МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Если A,B,C – последовательные члены геометрической прогрессии, то нетрудно видеть, что $B^2 = A\cdot C$.

По выше доказанному $b^2 = ac$.

$ax^2+2bx+c=0$

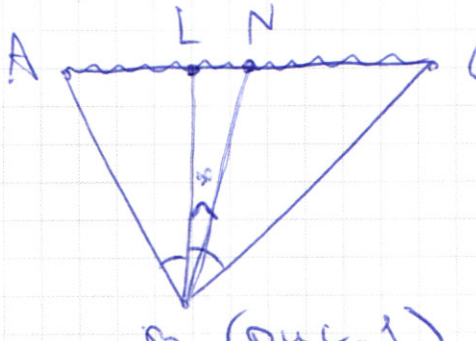
$D=(2b)^2-4ac = 4(b^2-ac)=0$

корни $x_1, x_2 = \frac{-2b\pm\sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a} \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$ и x – четвёртый член этой геом. прогрессии ⇒ По ранее доказанному $c^2 = bx = -\frac{b^2}{a} \Rightarrow b^2 = -ac^2$, но $b^2=ac \Rightarrow$

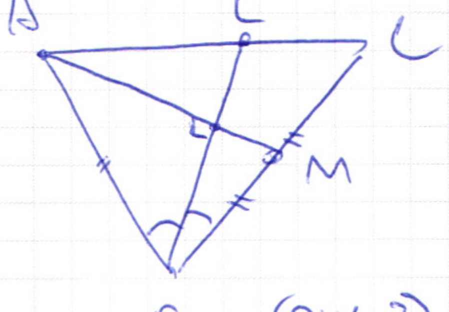
$\Rightarrow ac = -ac^2 \Rightarrow$ Либо все члены $=0$ (т.к. одно из членов прогрессии $=0$), либо сокращаем на $-ac$ и получаем: $c=-1$, но по определению в геом. прогрессии нет 0.

Ответ: $c=-1$

№2



(рис. 1)



(рис. 2)

1) Если перпендикулярны бис. и мед. из 1 угла ⇒ (рис.1)

$\Rightarrow \angle NBL = 90$, $\angle NBL < \angle CBL = \cancel{\angle ABC}\ \frac{\angle ABC}{2} \Rightarrow \angle ABC > 180 \Rightarrow$

черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

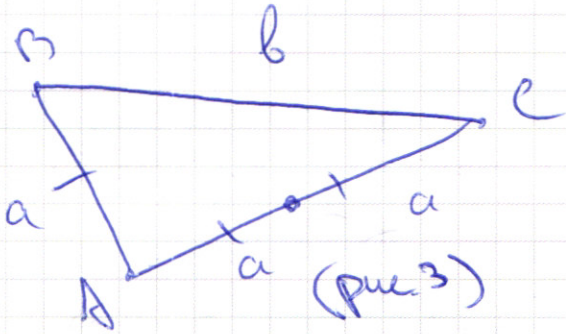
Страница № 1

(Нумеровать только чистовики)

Противоречие.

г) Перпендикулярны бис. и мед. из разных углов ⇒ (рис.2) ⇒ в $\triangle ABM$, BL – биссектриса и высота ⇒ $\triangle ABM$ – равноб. и $AB = BM$ ⇒ $AB = \frac{BC}{2}$.

Значит медиана перпендикулярна биссектрисе, если и только если одна из сторон в 2 раза больше другой, назовём их a и $2a$, а 3ю b. (рис3)



(рис.3)

$3a + b = 1200$ по условию.

По неравенству треугольника: $BC < AB + AC \Leftrightarrow b < 3a$ и $AC < AB + BC \Leftrightarrow 2a < a + b \Leftrightarrow a < b$. ($AB < AC + BC$ всегда, т.к. $AB < AC$).

$1200 = 3a + b > 4a \Leftrightarrow a < 300 \Leftrightarrow a \leq 299$.

$1200 = 3a + b < 6a \Leftrightarrow a > 200 \Leftrightarrow a \geq 201$.

Заметим теперь, что для любого целого a из $[201; 299]$ по неравенству треугольника найдётся целое b и только 1, т.к. $b = 1200 - 3a$. ⇒ Таких треугольников всего столько, сколько ~~у~~ целых чисел в $[201, 299]$, а их 99.

Ответ: 99

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

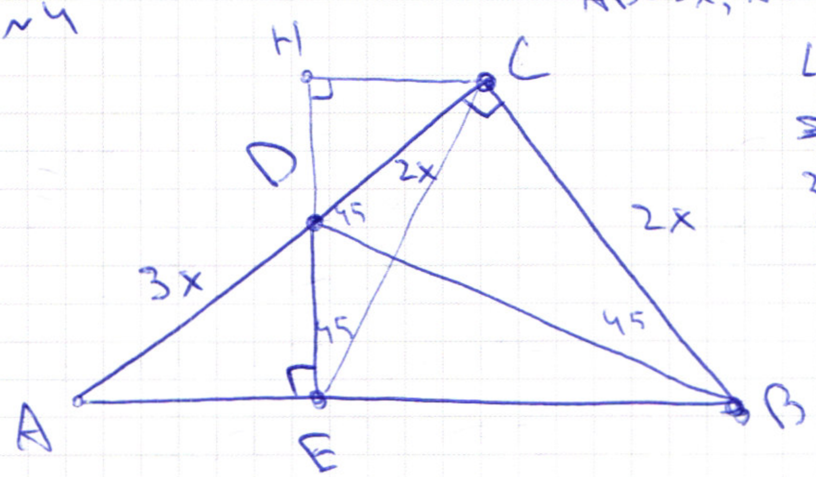
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



$AD=3x,\ AC=5x \Rightarrow DC=2x$

$\angle DCB=90=\angle DEB \Rightarrow$ $\Rightarrow DCBE$ - вписанный. Значит $45=\angle DEC=$ $=\angle DBC. \Rightarrow \angle BDC=180-90-45=45 \Rightarrow DCB$ - равноб. $DC=BC=2x$.

$tg\angle BAC=\frac{BC}{AC}=\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}.$

H - основание перпендикуляра из C на DE. $CH\perp DE$ $\perp AB \Rightarrow AE \parallel CH \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle CDH \Rightarrow CH=AE\cdot\frac{DC}{AD}=$ $=AE\cdot\frac{2}{3}.$ $DE=AD\cdot\sin\angle EAD=3x\sin\angle BAC=3x\cdot\frac{BC}{AB}.$

$AB^2=BC^2+AC^2=25x^2+4x^2 \Rightarrow AB=\sqrt{25}\,x$

$DE=3x\cdot\frac{2x}{\sqrt{25}\,x}=\frac{6x}{\sqrt{29}}$

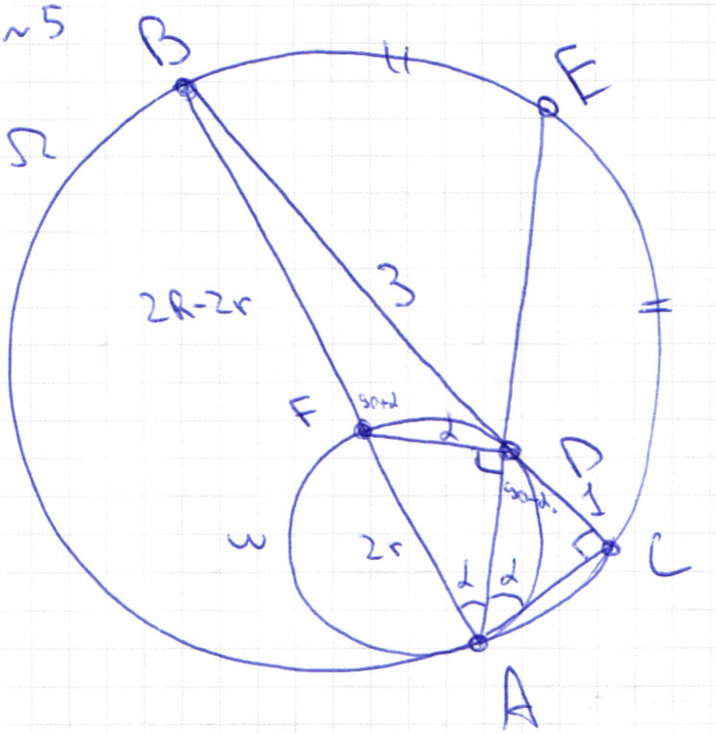
$AE=AD\cdot\cos\angle EAD=AD\cdot\cos\angle BAC=AD\cdot\frac{AC}{AB}=3x\cdot\frac{5x}{\sqrt{29}x}=$ $=\frac{15x}{\sqrt{29}}.$ ~~$\triangle ACDE=\ldots$~~ $\Rightarrow AE=\frac{15x}{\sqrt{29}} \Rightarrow$ $\Rightarrow CH=AE\cdot\frac{2}{3}=\frac{10x}{\sqrt{29}}.$

$5x=AC=\sqrt{29} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{29}}{5}. \Rightarrow CH=\frac{10x}{\sqrt{29}}=2$, и $DE=\frac{6x}{\sqrt{29}}=$ $=\frac{6}{5}. \Rightarrow S_{\triangle CED}=\frac{CH\cdot DE}{2}=\frac{2\cdot\frac{6}{5}}{2}=\frac{6}{5}=1,2$

Ответ: $S_{\triangle CED}=1,2$; $tg\angle BAC=\frac{2}{5}.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№5



По лемме ~~от~~ Архимеда: ω вписана в сегмент Ω и касается BC в D, и Ω в A ⇒ ⇒ AD делит $\breve{BC}$ пополам, т.е. E — середина $\breve{BC}$. AB пересекает ω в F. $\breve{BE} = \breve{CE} \Rightarrow \angle CAE = \angle EAB = \alpha$. AB — диаметр Ω $\Rightarrow \angle ACB = 90$,

AF — диаметр ω, (т.к A и центры ω и Ω лежат на одной прямой) $\Rightarrow \angle ADF = 90$. $\sin\alpha = \frac{CD}{DA} = \frac{1}{AD} \Rightarrow$
$\Rightarrow AD = \frac{1}{\sin\alpha}$. $\cos\alpha = \frac{AD}{FA} = \frac{1}{\sin\alpha \cdot AF} \Rightarrow AF = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$.
Пусть R — радиус Ω, r — радиус ω. $\Rightarrow AF = 2r$, $AB = 2R \Rightarrow$
$\Rightarrow BF = 2R - 2r$. $AF = 2r \Rightarrow 2r = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} \Rightarrow r = \frac{1}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$
$9 = BD^2 =$ степень точки B для ω $= BF \cdot BA = 2R(2R-2r)$.
$\angle ADC = 90-\alpha \Rightarrow \angle FDB = \alpha$. $\angle AFD = 90-\alpha \Rightarrow \angle DFB = 90+\alpha$.
По теореме синусов для $\triangle BFD$: $\frac{BF}{BD} = \frac{\sin\alpha}{\sin(90+\alpha)} \Rightarrow$
$\Rightarrow BF = \frac{3\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow 2R - 2r = \frac{3\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow R = \frac{3\sin\alpha}{2\cos\alpha} + r =$
$= \frac{3\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha} + \frac{1}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{3\sin^2\alpha+1}{2\sin\alpha\cos\alpha}$.
$9 = 2R(2R-2r) = \frac{3\sin^2\alpha+1}{\sin\alpha\cos\alpha} \cdot \frac{3\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow 3\cos^2\alpha\sin\alpha =$
$= (3\sin^2\alpha+1)\sin\alpha \Rightarrow 3\cos^2\alpha = 3\sin^2\alpha + 1 = 4\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\cos^2\alpha = 4\sin^2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = 2\sin^2\alpha$. $1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha =$
$= 3\sin^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. $\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.
$r = \frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$. $R = \frac{1+3\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1+1}{2\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{2\cdot 3}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$S_{BACE} = S_{BDA} + S_{ADC} + S_{CDE} + S_{EDB} = \frac{\sin\angle ADC}{2}(BD\cdot AD + AD\cdot CD + DC\cdot DE + DE\cdot DB) = \frac{\sin(90-\alpha)}{2}(BD+DC)(AD+DE) =$

$= \frac{\sin(90-\alpha)}{2}\cdot 4\cdot AE = 2\cos\alpha\cdot AE.$

$AD\cdot DE = BD\cdot DC$ (степень точки D для окр. Ω) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AD\cdot DE = 3.$

$AD = \frac{1}{\sin\alpha} = \sqrt{3} \Rightarrow DE = \sqrt{3} \Rightarrow AE = 2\sqrt{3} \Rightarrow S_{BACE} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot 2\sqrt{3} =$

$= 4\sqrt{2}$

Ответ: $r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, $R = \frac{3}{\sqrt{2}}$, $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$.

№6

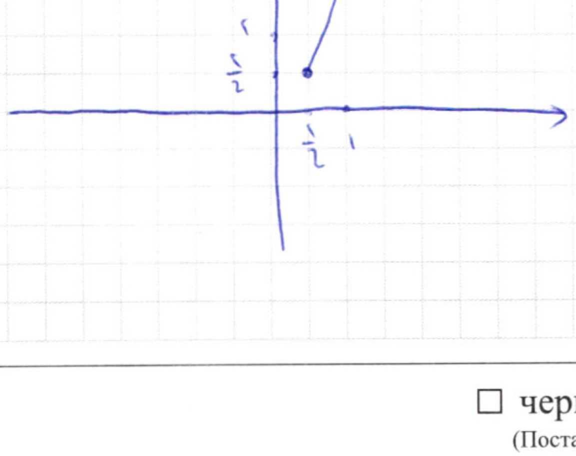
$f(x) = 2x^2 - x - 1$, $g(x) = x + |2x-1|$.

$f(-\frac{1}{4}) = \frac{2}{16} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} - \frac{8}{8} = -\frac{5}{8}$

$f(\frac{3}{2}) = 2\cdot\frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = \frac{4}{2} = 2$

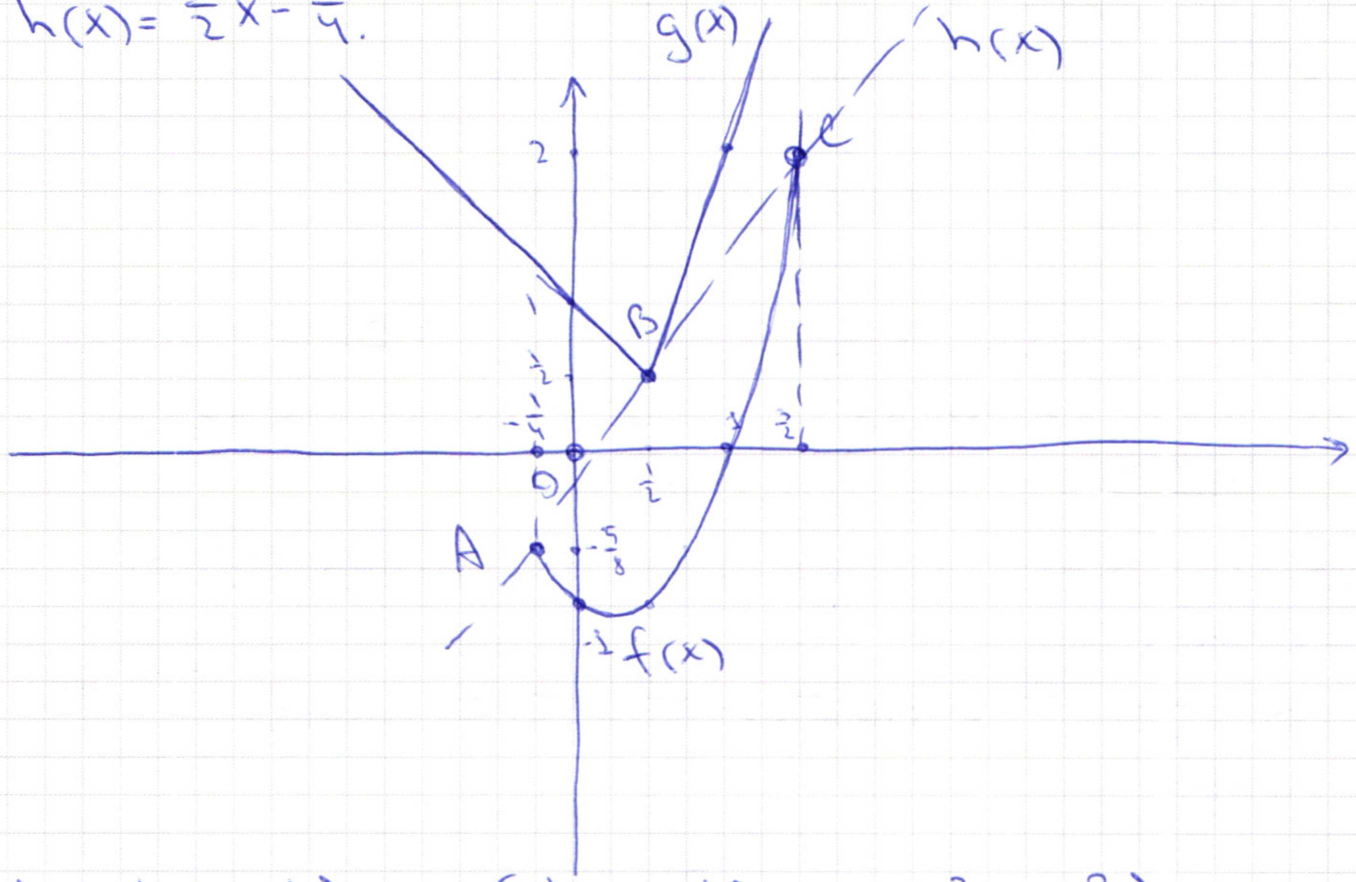
$g(x) = x + |2x-1|$

$x \geq \frac{1}{2}$: $g(x) = 3x - 1$



$x \leq \frac{1}{2}$: $g(x) = 1 - x$

$h(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}.$



$A\left(-\frac{1}{4}, f\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$, $B\left(\frac{1}{2}; g\left(\frac{1}{2}\right)\right)$, $C\left(\frac{3}{2}; f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$.

Заметим, что точки A,B,C лежат на 1ой прямой — $h(x)$. Т.к. $h\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{8} - \frac{1}{4} = -\frac{5}{8}$, $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $h\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2$.

Условие $2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1|$ ~~рав~~ для $x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$ равносильно тому, что $g(x)$ на $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$ всегда не ниже $ax+b$, а $f(x)$ наоборот всегда не выше. Но в силу того, что $B \in g(x)$, A и $C \in f(x)$ и A, B, C — лежат на 1ой прямой, прямая $h(x)$ — единственная, для которой это верно, т.е. $ax + b = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$, т.е. $a = \frac{3}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$.

Ответ: $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$f(x) = f(y) + f(x/y) \Rightarrow f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) < f(y)$

x	f(x)	пояснение
1	0	$f(1)=2f(1) \Rightarrow f(1)=0$
2	1	$f(2)=[\frac{2}{2}]=1$
3	1	$f(3)=[\frac{3}{2}]=1$
4	2	$f(4)=f(2)+f(2)=2$
5	2	$f(5)=[\frac{5}{2}]=2$
6	2	$f(6)=f(2)+f(3)=2$
7	3	$f(7)=[\frac{7}{2}]=3$
8	3	$f(8)=f(4)+f(2)=3$
9	2	$f(9)=2f(3)=2$
10	3	$f(10)=f(2)+f(5)=3$
11	5	$f(11)=[\frac{11}{2}]=5$
12	3	$f(12)=f(6)+f(2)=3$
13	6	$f(13)=[\frac{13}{2}]=6$
14	4	$f(14)=f(2)+f(7)=4$
15	3	$f(15)=f(3)+f(5)=3$
16	6	$f(16)=2f(8)=6$
17	8	$f(17)=[\frac{17}{2}]=8$
18	4	$f(18)=2f(9)=4$
19	9	$f(19)=[\frac{19}{2}]=9$
20	6	$f(20)=2f(10)=6$
21	4	$f(21)=f(3)+f(7)=4$

Благодаря правилу $f(ab)=f(a)+f(b)$ нетрудно получить таблицу слева. Давайте составим ещё одну таблицу, где учтем сколько раз каждое значение $f(x)$ встречалось в левой таблице.

0	1	2	3	4	5	6	8	9	f(x)
1	2	4	5	3	1	3	1	1	кол-во

$f(x), f(y) \in \{0,1,2,3,4,5,6,8,9\}$, т.к. $x, y \in [1;21]$ и $\in \mathbb{Z}$.

И ещё одна таблица:

$f(x) \in \ldots$	[0,0]	[0,1]	[0,2]	[0,3]	[0,4]	[0,5]	[0,6]	[0,8]	[0,9]
кол-во чисел	1	3	7	12	15	16	19	20	21
$(f(y)>f(x))$	$=a_0$	$=a_1$	$=a_2$	$=a_3$	$=a_4$	$=a_5$	$=a_6$	$=a_8$	$=a_9$

$f(x)=0 \Rightarrow$ для $f(y)$: $21-a_0$ вариантов

$f(x)=1 \Rightarrow$ для $f(y)$: $21-a_1$ вар.

$f(x)=2 \Rightarrow$ для $f(y)$: $21-a_2$ вар.

$f(x)=3 \Rightarrow$ для $f(y)$: $21-a_3$ вар.

$f(x)=4 \Rightarrow$ для $f(y)$: $21-a_4$ вар.
$f(x)=5 \Rightarrow$ для $f(y)$: $21-a_5$ вар
$f(x)=6 \Rightarrow$ для $f(y)$: $21-a_6$ вар
$f(x)=8 \Rightarrow$ для $f(y)$: $21-a_8$ вар
$f(x)=9 \Rightarrow$ для $f(y)$: $21-a_9=0$ вар
Значит всего таких пар $(x,y) = 21\cdot 8-(a_0+\_+a_8) =$
$= 168-(1+3+7+12+15+16+19+20) = 168-93 = 75$. Так же нетрудно видеть, что все эти 75 пар (x,y) подходят.
Ответ: 75

№3

$y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} = \sqrt{(x-1)(y-2)}$.
$a = x-1 \Rightarrow x = a+1$
$b = y-2 \Rightarrow y = b+2$
$y-2x = (b+2)-2(a+1) = b-2a = \sqrt{(x-1)(y-2)} = \sqrt{ab} \Rightarrow$
$\Rightarrow (b-2a)^2 = (\sqrt{ab})^2 \Rightarrow b^2+4a^2-4ab = ab \Rightarrow 4a^2-5ab+b^2=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ либо $b=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow x=1, y=2$, но $2x^2+y^2-4x-4y+3=0$,
а это $= 2+4-4-8+3 = -3 \neq 0 \Rightarrow$ Противоречие $\Rightarrow$
$ab \neq 0$, либо $4\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5\frac{a}{b}+1=0$ (поделили на b^2)
$\frac{a}{b} = t \Rightarrow 4t^2-5t+1=0$. $D = 5^2-4\cdot 4 = 9 \Rightarrow t = \frac{5\pm 3}{8} =$
$= 1$ и $\frac{1}{4}$.

Случай 1) $t=1 \Rightarrow \frac{a}{b}=1 \Rightarrow a=b$. $\Rightarrow a^2=b^2$
$0 = 2x^2+y^2-4x-4y+3 = 2(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)-3 =$
$= 2(x-1)^2+(y-2)^2-3 \Rightarrow 2a^2+b^2=3. \Rightarrow 3a^2=3 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a=b=\pm 1$. $\sqrt{ab} = b-2a \Rightarrow b-2a \geq 0 \Rightarrow$
$b \geq 2a = 2b \Rightarrow b \geq 2b \Rightarrow b \leq 0 \Rightarrow a=b=-1 \Rightarrow x=0, y=1$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Давайте подставим и проверим: $1-0=\sqrt{1\cdot 0-2\cdot 0-1+2}=$
$=\sqrt{1}$ ✓ и $2\cdot 0^2+1^2-4\cdot 0-4\cdot 1+3=0$ ✓.
Пара $(0;1)$ и правда подходит.

Случай 2) $\frac{a}{b}=\frac{1}{4}\Rightarrow b=4a \Rightarrow b^2=16a^2$. По аналогии с случаем 1) получаем $0=2x^2+y^2-4x-4y+3=$
$=2a^2+b^2-3 \Rightarrow 2a^2+b^2=3=2a^2+16a^2 \Rightarrow 18a^2=3 \Rightarrow 6a^2=1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a=\pm\frac{1}{\sqrt6}$. Аналогично в первому случаю:
$\sqrt{ab}=b-2a\geq 0 \Rightarrow b\geq 2a$, $b=4a \Rightarrow 4a\geq 2a \Rightarrow 2a\geq 0 \Rightarrow a\geq 0$.
Значит $a=\frac{1}{\sqrt6} \Rightarrow b=\frac{4}{\sqrt6}$. ~~Пара~~ $\Rightarrow x=\frac{\sqrt6+1}{\sqrt6}$; $y=\frac{4+2\sqrt6}{\sqrt6}$.
Убедимся в этой паре подстановкой: $\frac{4+2\sqrt6}{\sqrt6}-2\frac{\sqrt6+1}{\sqrt6}=$
$=\frac{2}{\sqrt6}$, $\sqrt{(x-1)(y-2)}=\sqrt{\frac{1}{\sqrt6}\cdot\frac{4}{\sqrt6}}=\frac{2}{\sqrt6}$ ✓. а второе равенство равносильно $2a^2+b^2=3$, при данных x; $b=4a \Rightarrow$ нужно проверить $18a^2=3 \Leftrightarrow a^2=\frac{1}{6}$ ✓.

После разбора всех случаев ~~верными~~ мы нашли 2 варианта и доказали, что других нет.

Ответ: $x=0$; $y=1$ или $x=\frac{\sqrt6+1}{\sqrt6}$; $y=\frac{4+2\sqrt6}{\sqrt6}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}=\sqrt{(x-1)(y-2)}$

$\boxed{2x^2+y^2-4x-4y+3=0}$ $\sqrt{}$ $y\geq 2x$

$2+4-4-8+3=-3$?

$y^2+4x^2-4xy=xy-2x-y+2$

$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$ $\boxed{y^2+4x^2-5xy+2x+y-2=0}$

$\frac{5x^2}{2}-5xy+\frac{5y^2}{2}=5\left(\frac{x}{\sqrt2}-\frac{y}{\sqrt2}\right)^2=\frac{5}{2}(x-y)^2$

$x^2(4+2a)-x(4a-2)+\frac{(2a-1)^2}{(4+2a)}$

$y^2(1+a)-y(4a-1)+\frac{(4a-1)^2}{4(1+a)}$

$\frac{4a^2-4a+1}{2a+4}+\frac{16a^2-8a+1}{4a+4}=3a-2$

$16a^3-\cancel{16a^2}+\cancel{4a}+\cancel{16a^2}-\cancel{16a}+4+32a^3-\cancel{16a}+\cancel{2a}+\cancel{64a^2}-\cancel{32a}+4=(12a^2+4a-8)(2a+4)=24a^3+\cancel{8a^2}-\cancel{16a}+\cancel{48a^2}+\cancel{16a}-32$

$80+16+16-58-12>0$

$24a^3+8a^2-58a-24=0$

$\boxed{12a^3+4a^2-29a-12=0}$

$12+4-29-12$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)}$$

$$2(x-1)^2+(y-2)^2=3$$

$a = x-1 \Rightarrow x = a+1$

$b = y-2 \Rightarrow y = b+2$

$y-2x = b+2-2a-2 = b-2a$

$$\boxed{2a^2+b^2=3}$$

$$(b-2a)^2=ab$$

$$b^2+4a^2-4ab=ab$$

$$b^2+4a^2-5ab=0$$

$b \geq 2a$

$4a \quad b$

$a > 0$

$$4\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\left(\frac{a}{b}\right)+1=0$$

$\frac{a}{b}=t \qquad D=5^2-4\cdot 4=9$

$$t=\frac{5\pm 3}{8}=1 \text{ и } \frac{1}{4}$$

$a=b$

$2a^2+b^2=3$

$3a^2=3$

$a^2=1$

$a=\pm 1$

$x=2$	$y=3$
$x=0$	$y=1$

$\frac{a}{b}=\frac{1}{4} \Rightarrow b=4a$

$2a^2+b^2=18a^2$

$6a^2=1$

$a=\pm\frac{1}{\sqrt{6}} \qquad b=\pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$a=\frac{1}{\sqrt{6}} \qquad b=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$$x=\frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}} \qquad y=\frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a, b, c $b^2 = ac$ $\boxed{c = ?}$

$ax^2 + 2b x + c = 0$

$D = 4b^2 - 4ac = 0$

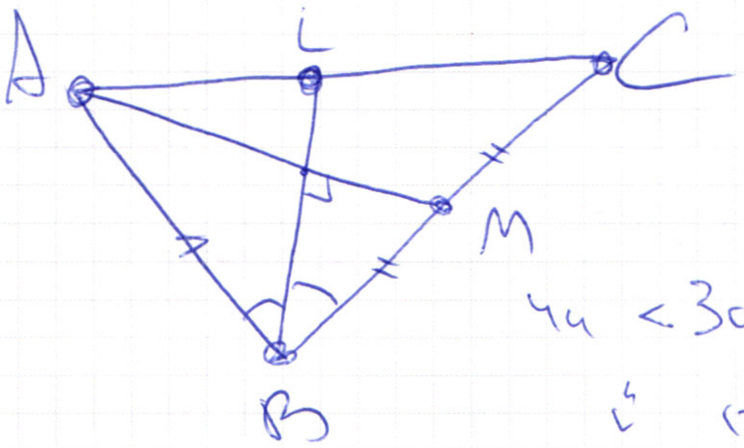
$x = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$

$c = b \cdot -\frac{b}{a}$

$b^2 = ac = -b^2 \Rightarrow b^2 = 0 \Rightarrow b = 0$

№1

$a+b+c = 1200$



a, 2a, b

$3a + b = 1200$

$2a < b + a$

$\boxed{a < b}$ $\boxed{b < 3a}$

$4a < 3a + b < 6a$

$a < 300$ 1200 $a > 200$

a от 201 до 299

$250 \cdot 3 = 750$ 450.

№2

☑ черновик   ☐ чистовик   Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле)   (Нумеровать только чистовики)

1) $y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} =$

$= \sqrt{(x-1)(y-2)}$ $\Rightarrow$ $y^2+4x^2-4xy = xy-2x-y+2$

$y \geq 2x$

2) $2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

$\underbrace{(2x^2-4x+2)}_{\shortparallel} + \underbrace{(y^2-4y+1)}_{\shortparallel}$

$2(x-1)^2$ $\quad$ $(y-2)^2-3$

$$\boxed{2(x-1)^2+(y-2)^2=3}$$

$y^2-4y+\underbrace{2x^2-4x+3}_{\overset{\shortparallel}{A}}=0$ $\quad$ $y=2x$

$D = 16-4A = 4(4-A) \geq 0$

$A \leq 4$

$y^2-4y+3 \leq 4$ $\quad$ $2x^2-4x-1 \leq 0$

$y^2-4y-1 \leq 0$ $\quad$ $D = 16+8 = 24$

$D = 16+4 = 20$

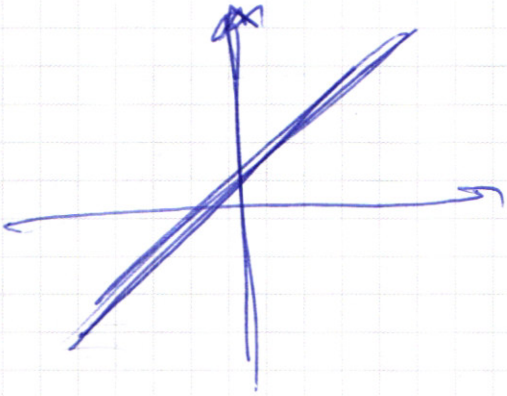
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$(a, b) = ?$

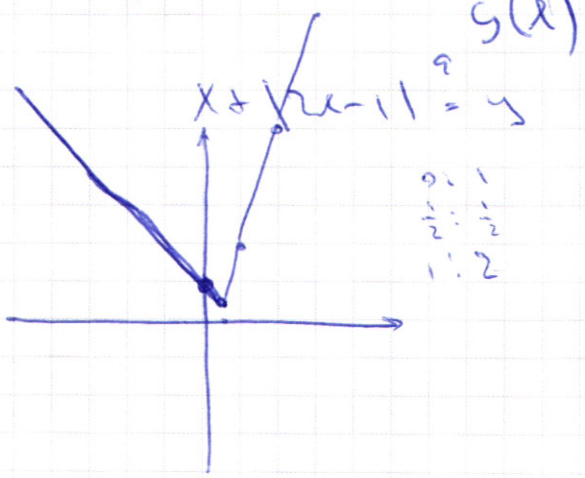
$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1|$

$x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$



$x = 0$: $\boxed{-1 \le b \le 1}$

$x = 1$: $0 \le a + b \le 2$

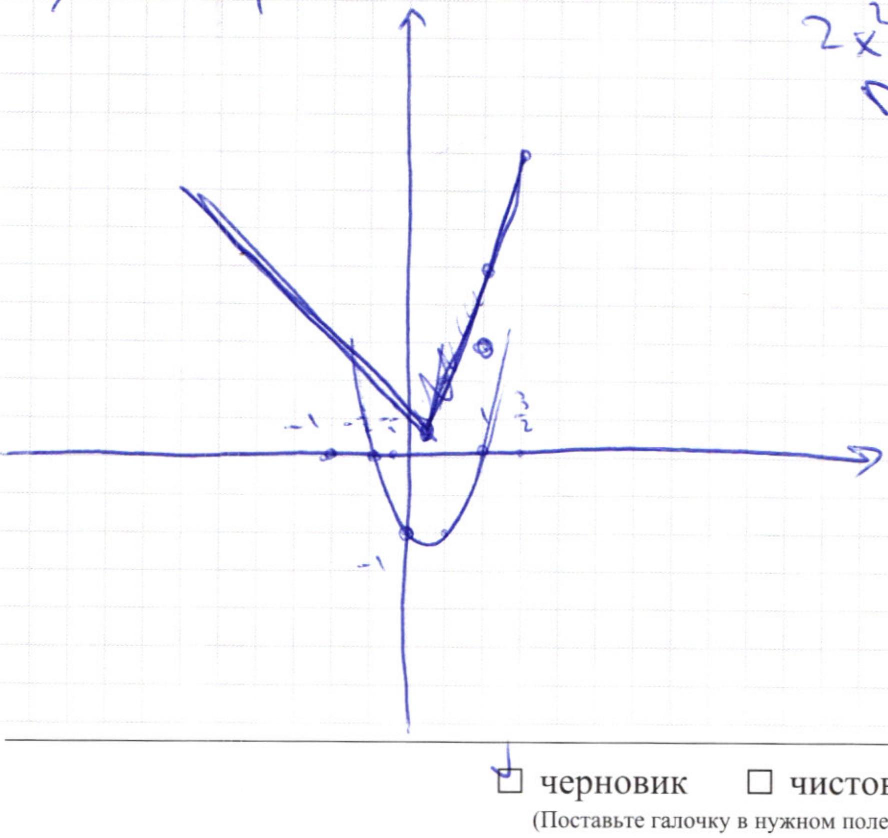


$2x^2 - x - 1 \le ax + b$

$2x^2 - x(a+1) - 1 - b \le 0$

$D = a^2 + 2a + 1 + 8(b+1)$

$x = \frac{a+1 \pm \sqrt{D}}{4} \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$



$2x^2 - x - 1 = f(x)$

$D = 1 + 8 = 9$

$x = \frac{1 \pm 3}{4} = -\frac{1}{2}$ и 1

f(

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$r = \frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{2\frac{1}{\sqrt3}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{3}{2\sqrt2}$

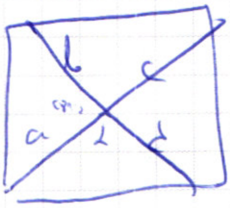
$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt3}$

$\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow R = \frac{1+3\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{3}{2\sqrt2}\cdot(1+1) = \frac{3}{\sqrt2}$

$S_{BACB} =$

$2\sin\alpha\cdot AB = \frac{2}{\sqrt3}AB = \frac{2}{\sqrt3}\cdot 2\sqrt3 = 4$



$AD\cdot DB = 3$

$AD = \frac{1}{\sin\alpha} = \sqrt3 \Rightarrow DB = \sqrt3 \Rightarrow AB = 2\sqrt3$

$\frac{\sin\alpha}{2}(\underbrace{ad+dc+cb+ab}_{=(a+c)(b+d)})$

$(a+c)(b+d) = 4\cdot AB$

№5

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=\left[\frac{p}{2}\right]$

$\boxed{f(1)=0}$

$f(2)=1$, $f(p)=\frac{p-1}{2}$ $(p\neq 2)$

$f(p^2)=2f(p)=p-1$

$f(p^3)=f(p^2)+f(p)=3f(p)$

(x;y) – сколько?

$1\le x\le 21$; $1\le y\le 21$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$f(p^n)=nf(p)=$

$=\frac{n(p-1)}{2}$ (нечет 2)

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

1	0
2	1
3	1
4	2
5	2
6	2
7	3
8	3
9	2
10	3
11	5
12	3
13	6
14	4
15	3
16	6
17	8
18	4
19	9
20	6
21	4

$1+2+5+6+5+4+1+8+20=$

20

20

30

20

55

25

$R-r=\frac{3\sin\alpha}{2\cos\alpha}$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)<0$

$f(x)<f(y)$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	4	5	3	1	3	~~X~~	1	1

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

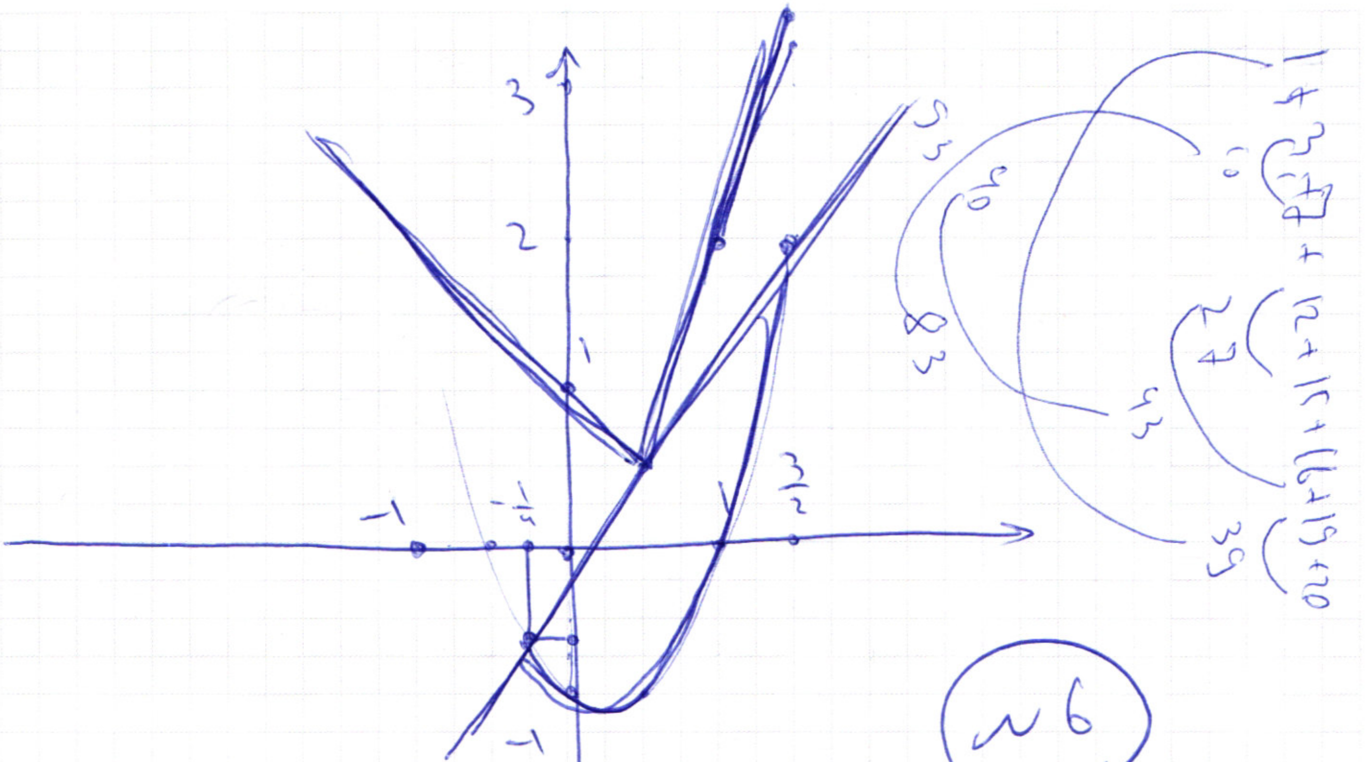
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№6

$ax+b = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{1}{4} \end{matrix}}$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$l = \frac{4 - \frac{9}{2}}{2} = -\frac{1}{4}$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} - \frac{8}{8} = -\frac{5}{8}$

$k = \frac{3}{2}$

$2k = 3$

$\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8}\right); \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{3}{2}; 2\right)$

$y = kx + l$

$\frac{1}{2} = \frac{k}{2} + l = \frac{k}{2} + \frac{4-3k}{2} \Rightarrow 1 = 4 - 2k$

$2 = \frac{3k}{2} + l \Rightarrow l = 2 - \frac{3k}{2} = \frac{4-3k}{2}$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{4} = h(x)$

$h\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{8} - \frac{2}{8} = -\frac{5}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

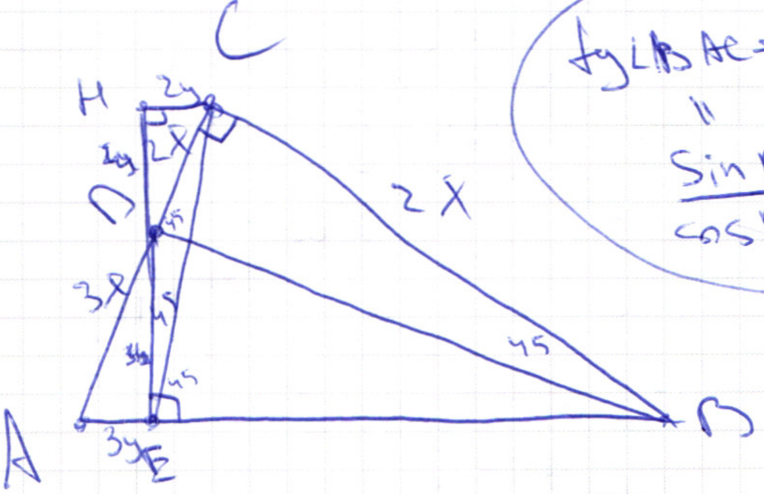
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$tg\angle BAC = ?$

$\parallel$

$\frac{\sin BAC}{\cos BAC} = \frac{2}{5}$

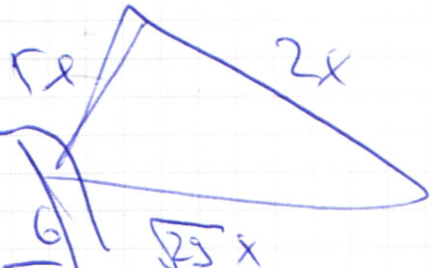
№ 4

$AC = \sqrt{29} = 5x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{5}$

$S_{CED} = ?$

$S_{CED} = \frac{CH \cdot DE}{2} = \frac{2y \cdot DE}{2} = y \cdot DE$

$\frac{DE}{AD} = \frac{BC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{29}}$



$DE = \frac{AD \cdot 2}{\sqrt{29}} = \frac{3x \cdot 2}{\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{29} \cdot 6}{5\sqrt{29}} = \frac{6}{5}$

$HC = \frac{2}{3} AE$ $\quad AE = AD \cdot \frac{AC}{AB} = 3x \cdot \frac{5x}{\sqrt{29}} = \frac{15x}{\sqrt{29}} = \frac{15\sqrt{29}}{5\sqrt{29}} = 3$

$HC = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2 \Rightarrow S_{CED} = \frac{2 \cdot \frac{6}{5}}{2} = \frac{6}{5} = 1,2$

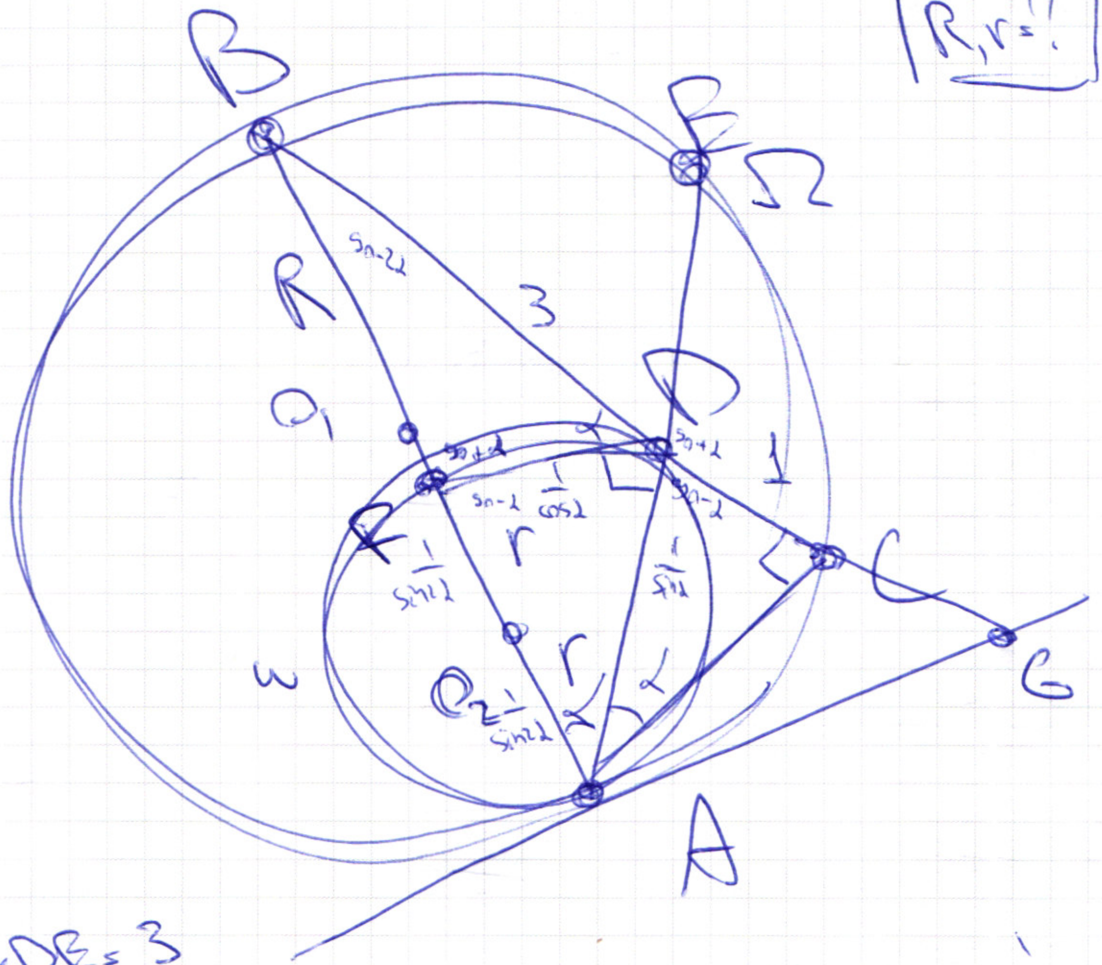
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\boxed{R, r = ?}$



$AD \cdot DE = 3$

$BF \cdot BA = 3^2$

$2R(2R - 2r)$

$R^2 - Rr = \frac{9}{4}$

$2R - 2r$

S

$DA = \frac{1}{\sin\alpha} \Rightarrow AF = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$2r \quad \frac{2}{\sin 2\alpha}$

$\boxed{r = \frac{1}{\sin 2\alpha}}$

$FD = \frac{tg\alpha}{\sin\alpha}$

$\frac{1}{\cos\alpha}$

$\frac{S}{\sin\alpha} = \frac{3}{\cos\alpha}$

$S = \frac{3\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\frac{9}{4} = \frac{(1+3\sin^2\alpha)}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{3\sin\alpha}{2\cos\alpha}$

$3\sin 2\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha(1+3\sin^2\alpha)$

$3\cos^2\alpha = 1 + 3\sin^2\alpha$

$R - r = \frac{3\sin\alpha}{2\cos\alpha} \Rightarrow R = \frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{3\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1+3\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$

$1 = 3\sin^2\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad \cos^2\alpha = 2\sin^2\alpha$

$2\cos^2\alpha = 4\sin^2\alpha$

$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)