

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.
б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED .
5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2, BD = 3$.
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{2}; 1]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leq x \leq 22, 2 \leq y \leq 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

 a, b, c - все полн.

$$b^2 = ac.$$

$$ax^2 - 2bx + c = 0.$$

$$D = 4b^2 - 4ac = 4(b^2 - ac) = 0.$$

$$x = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a}$$

$$a, b, c, \frac{b}{a}.$$

$$c^2 = \frac{b^2}{a} \quad b^2 = ac.$$

$$c^2 = \frac{ac}{a} = c.$$

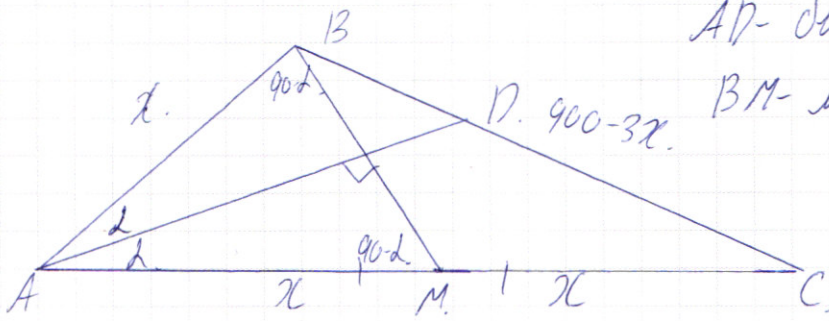
$$c^2 - c = 0.$$

$$c(c - 1) = 0.$$

$$\begin{cases} c = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

ответ: $c = 1$; $c = 0$.

№2.



AD - выш.

BM - медиана.

$BM \perp AD$

ΔABM - равнобедр.

$AB = AM = x$.

$MC = AM = x$.

$P = 900$

$BC = 900 - 3x$

$AB + BC > AC$

$900 - 3x + x > 2x \quad 900 > 4x \quad x < 225$

$BC + AC > AB$

$900 - 3x + 2x > x \quad 900 > 2x \quad x < 450$

$AC + AB > BC$

$3x > 900 - 3x \quad 6x > 900 \quad x > 150$

$x \in [151, 224]$ Кол-во способов выбрать x из

этого промежутка равно $224 - 151 + 1 = 74$. 3 мм см.т.

таких Δ -ов 74.

Ответ: 74.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 11x - 4y + 10 = 0 \end{cases} \quad \sqrt{3}$$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(1-y)(6-x)} \\ (6-x)^2 + 2(1-y) - 11^2 = 18 \end{cases}$$

$$6 - x = a.$$

$$1 - y = b.$$

$$\begin{cases} 6b - a = \sqrt{ab} \\ a^2 + 2b^2 = 18. \end{cases}$$

$$6b - a \geq 0.$$

$$6b \geq a.$$

$$a^2 + 2b^2 = 18.$$

$$16b^2 + 2b^2 = 18.$$

$$18b^2 = 18.$$

$$b^2 = 1.$$

$$b = \pm 1.$$

$$a = \pm 4.$$

$$36b^2 - 12ab + a^2 = ab.$$

$$36b^2 - 13ab + a^2 = 0.$$

$$(a - 9b)(a - 4b) = 0.$$

$$\begin{cases} a = 9b \\ a = 4b \end{cases} \quad \text{не уч т.к } 6b \geq a.$$

$$\begin{cases} 6 - x = 4 \\ 1 - y = 1 \end{cases}$$

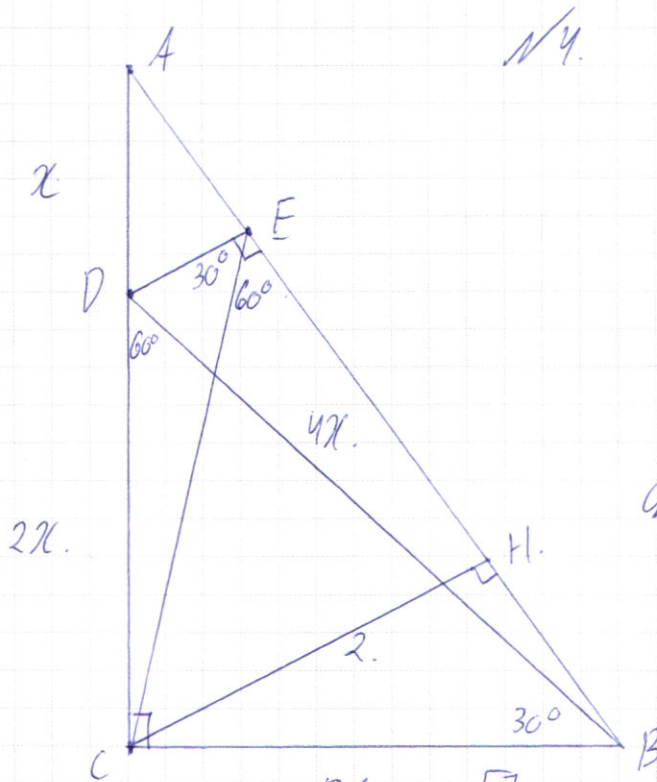
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 - x = -4 \\ 1 - y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 2 \end{cases}$$

- не уч т.к $x - 6y \geq 0$.

ответ: $x = 2$
 $y = 0.$



Доказ.

$$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3} \quad DE \perp AB$$

$$\operatorname{tg} \angle BAC = ? \quad \angle CED = 30^\circ$$

$$\text{1) } AC = \sqrt{7} \quad S_{\triangle CED} = ?$$

Вокруг CDEB можно описать

$$\text{окр. т.к. } \angle DEB + \angle DCB = 180^\circ$$

$$\text{Следует, что } \angle DEC = \angle DBC = 30^\circ, \text{ т.к. опираются на кр. дугу DC.}$$

$$\text{Длина } DC. \quad DB = \frac{DC}{\sin 30^\circ} =$$

$$= \frac{2x}{0,5} = 4x.$$

$$CB = DB \cdot \sin 60^\circ = 4x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}x.$$

$$\text{2) } AC = \sqrt{7}.$$

$$CB = AC \cdot \operatorname{tg} \angle BAC = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}.$$

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 = 7 + \frac{4 \cdot 7}{3} = 7 + \frac{28}{3} = \frac{49}{3} = \left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$AB = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

$$CH = \frac{AC \cdot CB}{AB} = \frac{\sqrt{7} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}}{\frac{7}{\sqrt{3}}} = 2.$$

$$CE = \frac{CH}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\triangle CAH \sim \triangle DAE \quad k = \frac{1}{3} \quad ED = \frac{1}{3} CH = \frac{2}{3}$$

$$S_{\triangle CED} = \frac{1}{2} ED \cdot EC \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\text{Ответ: } \operatorname{tg} \angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad S_{\triangle CED} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Дано.

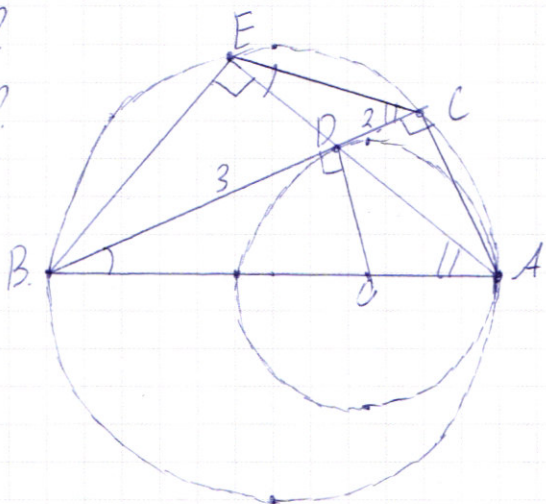
$$CD=2$$

$S_{BACE}=?$

$$BD=3$$

$\gamma=?$

$R=?$



$N5.$

$\triangle BDC \sim \triangle BCA$ по 2-м \angle -ам.

$\angle CBA$ - общ.

$$\angle BDC = \angle BCA.$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{BA} = \frac{3}{5}$$

$$BC = 3x. \quad CA = CD = x.$$

$$CA = 2x.$$

$$OB^2 = BD^2 + OD^2$$

$$9x^2 = 9 + 4x^2$$

$$9 = 5x^2 \quad x^2 = \frac{9}{5}$$

$$x = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\gamma = 2x = \frac{6}{\sqrt{5}} \quad R = 2,5x = \frac{4,5}{\sqrt{5}}$$

$$\triangle S_{BACE} = S_{\triangle BEC} + S_{\triangle BCA}.$$

$$S_{\triangle BCA} = \frac{1}{2} BC \cdot CA \cdot \sin \gamma$$

$$CA = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{\frac{225}{5} - 25} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

$$S_{\triangle BCA} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sin \gamma = 5\sqrt{5} \sin \gamma$$

$$AD = \sqrt{AC^2 + DC^2} = \sqrt{20 + 4} = 2\sqrt{6}$$

$\triangle BDA \sim \triangle EDC$ по 2-м \angle -ам. $k = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$.

$$ED = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

$$BE = \sqrt{AB^2 - (ED + AD)^2} = \sqrt{\frac{15}{5} - \left(\frac{3}{\sqrt{6}} + 2\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{4,5}$$

$$EC = \frac{AB}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \angle CAB = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{15} = \frac{5\sqrt{5}}{15} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2} BE \cdot EC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4,5} \cdot \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4,5\sqrt{5}}{6} = \frac{3,5\sqrt{5}}{2}$$

$$S_{BACE} = 5\sqrt{5} + \frac{3,5\sqrt{5}}{2} = 6,25\sqrt{5} \quad \text{ответ: } \gamma = \frac{6}{\sqrt{5}} \quad R = \frac{4,5}{\sqrt{5}} \quad S_{BACE} = 6,25\sqrt{5}$$

№6.

$$8x - 6 \mid 2x - 11 \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7.$$

I сч. $x \leq \frac{1}{2}$.

$$8x + 6 \mid 2x - 11 = 8x + 12x - 6 = 20x - 6.$$

II сч. $x \geq \frac{1}{2}$.

$$8x - 6 \mid 2x - 11 = 8x - 12x + 6 = 6 - 4x.$$

$$-8x^2 + 6x + 7 \Rightarrow$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-16} = \frac{3}{8}$$

$$y_0 = -8 \cdot \frac{9}{64} + \frac{6 \cdot 3}{8} + 7 = -\frac{9}{8} + \frac{9}{4} + 7 = \frac{9}{8} + 7 = 8 \frac{1}{8}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}$$

$$-8 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{2} + 7 = -2 - 3 + 7 = 2.$$

$$x_2 = 1.$$

$$-8 + 6 + 7 = 5.$$

Построив два графика.

функций можно сделать вывод,
что a и b принимают

единственные значения.

$$\begin{cases} 5 = a + b & (1) \\ 2 = -\frac{1}{2}a + b & (2) \end{cases}$$

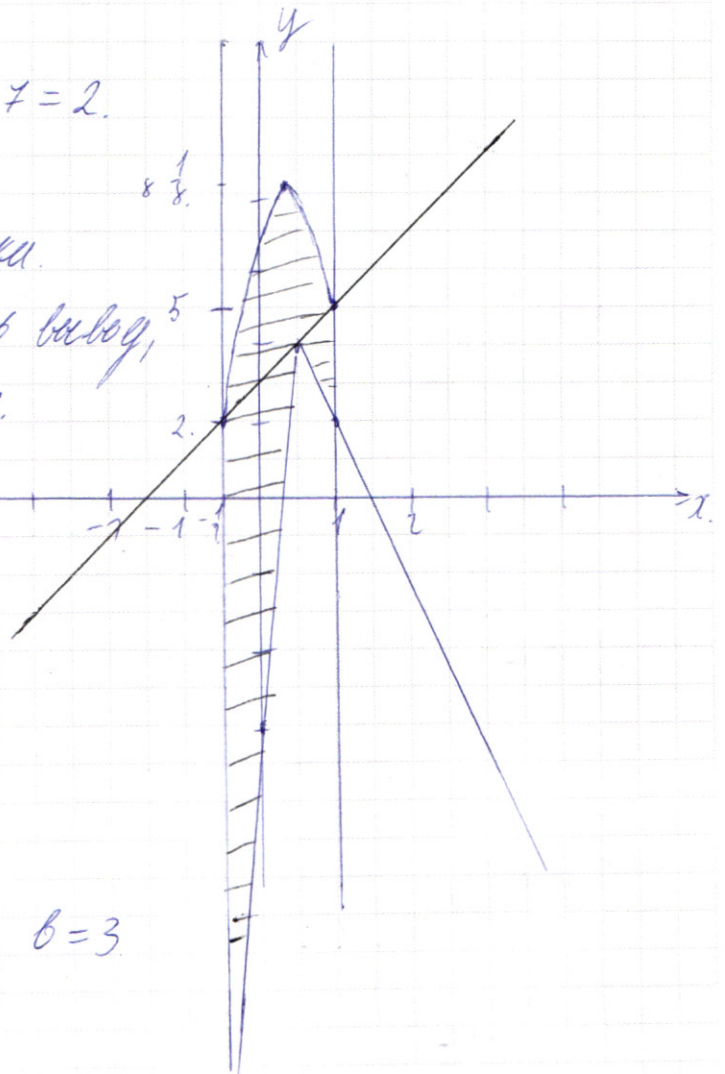
$$(1) - (2)$$

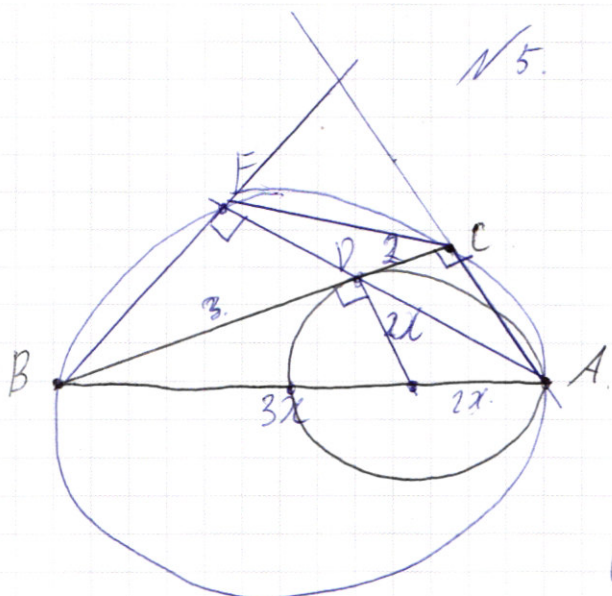
$$3 = 1.5a$$

$$a = 2.$$

$$b = 3.$$

Ответ: $a = 2$ $b = 3$





$CD=2$
 $BD=3$
 $\angle = ?$ $\angle = 2x$
 $R = ?$ $R = 2,5x$
 $S_{BACE} = ?$

$$(2x)^2 + 3^2 = 4x^2$$

$$4x^2 + 9 = 4x^2$$

$$5x^2 = 9$$

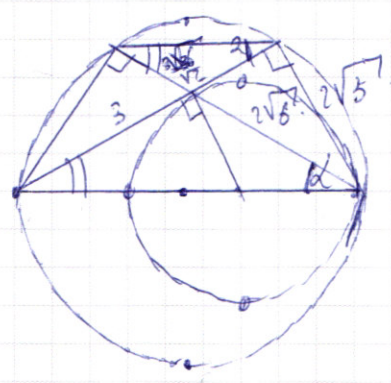
$$x^2 = \frac{9}{5}$$

$$x = \frac{3}{\sqrt{5}} \quad \angle = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$R = \frac{4,5}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{9}{6} + 24 + 12 = 36 + 1,5 = 37,5$$

$$45 - 37,5 = 7,5$$



$$\left(\frac{15}{\sqrt{5}}\right)^2 - 5^2 = \frac{225}{5} - 25 =$$

$$= 45 - 25 = 20$$

$$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

2×2

$$4 + 20 = 24$$

$$\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$R = \frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$$

$$\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

~~$$\frac{\sqrt{3}}{6} + 2\sqrt{6} \cdot 2 = \frac{3}{36} + 4 \cdot 6 + \frac{4\sqrt{3}\sqrt{8}}{\sqrt{6}}$$~~

$$\frac{15}{\sqrt{5}}^2 - 5^2 = 20$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{15} = \frac{5\sqrt{5}}{15} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\frac{45}{10} = \frac{4,5}{2}$$

$$\left(\frac{15}{\sqrt{5}}\right)^2 - 25 = \frac{225}{5} - 25 = 45 - 25 = 20, \quad 2\sqrt{5}$$

$$4 + 20 = 24 = 12\sqrt{6}^2$$

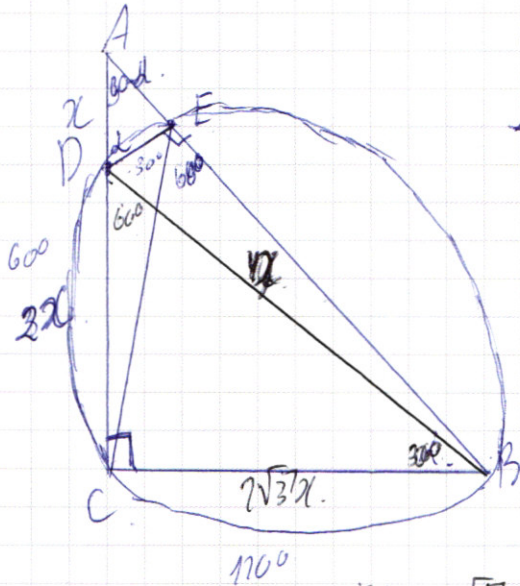
$$\frac{2\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6}$$

$$\left(\frac{3}{\sqrt{6}} + 2\sqrt{6}\right)^2 = \frac{9}{6} + 4 \cdot 6 + \frac{3}{\sqrt{6}} \cdot 2\sqrt{6} \cdot 2 =$$

$$= \frac{9}{6} + 24 + 12 = 36 + 1,5 = 37,5$$

$$45 - 37,5 = 7,5 \quad \sqrt{7,5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



по $\angle BAC = 30^\circ$
 $\frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{3}x}{3x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$S_{\triangle CED}$

$(\sqrt{7})^2 + \frac{4 \cdot 7}{3} = AB^2$

$CB = \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \frac{7}{\sqrt{3}} + \frac{28}{3} = AB^2$
 $\frac{49}{3} = AB^2$
 $AB = \frac{7}{\sqrt{3}}$

$AC \cdot CB = AB \cdot CH$

$CH = \frac{AC \cdot CB}{AB} = \frac{\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{7}}{\frac{7}{\sqrt{3}}} = \frac{2 \cdot 7}{\frac{7}{\sqrt{3}}} = 2$

по $\angle CED = 30^\circ$

$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$

$DE \perp AB$

по $\angle BAC = 30^\circ$

$\frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$

$AE \cdot AB = AD \cdot AC = 3x$

по $\angle CED = 30^\circ$

$\frac{DE}{CE} = \frac{1}{2}$

$\frac{DE}{CE} = \frac{1}{2}$

$\frac{ED}{CH} = \frac{1}{3} \Rightarrow ED = \frac{2}{3}$

$EC =$

$2 = CE \cdot \sin 60^\circ$
 $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\angle CED = 30^\circ$

$\frac{4x}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}x$
 $CE = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\sin 30^\circ = \frac{DC}{DB}$

$DB = DC$

$\sin 60^\circ = \frac{CH}{CE} \Rightarrow CE = \frac{CH}{\sin 60^\circ}$

$= \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$
 $2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x$
 $x = \frac{4}{\sqrt{3}}$

по $\angle CED = 30^\circ$

$\frac{DE}{CE} = \frac{1}{2}$

$\frac{DE}{CE} = \frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{7} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

$AC = \sqrt{7}$

$S_{\triangle CED} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

$\sin 60^\circ = \frac{CH}{EC}$

$EC = \frac{CH}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1.

a, b, c - положительные

$$b^2 = ac$$

$a, b, c, \frac{b}{a}$

$$ax^2 - 2bx + c = 0$$

или

$$1 \cdot \frac{b}{a} \cdot 8 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0$$

$$D = 4b^2 - 4ac$$

$$|x - x_1| |x - x_2| = x^2 - x(x_1 + x_2) + x_1 x_2 =$$

$$x_1 = \frac{2b + 2\sqrt{b^2 - ac}}{2a} = x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$= x^2 + x(1 - x_1 - x_2) + x_1 x_2$$

$$= \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a}$$

$$D = 4 - 4 \cdot a = 0$$

$$-x_1 - x_2 = \frac{+2b}{a} = \frac{2b}{a}$$

$$x_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{b}{a} \quad x_1 = \frac{2}{2}$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

$a, b, c, \frac{b}{a}$

$$\frac{b}{a} \rightarrow \frac{b}{a}$$

$$c^2 = \frac{b \cdot b^2}{a}$$

$$c^2 = \frac{b \cdot b}{a}$$

$$c = \frac{b}{a}$$

$$c = \frac{b}{a}$$

$$a \cdot \frac{b^2}{a^2} - 2b \cdot \frac{b}{a} + c = 0$$

$$b^2 - \frac{2b^2}{a} + c = 0$$

$$b^2 = ac \cdot \frac{b}{a}$$

$$c^2 = \frac{b^2}{a}$$

$$c^2 = \frac{b^2}{a}$$

$$c^2 = \frac{ac}{a} = c$$

$$c^2 - c = 0$$

$$c = 0 \quad c = 1$$

$$c(c - 1) = 0$$

$$c = 0$$

ответ: $c = 0, c = 1$

$$b^2 = ac$$

N2.

$$P = 400$$

$$a, b, c \in \mathbb{Z}$$



$$774 - 151 =$$

$$= 43$$

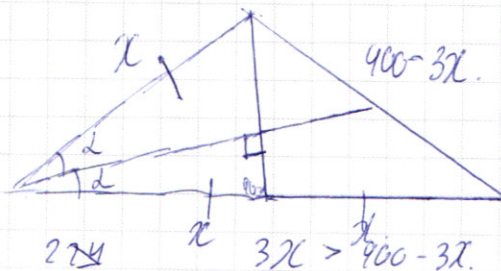
$$400 - 3x + 2x > x$$

$$400 - 3x + x > 2x$$

$$400 - 2x > 2x$$

$$400 > 4x$$

$$x < 225$$



$$400 - x > x$$

$$400 > 2x$$

$$450 > x$$

$$6x > 400 \quad x > 150$$

151.

224.

ответ: 74.

№3

$$\begin{cases} x-6y = \sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$$2y-6y-x+6$$

$$12x \quad | \quad 1y$$

6b>a

$$x^2-12x+36 + 2(1-y)^2-2y+1 - 18=0$$

$$6b-a > 0$$

$$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$$

$$b(1-y) - x(1-y) =$$

$$= (1-y)(b-x)$$

$$x-6y = \sqrt{(1-y)(b-x)}$$

$$(b-x)^2 + 2(1-y)^2 = 18$$

$$(b-x)=a \quad (1-y)=b$$

$$x-6y \quad x-6y = 6b-a =$$

$$= b-6y+x-6 =$$

$$6b-a = \sqrt{ab}$$

$$36b^2 - 12ab + a^2 = 18$$

$$36b^2 - 12ab + a^2 = 0$$

$$(a-4b)(a-b)=0$$

$$(a-4b)(a-b) \neq 0$$

$$a=4b \quad a=b$$

не чл

$$81b^2 + 2b^2 = 18$$

$$83b^2 = 18$$

$$b^2 = \frac{18}{83}$$

$$b = \pm \sqrt{\frac{18}{83}}$$

$$a=4b$$

$$16b^2 + 2b^2 = 18$$

$$18b^2 = 18$$

$$b = \pm 1$$

$$a = \pm 4$$

$$a^2 + 2b^2 = 18$$

$$b=1$$

$$1-y=1 \quad y=0$$

$$a=4$$

$$b-x=4 \quad x=2$$

$$b=-1$$

$$1-y=-1 \quad y=2$$

$$a=-4$$

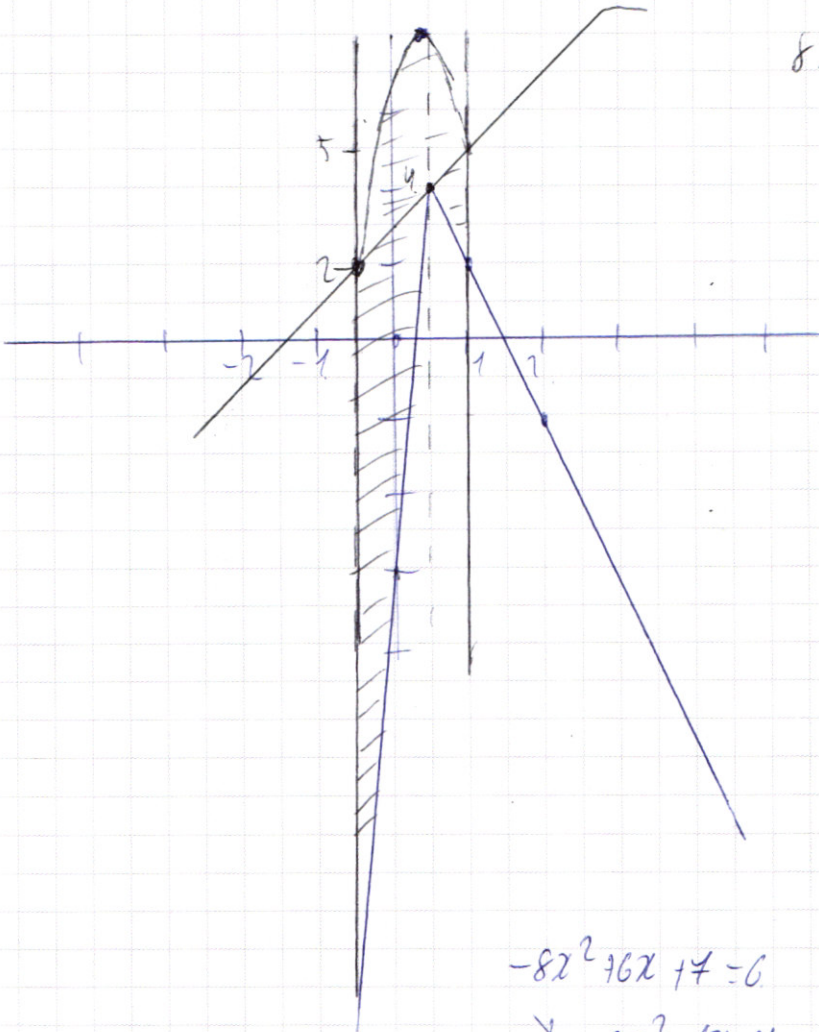
$$b-x=-4 \quad x=10$$

ответ: $x=2 \quad y=0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$8x - 612x - 11 \leq ax + b \leq -8x^2 + 6x + 7$$



$$70x = 6$$

$$x = \frac{6}{70} = \frac{3}{35}$$

$$8x + 612x - 11 =$$

$$= 70x - 6$$

$$8x - 612x - 11 =$$

$$= 8x - 12x + 6 =$$

$$= 6 - 4x$$

$$-8x^2 + 6x + 7$$

$$x_0 = \frac{6}{2a} = \frac{-6}{-16} = \frac{3}{8}$$

$$x_0 = \frac{-6}{2a} = \frac{-6}{-16} = \frac{+3}{8}$$

$$-8 \cdot \frac{9}{64} + \frac{6 \cdot 3}{4 \cdot 8} + 7 =$$

$$= -\frac{9}{8} + \frac{9}{4} + 7 =$$

$$= \frac{9}{8} + 7 = 8 \frac{1}{8}$$

$$-8x^2 + 6x + 7 = 0$$

$$\Delta = 36 + 4 \cdot 7 \cdot 8 = \sqrt{260}$$

$$x_1 = \frac{+6 + \sqrt{260}}{-16}$$

$$x_1 = \frac{+6 + \sqrt{260}}{-16}$$

$$5 = ax + b$$

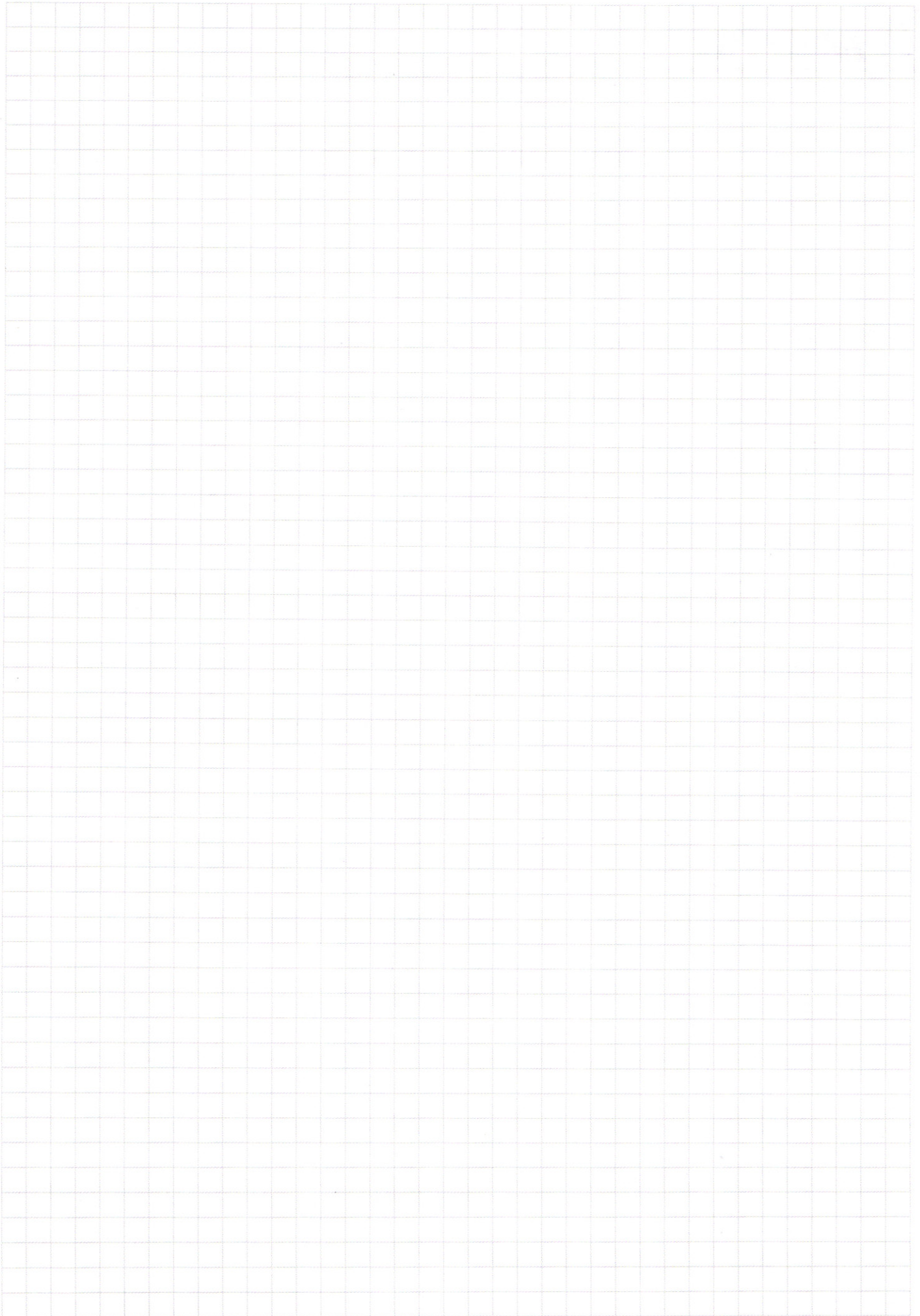
$$5 = k + b, \quad 15k = 3$$

$$2 = -\frac{1}{2}k + b, \quad k = 2$$

$$k = 2, \quad b = 3$$

$$-8 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{1}{2} + 7 = -2 - 3 + 7 = 2$$

$$-8 \cdot 16 + 7 =$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)