МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 12 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c – соответственно первый, второй и третий члены некоторой арифметической прогрессии (при этом a, b, c не заданы, но известно, что $c < 0 < a$). Меньший корень уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$ является четвёртым членом этой прогрессии. Найдите его.

2. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \sqrt[3]{x^2 - y^2} = 57, \\ y + \sqrt[3]{x^2 - y^2} = -68. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Найдите количество шестизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12468.

4. [5 баллов] Четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм с тупым углом C. Пусть E – точка пересечения прямой AB с перпендикуляром к AC, проходящим через C, а прямая ED пересекает диагональ AC в точке N. Известно, что $CN = 4$, $AN = 8$, $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\angle ADC\right) = \frac{2}{5}$.

   а) Найдите $\operatorname{tg}\angle BAC$.

   б) Найдите площадь треугольника ENA.

5. [5 баллов] Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках M и N соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника AMN, касается стороны AB в точке A. Прямая AC повторно пересекает окружность в точке K. Найдите радиус окружности, угол ACB и площадь четырехугольника $ANKM$, если известно, что $AB = \sqrt{10}$, $BM = \sqrt{2}$.

6. [5 баллов] На доску выписаны попарно различные натуральные числа: часть из них делятся на 5, но не делятся на 7, остальные же наоборот делятся на 7 и при этом не делятся на 5. Оказалось, что выбрать тройку чисел из выписанных на доску так, чтобы среди них оказалось хотя бы одно кратное 5 и хотя бы одно кратное 7, можно 49 способами. Сколько было выписано чисел?

7. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$4 - 3x - |6x - 2| \leqslant ax + b \leqslant \frac{17 + 15x}{5 + 3x}$$

выполнено для всех x на промежутке $[-1; 1]$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 2

$$-\begin{cases} x+\sqrt[3]{x^2-y^2}=57 \\ y+\sqrt[3]{x^2-y^2}=-68 \end{cases}$$

$$x-y+\sqrt[3]{x^2-y^2}-\sqrt[3]{x^2-y^2}=57-(-68)$$

$$x-y=125$$

$$\begin{cases} x-y=125 \\ x+\sqrt[3]{(x-y)(x+y)}=57 \\ y+\sqrt[3]{(x-y)(x+y)}=-68 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x-y=125 \\ x+\sqrt[3]{125(x+y)}=57 \\ y+\sqrt[3]{125(x+y)}=-68 \end{cases}$$

$$(*)\begin{cases} x-y=125 \\ x+5\sqrt[3]{x+y}=57 \\ y+5\sqrt{x+y}=-68 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overset{x-y}{\cancel{x+y}}=125 \\ x+5\sqrt{x+y}+y+5\sqrt{x+y}=57-68 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=125 \\ x+y+10\sqrt[3]{x+y}=-11 \end{cases}$$

$$x+y+10\sqrt[3]{x+y}=-11$$

Пусть $\sqrt[3]{x+y}=t$, тогда $x+y=t^3$. Получим:

$$t^3+10t+11=0$$

$11:\ \pm1,\ \pm11$

При $t=-1$: $(-1)^3+10\cdot(-1)+11=-11+11=0$

$$\begin{array}{l|l} t^3+10t+11 & t+1 \\ \underline{t^3+t^2} & t^2-t+11 \\ -t^2+10t & \\ \underline{-t^2-t} & \\ 11t+11 & \\ \underline{11t+11} & \\ 0 & \end{array}$$

$t^2 - t + 11 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot 11 = -47 < 0$

$\varnothing$

$t = -1$

$\sqrt[3]{x+y} = -1$. Подставим в $*$. Получим

$\begin{cases} x-y = 125 \\ x + 5\cdot(-1) = 57 \\ y + 5\cdot(-1) = -68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=125 \\ x = 62 \\ x = -63 \end{cases}$

Ответ: $(62; -63)$

N 1

Формула n-ого члена ~~прогр~~ арифм. прогрессии:

$a_n = a_1 + d\cdot(n-1)$

Распишем b и $x_{\text{наим}}$, выразим d через a и c

$d = \frac{a_n - a_1}{n-1} = \frac{c-a}{3-1} = \frac{c-a}{2}$

$b = a + \frac{c-a}{2}$

$x = a + \frac{c-a}{2} \cdot 3 = \frac{3c-a}{2}$

Подставим b в ур-ние $ax^2+2bx+c=0$ –

$ax^2 + 2(a + \frac{c-a}{2})x + c = 0$

$ax^2 + (a+c)x + c = 0$

$D = (a+c)^2 - 4a\cdot c = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac = a^2 - 2ac + c^2 =$

$= (a-c)^2$. Так как корня 2, $D > 0$

$x_{1,2} = \frac{-(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2}}{2a} = \frac{-a-c \pm |a-c|}{2a}$

Так как $a > 0 > c$, то $x_{1,2} = \frac{-a-c \pm (a-c)}{2a}$

Так как $a > 0$ и $a - c > 0$, то $x_{\text{наим}}$ будет при

$\frac{-a-c-a+c}{2a} = \frac{-2a}{2a} = -1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: -1

№ 6

Пусть на доске всего n чисел и x из них делятся на 5. При этом $n \in N$, $x \in N$, $n > x$. Тогда чисел, кратных 7, $n-x$ и $n-x>0$.
В тройке у нас может быть либо пара чисел, делящихся на 5, и 1 число, кратное 7, либо пара на 7 и одно на 5.
Различных способов выбрать пару чисел, кратных 5 $\frac{x(x-1)}{2!} = \frac{x(x-1)}{2}$, а кратных 7 $\frac{(n-x)(n-x-1)}{2!} = \frac{(n-x)(n-x-1)}{2}$,
Способов выбрать тройку с парой чисел, кратных 5 $\frac{x(x-1)}{2} \cdot (n-x)$, а 7 $\frac{(n-x)(n-x-1)}{2} \cdot x$
Всего способов 49
$\Downarrow$

$$\frac{x(x-1)}{2} \cdot (n-x) + \frac{(n-x)(n-x-1)}{2} \cdot x = 49 \quad | \cdot 2$$

$$x(x-1)(n-x) + (n-x)(n-x-1) \cdot x = 98$$
$$(n-x)(x(x-1) + (n-x-1) \cdot x) = 98$$
$$(n-x)(x^2 - x + xn - x^2 - x) = 98$$
$$(n-x)(xn - 2x) = 98$$

Так как $n \in N$ и $x \in N$, то выражения в скобках хотя бы $\in Z$

Решим ур-ние в целых числах.

$98 = 1 \cdot 98 = 49 \cdot 2 = 14 \cdot 7$

Поочерёдно приравниваем каждую скобку и решаем полученные системы.

$$\begin{cases} n - x = 1 \\ nx - 2x = 98 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = x+1 \\ x^2 + x - 2x - 98 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = x+1 \\ x^2 - x - 98 = 0 \end{cases}$$

$x^2 - x - 98 = 0 \qquad D = 1 + 4 \cdot 98 = 393$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{393}}{2}$, не удовл $x \in N$

$$\begin{cases} n - x = 98 \\ nx - 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = x+98 \\ x^2 + 98x - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = x+98 \\ x^2 + 96x - 1 = 0 \end{cases}$$

$x^2 + 96x - 1 = 0 \qquad D = 96^2 + 4 \cdot 1 = 9220$

$x = \frac{-96 \pm \sqrt{9220}}{2}$, не удовл $x \in N$ $\varnothing$

$$\begin{cases} n - x = 49 \\ nx - 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = x+49 \\ x^2 + 49x - 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = x+49 \\ x^2 + 47x - 2 = 0 \end{cases}$$

$x^2 + 47x - 2 = 0 \qquad D = 47^2 + 4 \cdot 2 = 2217$

$x = \frac{-47 \pm \sqrt{2217}}{2}$, не удовл $x \in N$ $\varnothing$

$$\begin{cases} n - x = 2 \\ nx - 2x = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2+x \\ x^2 + 2x - 2x = 49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2+x \\ x^2 = 49 \end{cases}$$

$x^2 = 49$

$x = \left[\begin{matrix} 7 \\ -7 \text{, не удовл } x \in N \end{matrix}\right. \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ n = 7+2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ n = 9 \end{cases}$

$$\begin{cases} n - x = 14 \\ nx - 2x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 14+x \\ x^2 + 14x - 2x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 14+x \\ x^2 + 12x - 7 = 0 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2+12x-7=0 \qquad D=12^2+4\cdot7=172$

$x=\frac{-12\pm\sqrt{172}}{2}$, не удовл $x\in N$ $\varnothing$

$\begin{cases} n-x=7 \\ nx-2x=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=7+x \\ x^2+7x-2x-14=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=7+x \\ x^2+5x-14=0 \end{cases}$

$x^2+5x-14=0 \qquad D=25+4\cdot14=81$

$x=\frac{-5\pm\sqrt{81}}{2}$, не удовл $x\in N$ $\varnothing$

Ответ: 9

№ 3

Найдем степени десятки.

При $n=1$: $10^1; 10^2; 10^3$, максим остатки 9; 99; 999 их сумма ~~101~~ 1108, что меньше 12468

При $n=2$: $10^2; 10^3; 10^4$, макс. остатки 99, 999, 9999 их сумма 11098 < 12468

При $n=3$: $10^3, 10^4, 10^5$, макс остатки 999, 9999, 99999 их сумма 110998 > 12468.

То есть, остатки ищутся от деления на $10^3, 10^4, 10^5$.

~~При $n=4$ появится 10^6, а у шестизначного числа остаток будет хотя бы~~ 1 до 10^6, так как при делении на 10^7 у шестизначного числа будет остаток либо 0 (тогда и по предшествующим степеням тоже 0, а это не удовл. условию), либо $>10^6$, что уже больше суммы из условия

Рассмотрим случай для $10^3, 10^4, 10^5$. Пусть x − остаток от деления на 10^3, y − остаток от деления на 10^4 и отнять x, и z − на 10^5 отнять x и y. Пусть число − n

Тогда $n \equiv x \pmod{10^3}$

$n \equiv x+y \pmod{10^4}$

$n \equiv x+y+z \pmod{10^5}$

$x + x+y + x+y+z = 12468$

$3x + 2y + z = 12468$

468 может дать только $3x \Leftrightarrow x = 156$

При $\cancel{y}\ z=0$, $y = 6000$

В шестизначных числах есть 9 чисел вида

~~468~~ ~~**0156~~

*06156

а при $z \neq 0, y \neq 0$

$z = 10000$, $y = 1000$

В шестизначных числах есть 9 чисел вида

*11156

Тогда для случая $10^3, 10^4, 10^5$, есть $9+9=18$ чисел.

Для $10^4, 10^5, 10^6$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4-3x-|6x-2| \le \frac{17+15x}{5+3x}$

$x \ge \frac{1}{3}$

$4-3x-6x+2 \le \frac{17+15x}{5+3x}$

$6-9x \le \frac{17+15x}{5+3x}$ $\quad x \ne \frac{5}{3}$

$(6-9x)\cdot(5+3x) \le 17+15x$

$30+18x-45x-27x^2-17-15x \le 0$

$-27x^2-42x+13 \le 0$

$27x^2+42x-13 \ge 0$

$\frac{D}{4} = 21^2+13\cdot 27 = 441+351 = 892$

$27 \cdot 13 = 81 + 27\cdot 10 = 351$

$D = 4((a+\frac{c-a}{2})^2 - ac) =$

$D = 4(a^2+(c-a)\cdot a+\frac{c^2-2ac+a^2}{4}-ac)$

$= 4\cdot\frac{c^2-2ac+a^2}{4} = c^2-2ac+a^2 = (c-a)^2$

$x_1 = a+\frac{c-a}{2}\cdot 3 = \frac{3c-a}{2} = 1{,}5c-0{,}5a$

$a > b > c$

$a_n = a_1 + d(n-1)$

$a = a_1$

$b = \cancel{a+\frac{a-c}{2}}\ a+\frac{c-a}{2}$

$c = a+\cancel{\ldots}\ c-a$

$x_1 = a+\frac{3c-3a}{2}$

$D = 4b^2-4ac$

$x = \frac{-2b\pm 2\sqrt{b^2-ac}}{2a} = \left[\ a+\frac{3c-3a}{2}\right.$

Так как $a>0$, $D>0$

$x = \frac{-2(a+\frac{c-a}{2}) + 2\sqrt{(a+\frac{c-a}{2})^2-ac}}{2a} = a+\frac{3c-3a}{2}$

$a+\frac{c-a}{2} - \sqrt{a^2+(c-a)\cdot a+\frac{c^2-2ac+a^2}{4}-ac}$

$0{,}5a+0{,}5c - \sqrt{ac+\frac{c^2-2ac+a^2}{4}-ac} -$

$\frac{0{,}5a+0{,}5c-\frac{c-a}{2}}{a} = a+\frac{3c-3a}{2}$

$\frac{a+c}{2a} - \frac{c-a}{2a} = \frac{3c-a}{2}$

$2a = 3c-a$

$a = c$

1-я цифра x, в остатке $3x$ $\quad x - 0$

$$1\,6\,0\,9\,7$$

$99 + 999 + 9999 =$

1 0 9 8

7

$$\begin{array}{r|l} 468 & 3 \\ 3 & 156 \\ \hline 16 & \\ 15 & \\ \hline 18 & \end{array}$$

$10 \geq 3$ $\quad 10000 \equiv 0$

27, 24, 21, 18, 15, 12, 9, 6, 3, 0 $\quad z + 3x$

последняя $\quad 3x = 2468$

~~Первая~~ цифра 6 $\quad z + x + y$

2я цифра: $3y = 68 - 18 = 50$ $\quad x + y$

x – остаток от деления на 1000 $\quad x$

y – на 10^4

z – на 10^5

$3x + y \cdot 10^4 + z \cdot 10^5 + y \cdot 10^4 = 12\,468$

$z \cdot 10^5 + 2y \cdot 10^4 + 3x = 12\,468$

$ax^2 + 2\left(a + \frac{c-a}{2}\right)x + c = 0$

$ax^2 + (2a + c - a)x + c = 0$

$ax^2 + (a+c)x + c = 0$

$D = (a+c)^2 - 4ac = a^2 - 2ac + c^2 = (a-c)^2$

$$x = \frac{-2a - c + a \pm \sqrt{(a-c)^2}}{2a} = \frac{-a - c \pm (a-c)}{2a}$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{-a - c + a - c}{2a} = a + \frac{3c - 3a}{2} \\ \frac{-a - c - a + c}{2a} = a + \frac{3c - 3a}{2} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} -\frac{c}{a} = \frac{3c - a}{2} \\ -1 = \frac{3c - a}{2} \end{array}\right.$$

Так как $a > 0$ и $D > 0$, то наим x при $\frac{-(a+c) - (a-c)}{2a}$

Ответ: -1

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$-\begin{cases} x+\sqrt[3]{x^2-y^2}=57 \\ y+\sqrt[3]{x^2-y^2}=-68 \end{cases}$$

$x-y=125$

$x^2-y^2=(x-y)(x+y) = 125(x+y)$

$$\begin{cases} x+5\sqrt[3]{x+y}=57 \\ y+5\sqrt[3]{x+y}=-68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\sqrt[3]{x+y}=57-x \\ 5\sqrt[3]{x+y}=-68-y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 125\cdot(x+y) = 57^3-3\cdot 57^2\cdot x+3\cdot 57\cdot x^2-x^3 \\ 125\cdot(x+y) = -68^3-3\cdot 68^2\cdot y+3\cdot(-68)\cdot y^2-y^3 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 57 \\ 57 \\ \hline 399 \\ 285\ \\ \hline \times\ 3249 \\ 57 \\ \hline 3 \end{array}$$

$125x+125y=$

$\sqrt[3]{x+y}=t$, $x+y=t^3$

$$+\begin{cases} x+5\sqrt[3]{x+y}=57 \\ y+5\sqrt[3]{x+y}=-68 \end{cases}$$

$x+y+10\sqrt[3]{x+y}=-11$

$t^3+10t=-11$

$t^3+10t+11=0$

~~$11: \pm1; \pm11$~~

~~$t=1$~~

~~| | 1 | 10 | -11 |~~
~~| 1 | 1 | 11 | 0 |~~

~~$t^3+10t-11 \,|\, t-1$~~
~~$t^3-t^2 \quad | \; t^2+t+11$~~
~~t^2+10t~~
~~t^2-t~~
~~$11t-11$~~
~~$11t-11$~~
~~0~~

$t^2+t+11=0$ $D=1-44=-43<0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sqrt[3]{x+y}=1$

$x+y=1$

$x=1-y$

$$\begin{array}{r} \times 52 \\ 52 \\ \hline 104 \\ 260 \\ \hline 2704 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times 73 \\ 73 \\ \hline 219 \\ 511 \\ \hline 5329 \end{array}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x+5\sqrt[3]{x+y}=57 \\ y+5\sqrt[3]{x+y}=-68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5=57 \\ y+5=-68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=52 \\ y=-73 \end{cases}$$

$52+\sqrt[3]{2704-5329}=57$

$52-\sqrt[3]{2625}=57$

$52-\sqrt[3]{125\cdot(-21)}=57$

$$\begin{array}{r} 5329 \\ 2704 \\ \hline 2625 \end{array} \qquad \begin{cases} x=62 \\ y=-63 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} 2625 & 5 \\ 525 & 5 \\ 105 & 5 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$t^3+10t+11=0$

$11: \pm1; \pm11$

$t=-1$ $\quad (-1)^3+10\cdot(-1)+11=0$

$-11+11=0$

$0=0$

$$\cancel{\begin{array}{c|c|c|c|} & 1 & 10 & 11 \\ -1 & 1 & 9 & 2 \end{array}}$$

$$\begin{array}{l|l} t^3+10t+11 & t+1 \\ \underline{t^3+t^2} & \overline{t^2-t+1} \\ -t^2+10t & \\ \underline{-t^2-1t} & \\ 11t+11 & \\ \underline{11t+11} & \\ 0 & \end{array}$$

$t^2-t+1=0$

$D=1-4=-3<0$

$\varnothing$

$t=-1$

$\sqrt[3]{x+y}=-1$

$(\sqrt[3]{x+y})^3=(-1)^3$

$x+y=-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x+y}=-1 \\ x+5\cdot\sqrt{x+y}=57 \\ y+5\sqrt{x+y}=-68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x+y}=-1 \\ x+5\cdot(-1)=57 \\ y+5(-1)=-68 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x=62 \\ y=-63 \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

Пусть всего чисел - n, а кратных 5 - x. При этом $\begin{cases} x>0 \\ n-x>0 \end{cases}$

Тогда выбор где 2 числа кратных 5 - $x\cdot(x-1)\cdot(n-x)$

А где 2 кратных 7 $x\cdot(n-x)\cdot(n-x-1)$

Тогда получим ур-ние

$x\cdot(x-1)(n-x)+x\cdot(n-x)(n-x-1)=49$

$(x^2-x)(n-x)+(n-x)(nx-x^2-x)=49$

$(n-x)(x^2-x+nx-x^2-x)=49$

$(n-x)(nx-2x)=49$

$(n-x)(nx-2x-49n+49x)=0$

$(n-x)(nx-49n+47x)=0$

$n-x=0$ — не удовл условию

$nx-49n+47x=0$

$n(x-49)=-47x$

$n=\frac{47x}{49-x}\in Z$

~~$nx=49n+47x$~~

~~$nx=47n+47x+2n$~~

$n(x-49)=47x$

$n=\frac{47x}{x-49}>0$

$x>0$

$x>49$

$x\geq 50$

$\begin{cases} \frac{47x}{x-49}\in Z=n \\ x<n \\ x\geq 50 \end{cases}$ $\Rightarrow x=50$

$n=\frac{47\cdot 50}{50-49}=2350$

$\begin{cases} \frac{47x}{49-x}=n\in Z \\ x>0 \\ x<49 \\ x<n \end{cases}$

~~$\frac{47}{x-49}+\frac{x}{x-49}=n\in Z$~~

$47x\ \vdots\ (x-49)=0$

$47x\equiv 0 \pmod{(x-49)}$

$\frac{47\cdot 96}{47}=n$

$x=n$

$\frac{47\cdot 143}{94}=n$

$n=\frac{143}{2}$

$47\cdot 48=2256$

$\begin{array}{r} \times 48 \\ 376 \\ 188 \\ \hline 2256 \end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

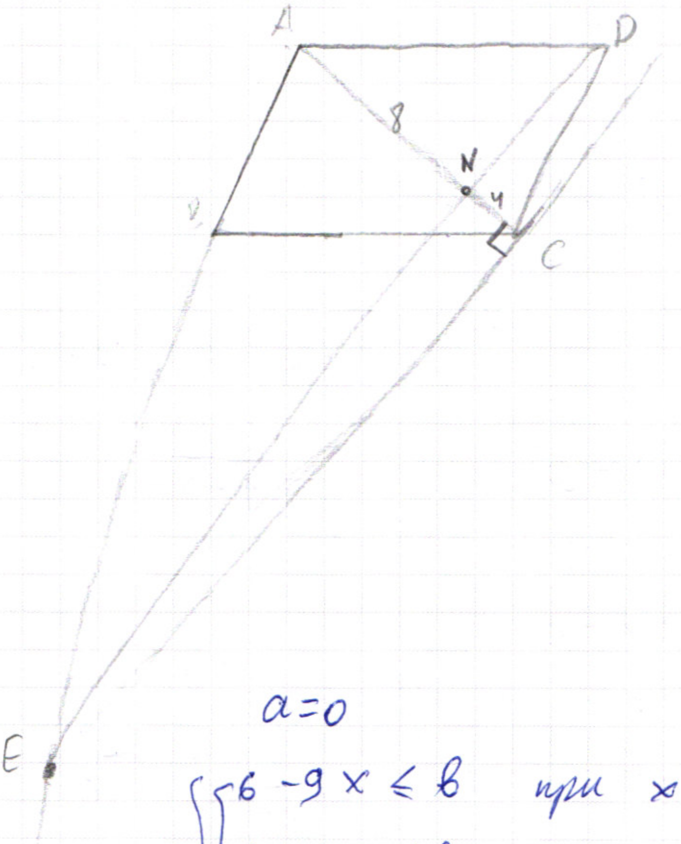
$$\begin{cases} n-x=1 \\ x(n-2)=98 \end{cases} \quad n=x+1 \quad x^2-x-98=0 \quad D=1+360+32=393$$

$\varnothing$

$n=9$

$$\begin{cases} 4-3x-|6x-2| \le ax+b \\ ax+b \le \dfrac{17+15x}{5+3x} \end{cases}$$

$\{ 4-3x-6x+2$



$$\begin{cases} \begin{cases} 4-3x-6x+2-ax-b \le 0 \text{ при } x \ge \frac{1}{3} \\ 4-3x+6x-2-ax-b \le 0 \text{ при } x < \frac{1}{3} \end{cases} \\ \dfrac{17+15x-5ax-5b-3ax^2-3bx}{5+3x} \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} 6-9x-ax-b \le 0 \text{ при } x \ge \frac{1}{3} \\ 2+3x-ax-b \le \text{ при } x < \frac{1}{3} \end{cases} \\ \cancel{17+15x} \\ \dfrac{17+(15-5a-3b)x-3ax^2-5b}{3x+5} \ge 0 \end{cases}$$

$a=0$

$$\begin{cases} \begin{cases} 6-9x \le b \text{ при } x \ge \frac{1}{3} & \text{макс при } x=\frac{1}{3} & 4 \le b \\ 2+3x \le b \text{ при } x < \frac{1}{3} & \text{макс при } x=\frac{1}{3} & 3 \le b \end{cases} \\ \dfrac{17-5b+(15-3b)x}{5+3x} \ge 0 \end{cases}$$

$(5+3x)ax+b \le 17+15x$

$5ax+3ax^2+5b+3bx \le 17+15x$

$3ax^2+(5a+3b\overset{-15}{})x+5b-17 \le 0$

$D=(5a+3b-15)^2-4\cdot 3a\cdot(5b-17)=25a^2+15ab-75a$

$+15ab+9b^2-45b-75a-45b+225-60ba+204a=$

$=25a^2+54a-30ab-90b+9b^2+225=(5a-3b)^2+\cancel{15^2}$

$9(6a-10b+25)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$n^2x - 2nx - nx + 2x^2 - 49 = 0$

$n^2x - 3nx + 2x^2 - 49 = 0$

$D = 9x^2 - 4x(2x^2 - 49) = x^2 - 196x > 0$

$x(x+196) > 0 \quad x > 196$

$n = \dfrac{3x \pm \sqrt{x^2 - 196x}}{2x} = 1{,}5x \pm x^2 - 196x$

5: $x \cdot (x-1)(n-x)$ 7: $x(n-x)(n-x-1)$

$x \cdot (x-1)(n-x) + x(n-x)(n-x-1) = 49$

$(n-x)(x^2 - x + nx - x^2 - x) = 49$

$(n-x)(xn - 2x) - 49 = 0$

~~$xn^2 - x^2n - 2nx$~~ Так как $x \in N$ и $n \in N$, то выражения в скобках $\in N$

$xn^2 - 2xn - x^2n + 2x^2 - 49 = 0$

~~$xn^2 - (x^2+2)n + 2x^2 - 49 = 0$~~

~~$D = (x^2+2)^2 - 4x(2x^2 - 49) = x^4 + 4x^2 + 4 - 8x^3 + 196x \geq 0$~~

$n = \dfrac{x^2 + 2 \pm \sqrt{x^4 + 4x^2 + 4 - 8x^3 + 196}}{2x} =$

$49 = 7 \cdot 7 = 49 \cdot 1$

$$\left[\begin{array}{l}(n-x)(xn-2x) = 7 \cdot 7 \\ (n-x)(xn-2x) = 49 \cdot 1\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} n-x = 7 \\ xn - 2x = 7 \end{cases} \\ \begin{cases} n-x = 1 \\ xn - 2x = 49 \end{cases} \\ \begin{cases} n-x = 49 \\ xn - 2x = 1 \end{cases}\end{array}\right.$$

$\begin{cases} n-x = 7 \\ x(n-2) = 7 \end{cases}$ $\begin{cases} n = 7 + x \\ n = \dfrac{7+2x}{x} \end{cases}$

$7 + x = \dfrac{7+2x}{x}$

$7x + x^2 = 7 + 2x$

$x^2 + 5x - 7 = 0$

$D = 25 + 28 = 53$

$x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{53}}{2} \notin N$

$\begin{cases} n-x=1 \\ nx-2x=49 \end{cases}$ $\begin{cases} n=1+x \\ x(x+1-2)=49 \end{cases}$ ~~$\begin{cases} n=1+x \\ x^2-x-49=0 \end{cases}$~~ $\begin{cases} n=1+x \\ x^2-x+49=0 \end{cases}$ $D<0$

~~$\begin{cases} n-x=49 \\ nx-2x=1 \end{cases}$ $\begin{cases} n=49+x \\ x(49+x-2)=49 \end{cases}$ $\begin{cases} n=49+x \\ 49x-x^2-49=0 \end{cases}$~~

$D=(49)^2-4\cdot 49=2205$

$n=1+x$

$x(x-1)-49=0$ $\quad x\cdot(x+47)-49=0$

$x^2-x-49=0$ $\quad x^2+47x-49=0$

$D=1+196=197$ $\quad D=47^2+196$

$49\cdot 49=2401$, $2401-196=2205$

~~$45\cdot 45=2025$~~

$47\cdot 47=2209$, $2209+196=2405$

$$\frac{x\cdot(x-1)(n-x)}{2}+\frac{x(n-x)(n-x-1)}{2}=49$$

$(n-x)(nx-2x)=98$

$96\cdot 96=9216$

$98=2\cdot 49=7\cdot 14=98\cdot 1$

$\begin{cases} n-x=2 \\ nx-2x=49 \end{cases}$ $\begin{cases} n=x+2 \\ x(x+2-2)=49 \end{cases}$ $n=9$, $x=7$

$\begin{cases} n-x=49 \\ nx-2x=2 \end{cases}$ $\begin{cases} n=49+x \\ x(x+49-2)=2 \end{cases}$ $n=49+x$, $x^2+47x-2=0$

$\begin{cases} n-x=7 \\ x(n-2)=14 \end{cases}$ $\begin{cases} n=x+7 \\ x(x+5)=14 \end{cases}$ $\begin{cases} n=x+7 \\ x^2+5x-14=0 \end{cases}$

$D=25+56=81$

$\begin{cases} n-x=14 \\ x(n-2)=7 \end{cases}$ $\begin{cases} n=14+x \\ x(x+12)-7=0 \end{cases}$ $n=14+x$, $x^2+12x-7=0$ $\quad D=144+28=172$

$\begin{cases} n-x=98 \\ x(n-2)=1 \end{cases}$ $\quad n=98+x$, $x^2+96x-1=0$ $\quad D=9220$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница №__ (Нумеровать только чистовики)