA_1 = 90^\circ$; $\angle OCA_1 = \angle OCA$ (т.к. OC – бисс.); OC – общ. сторона) $\Rightarrow AC = A_1C$ ∃ $AC = x \Rightarrow AC = A_1C = x$

$CA_1 = A_1B = x$, т.к. AA_1 – медиана. $\Rightarrow CB = 2x$

∃ $AC_1 = y \Rightarrow$ по св-ву бисс. $\frac{AC}{CB} = \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{1}{2}$ ∃ $AC_1 = y \Rightarrow C_1B = 2y$

$\Rightarrow 1200 = CA + AB + CB = x + 3y + 2x = 3(x+y) = 1200$

$x + y = 400$

$x = 400 - y$

условие сущ. △: (каждая из сторон меньше Σ 2х других)

$\begin{cases} 3y < 3x \\ x < 2x + 3y \\ 2x < x + 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < x \\ -x < 3y \\ x < 3y \end{cases} \to \begin{cases} y < 400 - y \\ 400 - y < 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < 200 \\ y > 100 \end{cases}$

выполняется всегда, т.к. каждая сторона > отриц. значения

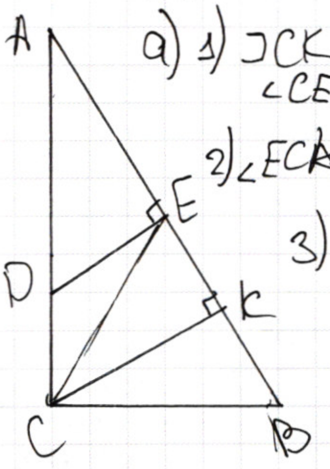
$y = [101; 199]$ ⇐

⇓

98 треугольников

Ответ: 98

④



а) 1) ∃ $CK \perp AB$

$\angle CED = 45^\circ$ (усл.) $\Rightarrow \angle CEB = 90^\circ - \angle CED = 45^\circ$ (смеж. ∠)

2) $\angle ECK = 90^\circ - \angle CEB = 45^\circ$ (по Σ остр. ∠ в △) $\Rightarrow \triangle CKE$ – р/б

⇓

$CK = EK$

3) $\triangle DAE \sim \triangle CAK$ (по 2 ∠)

т.к. ∠A общий

$\angle AED = \angle AKC = 90^\circ$

$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{EK} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AE}{EK} = \frac{3}{2}$

∃ $AE = 3y \Rightarrow EK = 2y = CK$ (п. 2)

$tg\angle CAB = \frac{CK}{AK} = \frac{2y}{5y} = \frac{2}{5}$

б) по т. Пифагора

$AK^2 + CK^2 = AC^2 \Rightarrow 25y^2 + 4y^2 = 29$

$29y^2 = 29$

$y = 1$, ($y = -1$ – невозможно, т.к. стороны △ имеют положит. знач.)

$S_{\triangle CEK} = EK \cdot CK \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$

$S_{\triangle KAC} = AK \cdot CK \cdot \frac{1}{2} = 5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 5$

$S_{CED} = S_{KAC} - S_{CEK} = 5 - 2 = 3$

Ответ: а) $\frac{2}{5}$

б) 3

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $2x^2-x-1$ – парабола

$x_0=\frac{1}{4}$ $y_0=-\frac{9}{8}$ – вершина

при $y=0 \to x_1=1$ $x_2=-\frac{1}{2}$

$x=\frac{3}{2} \Rightarrow y=$

$x=-\frac{1}{4} \Rightarrow y=-\frac{5}{8}$

2) $x+|2x-1|$ – кривая

1. $x \geq \frac{1}{2}$

$3x-1$ – прямая

x	1/2	3/2
y	1/2	~~5/2~~ 7/2

2. $x<\frac{1}{2}$

$1-x$ – прямая

x	y
1/2	1/2
-1/4	1 1/4

3) прямая $ax+b$ должна быть $\geq 2x^2-x-1$ и $\leq x+|2x-1|$ то есть лежать в заштрих. обл. при $x\in[-\frac{1}{4},\frac{3}{2}]$

проведем прямую через крайнюю нижнюю и левую т. (то есть через $(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8})$) и т., где меняется знак модуля пункта 2, то есть через $(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$

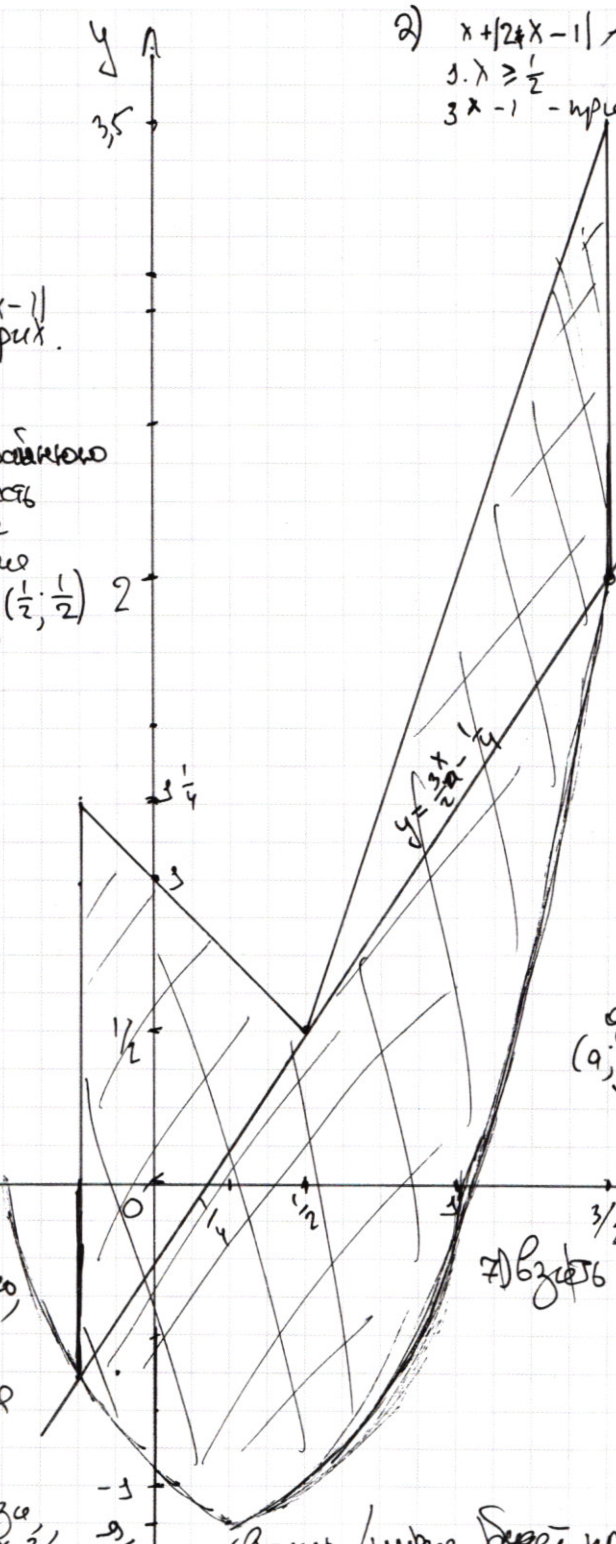
$$\begin{cases}-\frac{1}{4}\cdot a+b=-\frac{5}{8} \\ \frac{1}{2}\cdot a+b=\frac{1}{2}\end{cases}$$

$-\frac{3}{4}a=-\frac{9}{8}$

$6a=9$

$a=\frac{3}{2} \to b=-\frac{1}{4}$

$\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$ – ур-е прямой



4) проверим проходит ли прямая $\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$ через прав. т. правую т., самую нижн., то есть через $(\frac{3}{2};2)$

$\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}-\frac{1}{4}=2$

$\frac{9}{4}-\frac{1}{4}=2$

$2=2$

проходит

одну пару чисел $(a;b)$ мы нашли $(\frac{3}{2};-\frac{1}{4})$

5) при таких же a b меньше мы брать не можем, т.к. в таком случае прямая будет $<2x^2-x-1$ что невозможно, ни b и больше взять не можем т.к. тогда не будет выполняться ур. $ax+b<x+|2x-1|$

6) взять другое ~~меньшее~~ a нельзя т.к. прямая $ax+b$ при $x=3/2$ будет ниже $y=2$ (если взять больше знач. b, то прямая $ax+b$ будет при $x=\frac{1}{2}$ выше чем $y=\frac{1}{2}$, что невозможно

7) взять больше ~~меньше~~

(выше/ниже будет происходить

6) также если менять изм. ∠ наклона, т.е. a, то прямая не будет попадать в необходимую обл., ~~что~~ видно по графику $\Rightarrow$ подходит только одна пара (a, b)

Ответ: $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$

(3) $\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} = \sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$

$\exists\ x-1=a$
$y-2=b$

$y-2x = y-2-2x+2 = b-2a$
$-2(x-1)$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

$2a^2+b^2=3$

$\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ 2a^2+b^2=3 \text{ - окружность} \end{cases} \to$

ОДЗ:
$b-2a \geq 0$

$(b-2a)^2=ab$

$b^2-5ab+4a^2=0$

$D=25a^2-16a^2=9a^2$

$b_1=\frac{5a+3a}{2}=4a \quad b_2=\frac{5a-3a}{2}=a$

~~1) $b=\frac{5\pm 3a}{2}$~~

~~$2a^2+\frac{25+9a^2+10a}{4}=3 \mid \cdot 4$~~

~~$8a^2+25+9a^2+10a=12$~~

~~$17a^2+10a+13=0$~~

~~$D=100-4\cdot 13\cdot 17$~~

~~$D<0 \Rightarrow a\in\varnothing$~~

~~2) $b=\frac{5-3a}{2}$~~

~~$2a^2+\frac{25+9a^2-10a}{4}=3 \mid \cdot 4$~~

~~$17a^2-10a+13=0$~~

~~$D<0 \Rightarrow a\in\varnothing$~~

~~$\Downarrow$ решений нет~~

$\frac{4}{\sqrt6}-\frac{2}{\sqrt6}\geq 0$ - да $\Rightarrow a=\frac{1}{\sqrt6}; b=\frac{4}{\sqrt6}$ подходит

$-\frac{4}{\sqrt6}+\frac{2}{\sqrt6}\geq 0$ - нет $\Rightarrow a=-\frac{1}{\sqrt6}; b=-\frac{4}{\sqrt6}$ - не подходит

$1-2\geq 0$ - нет $\Rightarrow$ $a=1$, $b=1$ не подходит

$-1+2\geq 0$ - да $\Rightarrow$ $a=b=-1$ подходит

~~$\frac{1}{\sqrt6}-\frac{2}{\sqrt6}\geq 0$ - нет $\Rightarrow a=b=\frac{1}{\sqrt6}$~~

1) $b=4a$

$2a^2+16a^2=3$

$18a^2=3$

$a^2=\frac{1}{6}$

$a=\pm\frac{1}{\sqrt6} \to b=\pm\frac{4}{\sqrt6}$

2) $b=a$

$2a^2+a^2=3$

$a^2=1$

$a=\pm 1 \to b=\pm 1$

Ответ: 1) $a=-1$, $b=-1$ 2) $a=\frac{1}{\sqrt6}$, $b=\frac{4}{\sqrt6}$

(5) продолжение ~~на~~ стр. 5

по ф. Герона для 4^х уг. $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, где p - ~~полу~~периметр
a, b, c, d - стороны 4^х уг.

$S=\sqrt{2\sqrt2\cdot 2\sqrt2\cdot(\sqrt6+\sqrt2)(\sqrt6-\sqrt2)}=2\sqrt2\sqrt4=4\sqrt2$

Ответ: R (радиус большой окружн.) $=\frac{3\sqrt2}{2}$

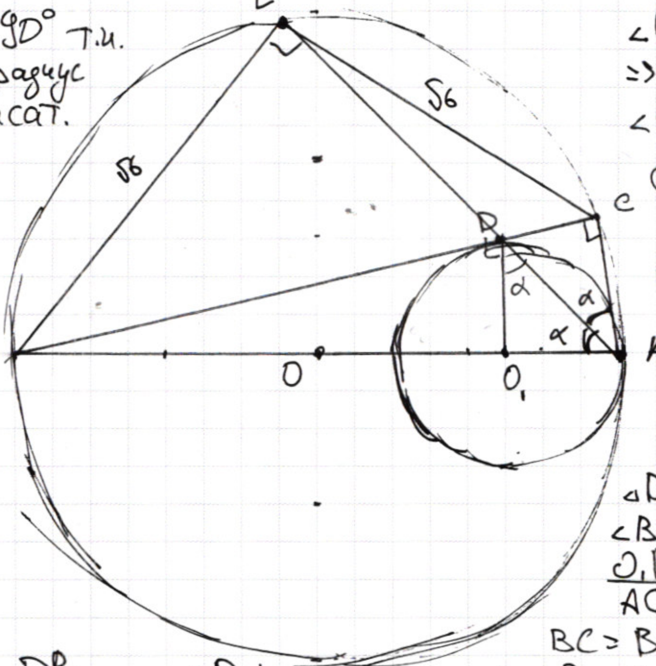
r (радиус маленькой окруж.) $=\frac{3\sqrt2}{4}$

S (площадь BACE) $=4\sqrt2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(5) I O - центр Ω, с радиусом R
O_1 - центр ω, с радиусом r

$\angle BDO_1 = 90^\circ$ т.к. O_1D - радиус, BD - касат.



I $\angle O_1AD = \alpha \Rightarrow \angle O_1DA = \alpha$ т.к. при основ. (т.к. $O_1D = O_1A = r \Rightarrow \triangle O_1AD$ - р/б)

$\angle O_1DC = 90^\circ$, т.к. O_1D - радиус; CD - касател.
$\Rightarrow \angle ADC = 90^\circ - \alpha$
$\angle DCA = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр Ω $\Rightarrow \angle CAD = 180^\circ - \angle CDA - \angle DCA = \cancel{90^\circ}\ \alpha$ (по Σ ∠ в △)

$\angle CAD = \alpha$, $\angle DAO_1 = \alpha$ $\Big| \Rightarrow \angle CAD = \angle DAO_1 \Downarrow$ AD - биссектр.

$\Rightarrow$ по св-ву бисс. $\cancel{\frac{O_1B}{BD} = O_1A}$ $\cancel{\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}}$ $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{3}{1}$

$\triangle DBO_1 \sim \triangle CBA$ по 2м ∠
∠B - общий; $\angle BDO_1 = \angle BCA = 90^\circ$ $\Big| \Rightarrow$

$\frac{O_1D}{AC} = \frac{BD}{BC}$ $O_1D = \frac{AC \cdot BD}{BC} = AC \cdot \frac{3}{4} = r$

$BC = BD + CD = 4$ $AC = \frac{4}{3}r$

$\frac{BO_1}{AB} = \frac{DB}{BC} \Leftrightarrow \frac{2R - r}{2R} = \frac{3}{4}$ $4r = 2R$ $\frac{R}{r} = \frac{2}{1}$ $R = 2r$ $R^2 = 4r^2$

по т. Пифагора в △ABC
$BC^2 + AC^2 = AB^2$
$16 + \frac{16}{9}r^2 = 4R^2$
$16 + \frac{4R^2}{9} = 4R^2$
$16 = \frac{(36-4)R^2}{9} = \frac{32R^2}{9}$
$R^2 = \frac{16 \cdot 9}{32} \Rightarrow R = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
$r = \frac{R}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$AB = 2R = 3\sqrt{2}$
$AC = \frac{4}{3}r = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4}\sqrt{2} = \sqrt{2}$

$\triangle BDE \sim \triangle CDA$ по 2м ∠ $\Rightarrow \frac{BD}{AD} = \frac{EB}{AC}$
($\angle BED = \angle DCA = 90^\circ$)
($\angle EDB = \angle CDA$ (верт.))
$EB = \frac{BD \cdot AC}{AD} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$
AD по т. Пифагора
$AD = \sqrt{CD^2 + AC^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$

т.к. BECA - впис. $\Rightarrow \angle BEC + \angle BAC = 180^\circ$

$\Rightarrow \angle BEC = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle DEC = 90^\circ - 2\alpha$ (т.к. ∠BEC - опир. на диам. $\Rightarrow \angle BEC = 90^\circ$)

$\angle EDC = \angle BDA = 90^\circ + \alpha$ (верт.) $\Rightarrow$ по Σ ∠ в △ $\angle ECD = \alpha$

$\angle ECD = \alpha = \angle DAB$
$\angle BDA = \angle EDC$ (верт.) $\Big| \Rightarrow$ по 2м ∠ $\triangle EDC \sim \triangle BDA \Rightarrow \frac{EC}{AB} = \frac{CD}{AD}$

$EC = \frac{AB \cdot CD}{AD} = \frac{3\sqrt{2} \cdot 1}{\sqrt{3}} = \sqrt{6}$

P - полупериметр BECA $P = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{6} + \sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6} + 2\sqrt{2}$

(продолж. на стр. 4)

$\frac{BO_1}{BA} = \frac{DB}{BC}$ $\frac{2R - r}{2R} = \frac{3}{4}$ $6R = 8R - 4r$

$4r = 2R$ $\frac{r}{R} = \frac{2}{4}$

$\frac{R}{r} = \frac{2}{1}$ $R = 2r$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $a=a$
$b=a\cdot q$
$c=a\cdot q^2$
$d=a\cdot q^3$ корень ур-я

$ax^2+2bx+c=0$

$a\cdot a^2\cdot q^6+2\cdot a\cdot a q^4+aq^2=0$

$aq^2(a^2q^4+2aq^2+1)=0$ 1. $aq^2=0$

2. $aq^2\neq 0$
$a^2q^4+2aq^2+1=0$ $\exists\ aq^2=t$

$t^2+2t+1=0$
$D=4-4=0$
$t=\frac{-2}{2}=-1\ =aq^2$ — третий член прогресс.

Ответ: -1 ; 0

2) $1200=(3x+3y)$
$400=(x+y)$
$x=400-y$

Условия $\exists\Delta$:
$$\begin{cases}y<3x\\ x<2x+3y\\ 2x<x+3y\end{cases}$$
$y<x$
$x<3y$

$$\begin{cases}y<400-y\\ 400-y<3y\end{cases}$$
$y>100$

$$\begin{cases}y<200\\ y>100\end{cases}$$

$y=[101;199]\Rightarrow 99$ треугольников

$xy-2x-y+2$
$x(y-2)-(y-2)=(y-2)(x-1)$

3)
$$\begin{cases}y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}\\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0\end{cases}$$

$y-2x\geq 0$
$$\begin{cases}(y-2x)^2=xy-2x-y+2\\ 2x^2+y^2=4x+4y-3\end{cases}$$

y^2+4x^2-5xy

$2y^2+6x^2$
y^2+3x^2-5xy

$$\begin{cases}y^2+4x^2-4xy=xy-2x-y+2\\ 2x^2+y^2=4x+4y-3\end{cases}$$

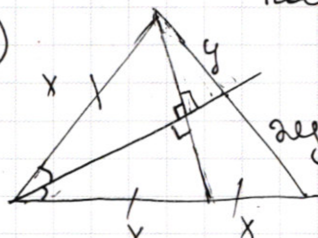
$2x^2-5xy=-6x-5y+5$

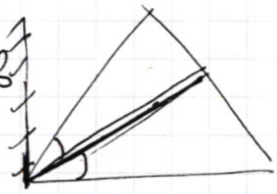
$2x^2-4x+2+y^2-4y+4=-3+2+4$

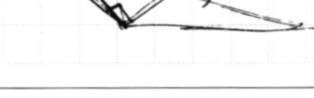
$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$

$(x-1)^2=3-2-(y-2)^2=1-(y-2)^2=(y-1)(3-y)$

$x=\sqrt{(y-1)(3-y)}+1$







☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

4 а) $\angle CED = 45^\circ$

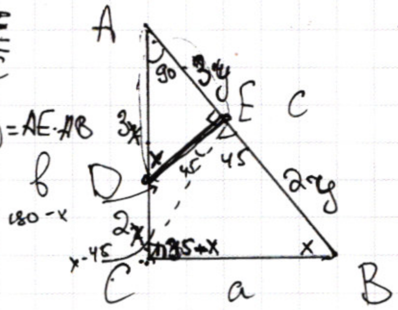
$\exists AC = b$

$\triangle ADE \sim \triangle CAB$ (по 2м $\angle$)

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

$AD \cdot AC = AE \cdot AB$

$3x \cdot$



$\exists \angle CBE = x \Rightarrow \angle EDC = 180 - x$ (по $\Sigma \angle$ в 4х уг)

$\angle ECD = 180 - (180 - x) - 45 = x - 45$ (по $\Sigma \angle$ в Δ)

$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{EB}$

180 -

$180 + x -$

$x = 45$

$90 - x - 45$

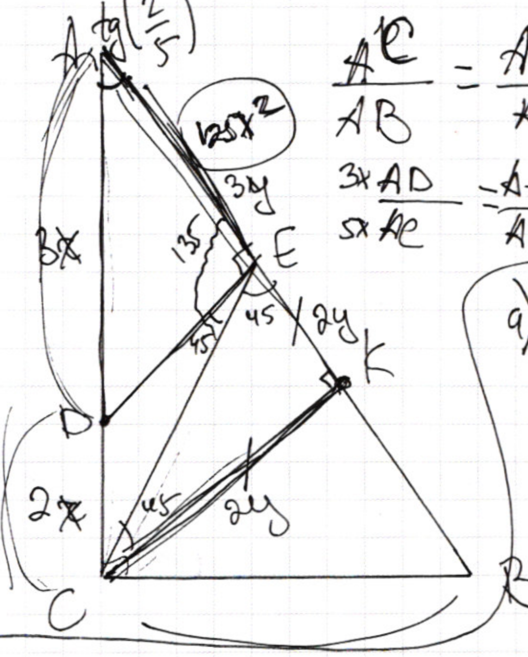
$180 - (135 - x) - x$

$180 - 135 + x - x = 45$

$25x^2$

$\sqrt{25y^2 - 25x^2} = 5\sqrt{y^2 - x^2}$

$9x^2 - 9y^2 = 3\sqrt{x^2 - y^2}$



$\frac{AC}{AB} = \frac{AK}{AC}$ $\quad AB \cdot AK = 25x^2$

AB

$\frac{3x\, AD}{5x\, AC} = \frac{AE}{AK}$ $\quad AK = \frac{AB}{25x^2}$

$AE = \frac{3x \cdot \frac{AB}{25x^2}}{5x} = \frac{3AB}{125x^2}$

а)

$\exists CK$ – высота к AB

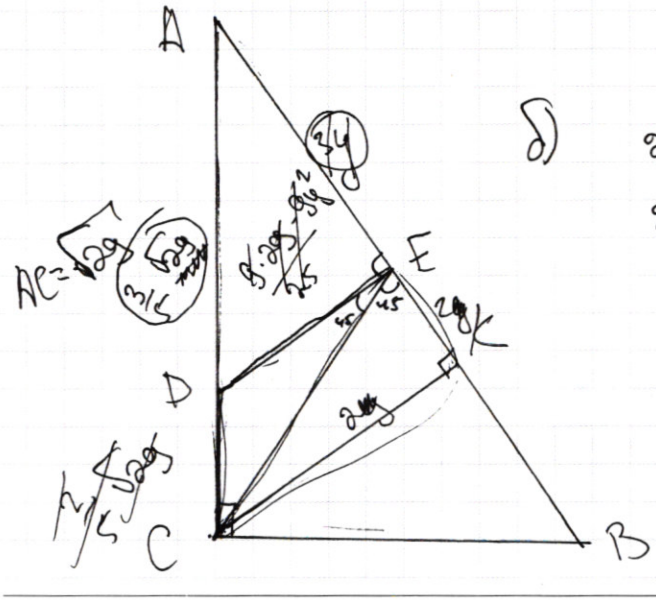
$\angle CEB = 45^\circ \Rightarrow EK = CK$

$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{AE}{EK} = \frac{3}{2}$

$\exists AE = 3y \quad EK = 2y$

$EK = CK = 2y$

$tg \angle CAB = \frac{2}{5}$



б)

$25y^2 + 4y^2 = 29$

$29y^2 = 29$

$y = 1 \qquad S_\Delta CEK = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$

$S_{KAC} = 5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 5$

$S_\Delta CED = 5 - 2 = 3$

$x+|2x-1|$

$x \geq \frac{1}{2}$

$x+2x-1$

$3x-1$

$x+1-2x$

$1-2x$

$$\begin{cases} \frac{2}{4}a+b=\frac{4}{8} \\ -\frac{1}{4}a+b=-\frac{5}{8} \end{cases}$$

$a=\frac{3}{2}$

$-\frac{3}{8}+b=-\frac{5}{8}$

$b=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}$

$2\cdot\frac{3}{4}a=\frac{9}{8}$

$a=$

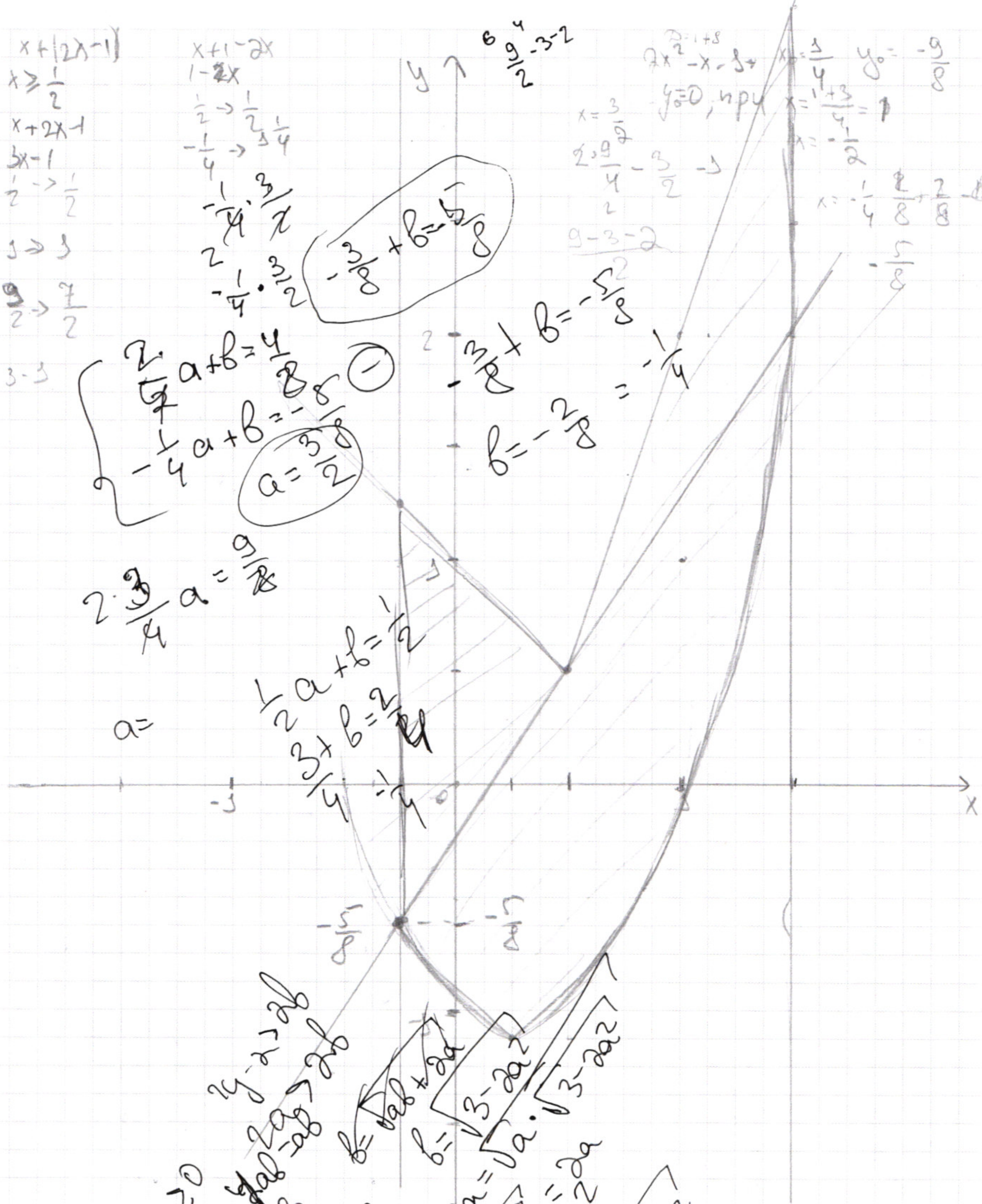
$\frac{1}{2}a+b=\frac{1}{2}$

$\frac{3}{4}+b=\frac{2}{4}$

$x_0=\frac{1}{4}$ $y_0=-\frac{9}{8}$

$y_0=0$, при $x=\frac{1+3}{4}=1$

$x=-\frac{1}{2}$



$y-x>2b$

$b-2a>0$

$b^2+4a^2-6ab-2ab>2b$

$b^2+2a^2=3$

$2a^2=5ab-3$

$b=\sqrt{3-2a^2}$

$\sqrt{3-2a^2}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{3-2a^2}-2a=\sqrt{a}\cdot\sqrt{3-2a^2}$

$3-2a^2-a\sqrt{3-2a^2}=4a^2=2a$

$3(1-2a^2)=a\sqrt{3-2a^2}$

$9(1+4a^4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5

$AC = \frac{1}{3} 2R = \frac{2}{3} R$

$3\frac{O_1D}{\frac{2}{3}R} = \frac{4}{3}$

$O_1D = \frac{8R}{9}$

$\frac{O_1D}{\frac{2}{3}R} = \frac{R-r}{2R}$

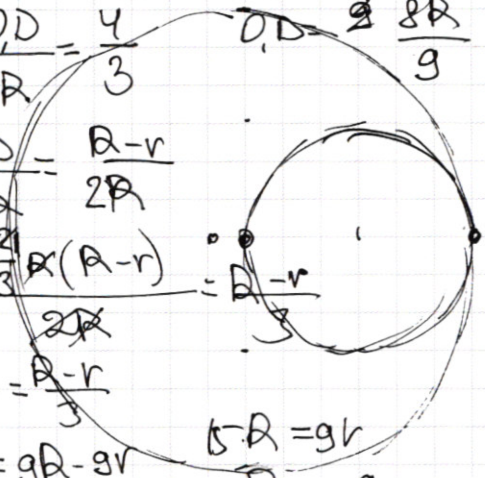
$O_1D = \frac{\frac{2}{3}R(R-r)}{2R} = \frac{R-r}{3}$

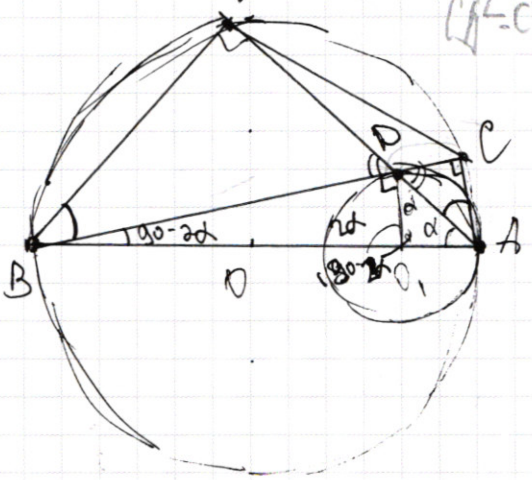
$\frac{8R}{9} = \frac{R-r}{3}$

$24R = 9R - 9r$

$15R = 9r$

$\frac{R}{r} = \frac{9}{15}$





$CA^2 = CD \cdot CB$

6

$1+8=9$

$2x^2 - x - 1 = 0$

$x_0 = \frac{1}{4}$

$y_0 = -\frac{9}{8}$

$2\cdot\frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1$

$\frac{1}{8} - \frac{2}{8} - \frac{8}{8}$

$x_1 = \frac{1+3}{4} = 1$

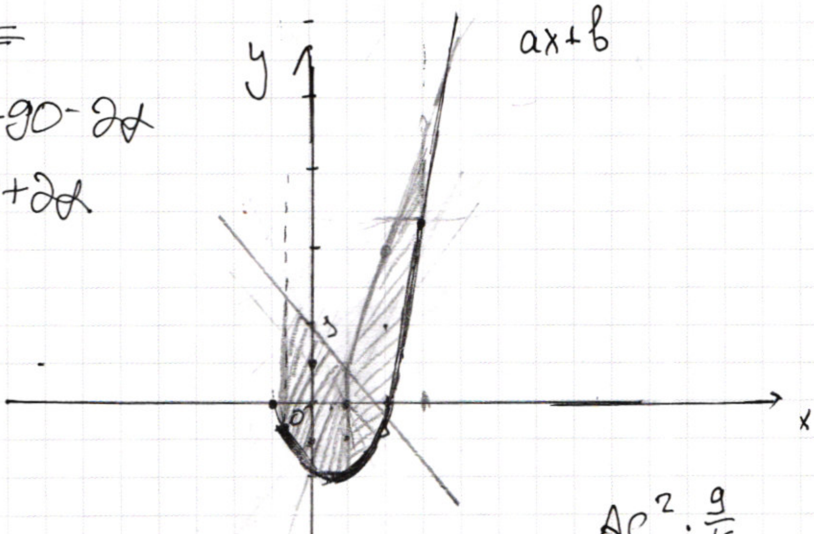
$x_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$

$x = 2$

$y = 8 - 2 - 1 = 5$

$180 - 90 - 2\alpha$

$90 + 2\alpha$



$1-2x$

$x + |2x-1|$

$2x - 1 \geq 0$

$x \geq \frac{1}{2}$

$y = 3x - 1$

$x + 1 - 2x$

$1 - x$

$x < \frac{1}{2}$

$x + 1 - 2x$

$1 - 2x$

$y = 1$

$y = 1 - 1$

$\frac{1}{2}$

$AC^2 \cdot \frac{9}{16}$

по т. Пифагора

$(2R - r)^2 = O_1D^2 + 9$

$(2R)^2 = AC^2 + 16$

3 x − 3

при x =

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)