МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

m_n – геометрическая прогрессия ($m_n = q \cdot m_{n-1}$ при $n > 1$)

$m_1 = a, m_2 = b, m_3 = c \Rightarrow b = qa, c = q^2 a$

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$ax^2 + 2qax + q^2 a = 0 \qquad \frac{D}{4} = q^2a^2 - q^2a^2 = 0 \Rightarrow 1$ корень

$x = \frac{-qa}{a} = -q = m_4$ (по усл.)

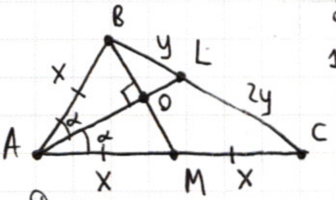
$m_4 = q m_3$

$-q = q^3 m_1$

$m_1 = -\frac{1}{q^2} \Rightarrow m_3 = -1$

Ответ: -1.

N2



Доп. постр.: $AL \cap BM = \{O\}$

1) в $\triangle ABM$ AO – биссек. и высота $\xRightarrow{\text{призн. р/б}}$ $\triangle ABM$ – р/б $\xRightarrow{\text{опр.}}$ $AB = AM = MC = x$ (усл.)

2) AL – биссек. в $\triangle ABC$ $\xRightarrow{\text{св-во биссек.}}$ $\frac{BL}{AB} = \frac{LC}{AC} \Rightarrow \frac{BL}{LC} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ $BL = y$, $LC = 2y$

Дано:
$\triangle ABC$
AL – биссек.
BM – медиана
$AL \perp BM$
$P_{ABC} = 1200$

3) $P_{ABC} = 3(x+y) = 1200 \Rightarrow x + y = 400$ (*)

4) ABC – треуг. $\Rightarrow \begin{cases} AB < BC + AC \\ BC < AB + AC \\ AC < AB + BC \end{cases}$ $\begin{cases} x < 3y + 2x \\ 3y < 3x \\ 2x < x + 3y \end{cases}$ $\begin{cases} x > -3y \\ x > y \\ 3y > x \end{cases}$ + (*)

+ (*) $\begin{cases} y > -200 \\ y < 200 \\ y > 100 \\ x = 400 - y \end{cases}$ + (усл.) $\begin{cases} 100 < y < 200 \\ x, y \in \mathbb{Z} \\ x = 400 - y. \end{cases}$

Вариантов выбрать y 99, а значит существует 99 ~~треугольни-~~ треуг.ков, удовлетворяющих условию задачи.

Ответ: 99.

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-2x=\sqrt{} \\ \end{cases}$$

N3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{(x-1)(y-2)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Замена:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-2x=\sqrt{|x-1|}\cdot\sqrt{|y-2|} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \\ (x-1)(y-2)\geq 0 \end{cases}$$

N3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2x)^2=(x-1)(y-2) \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases}$$

Замена:
$a=x-1$
$b=y-2$

$$\begin{cases} (b-2a)^2=ab \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases} \quad \begin{cases} b^2-5ab+4a^2=0 \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases} \quad \begin{cases} (b-a)(b-4a)=0 \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=a \\ a^2=1 \end{cases} \\ \begin{cases} b=4a \\ a^2=\frac{1}{6} \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=\frac{1}{\sqrt6} \\ b=\frac{4}{\sqrt6} \end{cases} \\ \begin{cases} a=-\frac{1}{\sqrt6} \\ b=-\frac{4}{\sqrt6} \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1+\frac{1}{\sqrt6} \\ y=2+\frac{4}{\sqrt6} \end{cases} \\ \begin{cases} x=1-\frac{1}{\sqrt6} \\ y=2-\frac{4}{\sqrt6} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(2;3)$, $(0;1)$, $\left(1+\frac{1}{\sqrt6};\ 2+\frac{4}{\sqrt6}\right)$, $\left(1-\frac{1}{\sqrt6};\ 2-\frac{4}{\sqrt6}\right)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

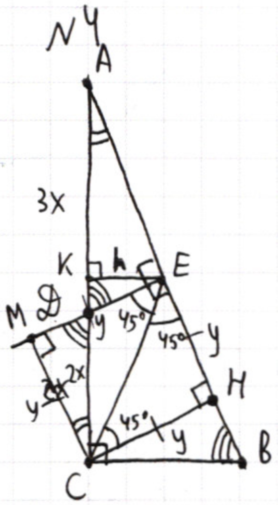
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Дано:
$\triangle ABC$ - прямоуг.
($\angle C$ - прямой)
$D \in AC$
$E \in AB$
$AD : AC = 3:5$
($AD = 3x$, $DC = 5x$)
$DE \perp AB$
$\angle CED = 45°$

Найти:
а) $tg \angle BAC$
б) $S_{\triangle} SED$, если $AC = \sqrt{29}$



Решение: (Доп.постр.: $CH \perp AB$; $CM \perp DE$)

(а)

1) $DE \perp AB \Rightarrow \angle DEB = 90° = \angle CED + \angle CEB \Rightarrow \angle CEB = 90° - 45° = 45°$

2) $\triangle CEH$ - прямоуг. (опр.) $\Rightarrow \angle ECH = 90° - \angle CEH = 45° \overset{\text{призн. р/б}}{\Rightarrow} \triangle CEH$ - р/б $\overset{\text{опр.}}{\Rightarrow} CH = HE = y$

3) $\left.\begin{array}{l} ME \perp AB \\ CH \perp AB \end{array}\right| \overset{\text{теорема о 2х пр. } \perp \text{ прям.}}{\Rightarrow} ME \parallel CH$; $\left.\begin{array}{l} CM \perp ME \\ EH \perp ME \end{array}\right| \overset{\text{теорема о 2х пр. } \perp \text{ прям.}}{\Rightarrow} CM \parallel EH$ $\overset{\text{опр.}}{\Rightarrow}$ $MEHC$ - паралл., $\angle E, \angle H$ - прямые $\overset{\text{призн.}}{\Rightarrow}$ $MEHC$ - прямоуг., $EH = CH$ $\overset{\text{опр.}}{\Rightarrow}$ $MEHC$ - квадрат $\overset{\text{опр.}}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow ME = EH = HC = MC = y$

4) $\triangle ADE \sim \triangle MDC$ ~~$\sim \triangle ABC$~~ (по 2м углам) $\Rightarrow \dfrac{DE}{MD} = \dfrac{AE}{MC} = \dfrac{AD}{DC}$ ~~$\Rightarrow AE=$~~

$\dfrac{DE}{MD} = \dfrac{AE}{y} = \dfrac{3}{2}$ ~~$\Rightarrow AE = 1,5y$~~ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $AE = 1,5y$

2) $\begin{cases} DE = 1,5MD \\ MD + DE = y \end{cases}$ $\begin{cases} DE = 0,6y \\ MD = 0,4y \end{cases}$

5) $\triangle DAE$ (прямоуг.): $tg \angle BAC = \dfrac{DE}{AE} = \dfrac{3 \cdot 2y}{5 \cdot 3y} = 0,4$

(б)

6) $AC = \sqrt{29} \Rightarrow AD = \dfrac{3\sqrt{29}}{5}$; (Th. Пифагора в $\triangle ADE$): $\dfrac{9}{25}y^2 + \dfrac{9}{4}y^2 = \dfrac{9 \cdot 29}{25}$ $| \cdot 100$

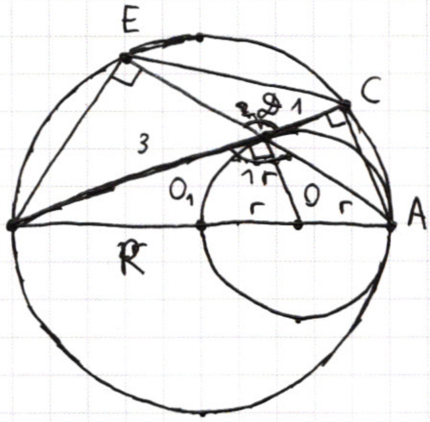
$29y^2 = 4 \cdot 29$
$y = 2$ $(y > 0)$ $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} AE = 3 \\ DE = 1,2 \end{array}\right| \Rightarrow S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} AE \cdot DE = 1,8$

7) $\dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle CED}} = \dfrac{\frac{1}{2} \cancel{h} \cdot 3x}{\frac{1}{2} \cancel{h} \cdot 2x} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow S_{\triangle CED} = \dfrac{2}{3} S_{\triangle ADE} = 1,2$

Ответ: а) 0,4 ; б) 1,2.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№5



Дано:

$\omega(O; r)$

$\Omega(O_1; R)$

$\omega(O; r) \cap \Omega(O_1; R) = A$

AB – диаметр $\Omega(O_1; R)$

BC – хорда $\Omega(O_1; R)$

BC – касательная $\omega(O; r)$ в т. D

$AD \cap \Omega(O_1; R) = \{E; A\}$

$CD = 1$; $BD = 3$

Найти:

r, R, S_{BACE}

Решение:

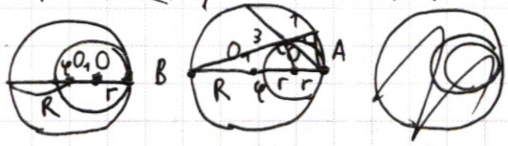
1) $\angle BCA$ опирается на диаметр AB в $\Omega(O_1; R) \overset{\text{св-во}}{\Rightarrow} \angle BCA = 90°$ ~~прямой~~.

~~2) По опр. $\triangle BDO$ и $\triangle BCA$ – прямоуг. (по св-ву касат. $DO \perp BC$), имеющие общий угол $\angle B \Rightarrow \triangle BDO \sim \triangle BCA$ (по 2м углам) $\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \frac{BD}{BO} = \frac{BC}{AB}$ $\quad \frac{3}{R+r+\varphi} = \frac{4}{R}$~~

~~(φ – расстояние между O_1 и $\omega(O_1; r)$)~~

2) Пусть φ – расстояние между O_1 и $\omega(O; r)$



$$\left[\begin{array}{l} AB = 2R = R + \varphi + 2r \\ AB = 2R = R - \varphi + 2r \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} R = 2r + \varphi \\ R = 2r - \varphi \end{array}\right.$$

3) По опр. $\triangle BDO$ и $\triangle BCA$ – прямоуг. (по св-ву касат. $DO \perp BC$), имеющие общий $\angle B \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BDO \sim \triangle BCA$ (по 2м углам) $\Rightarrow$

~~$\Rightarrow \frac{BD}{BO} = \frac{BC}{AB}$ $\quad \frac{BD}{BC} = \frac{BO}{BA}$ $\quad \frac{3}{4} = \frac{R+\varphi}{R+\varphi+2r}$ $\quad 8r + 8\varphi = 6r + 3\varphi + 3\varphi + 6r$~~

~~$\frac{BD}{BC} = \frac{BO}{BA}$ $\quad \frac{3}{4} = \frac{R \pm \varphi + r}{R \pm \varphi + 2r}$ $\quad 8r + 8\varphi = 8r + 8\varphi + 6r$~~

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BO}{BA} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3}{4} = \frac{R+\varphi+r}{R+\varphi+2r} \\ \frac{3}{4} = \frac{R-\varphi+r}{R-\varphi+2r} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \cancel{8r} + 8\varphi + \cancel{4r} = \cancel{6r} + 6\varphi + \cancel{6r} \\ \cancel{8r} - 8\varphi + \cancel{4r} = \cancel{6r} - 6\varphi + \cancel{6r} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \varphi = 0 \\ \varphi = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow O_1 \in \omega(O; r) \Rightarrow$

$\Rightarrow R = 2r$

4) OD – радиус $\Rightarrow OD = r \Rightarrow \angle \triangle BDO$: (Th. Пифагора) $9r^2 = r^2 + 9$

$r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$ $(r > 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \frac{3}{\sqrt{2}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~5) $\triangle BEA$ (прямоуг., т.к. $\angle BEA$ опирается на диаметр AB в $\Omega(O_1;R)$ св-во) (Th. Пифагора) $EB=\sqrt{AB^2-}$~~

5) (Th. Пифагора в $\triangle ABC$): $AC=\sqrt{\frac{36}{2}-16}=\frac{2}{\sqrt2}=\sqrt2 \Rightarrow$ (Th. Пифагора в $\triangle DCA$) $AD=$
$=\sqrt{1+2}=\sqrt3$

6) Т.к. $BECA$ вписан в $\Omega(O_1;R)$, то (по св-ву) $BD\cdot DC=ED\cdot DA \Rightarrow ED=\sqrt3$

7) (Th. Пифагора в $\triangle BEA$ (прямоуг., т.к. $\angle BEA$ опирающийся на диаметр AB в $\Omega(O_1;R)$, — прямоуг. (св-во)):

$EB=\sqrt{\frac{36}{2}-12}=\sqrt6$

~~8) $\angle1=\angle2$ (как вертикальные) $\Rightarrow$~~

8) $\angle B+\angle C=180°$ (св-во) $\Rightarrow \sin\angle C=\sin\angle B=\frac{2\sqrt3\cdot\sqrt2}{6}=\frac{\sqrt6}{3}$

9) $\triangle BDA\sim\triangle EDC$ (по 2му призн.: $\angle1=\angle2$ (верт.), $\angle CBA=\angle AEC$ (опир. на дугу $\overset{\frown}{AC}$));

$\frac{EC}{AB}=\frac{ED}{BD}\Rightarrow EC=\frac{ED\cdot AB}{BD}=\frac{6\sqrt3}{\sqrt2}$

10) $S_{BACE}=S_{BEA}+S_{ECA}=\frac12 EB\cdot AB+\frac12 EC\cdot AC=\frac12\sqrt6\cdot\frac{6}{\sqrt2}+\frac12\cdot\frac{6\sqrt3}{\sqrt2}\cdot\sqrt2=$
$=\frac12(6\sqrt3+6\sqrt3)=6\sqrt3$

Ответ: $r=\frac{3}{2\sqrt2}$, $R=\frac{3}{\sqrt2}$, $S_{BACE}=6\sqrt3$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$ax^2 + 2qax + q^2a = 0$

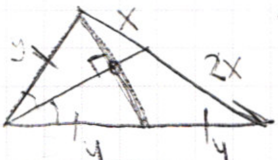
$\frac{D}{4} = q^2a^2 - q^2a^2 = 0$

$x = \frac{-qa}{a} = -q$

$a q_3 = -q$

$a = -\frac{1}{q^2}$

-1



$3y = 2y$

$\begin{cases} 3x > y \\ y > x \\ y > -3x \end{cases}$

$\begin{cases} x > 100 \\ x < 200 \\ x > -200 \end{cases}$

$x \in (100; 200)$.

x^2

$x + y = 400$

$y = 400 - x$

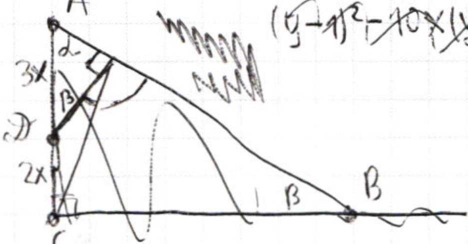
$\begin{cases} y^2 - 4xy + 4x^2 - xy + 2x + y + 2 = 0 \\ 2 \end{cases}$

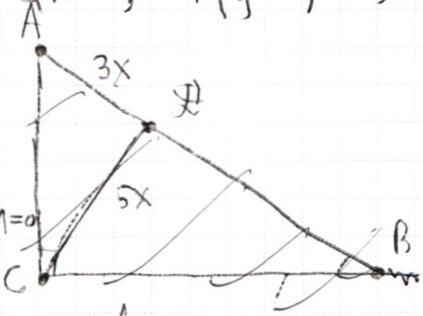
$2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$

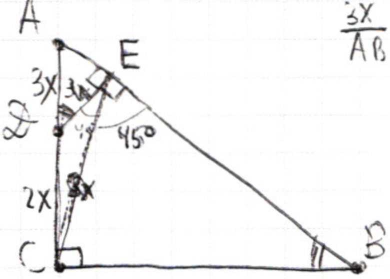
$\begin{cases} y^2 - 5xy + 4x^2 + 2x + y - 2 = 0 \\ 2x^2 - y^2 - 4x - 4y + 2 = 0 \end{cases}$

$(y - 2x) = \sqrt{(y-2)(x-1)}$

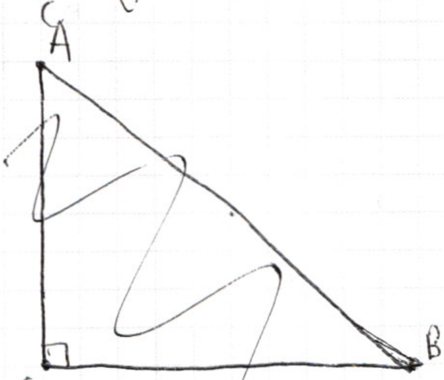
$y^2 - 10xy + 10x^2 - 2y + 1 = 0$

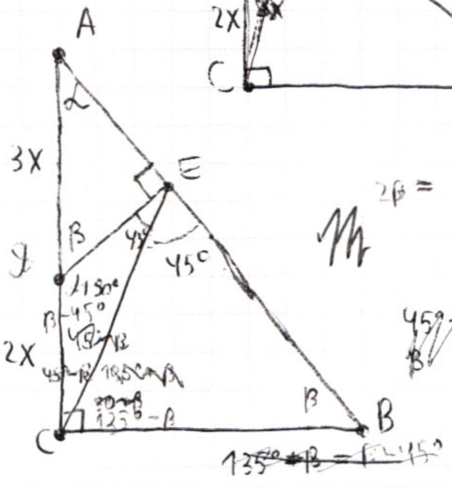






$\frac{3x}{AB} = \frac{AE}{BC} = \frac{DE}{5x}$





$\frac{3x}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{5x}$

$AE(AE + EB) = 15x^2$

$135° - \beta$

$135° + \beta = 145°$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$(x-1)(y-2)$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

Замена:

$a=\sqrt{x-1}$, $b=\sqrt{y-2}$

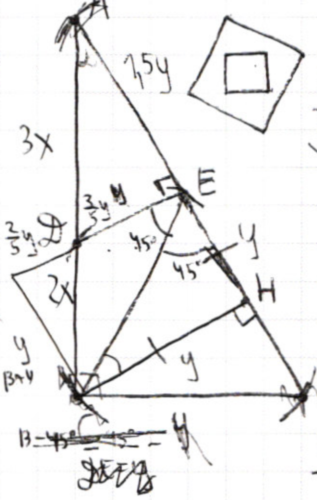
$a>0, b>0$

$$\begin{cases} b^2-2a^2=ab \\ b^4+2a^4=3 \end{cases} \quad \begin{cases} b^4-5b^2a^2+4a^4=0 \\ b^4+2a^4=3 \end{cases}$$

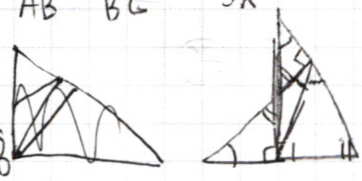
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b^2=a^2 \\ a^4=1 \end{cases} \\ \begin{cases} b^2=4a^2 \\ 18a^4=3 \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=\pm1 \\ a=\pm1 \end{cases} \\ \begin{cases} b=\pm\frac{2}{\sqrt[4]{6}} \\ a=\pm\frac{1}{\sqrt[4]{6}} \end{cases} \end{array}\right.$$

$(1;1)$ $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}; \frac{2}{\sqrt[4]{6}}\right)$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1+\frac{1}{\sqrt{6}} \\ y=2+\frac{4}{\sqrt[6]{6}} \end{cases} \end{array}\right.$$



$\frac{3x}{AB}=\frac{DE}{BC}=\frac{AE}{5x}$



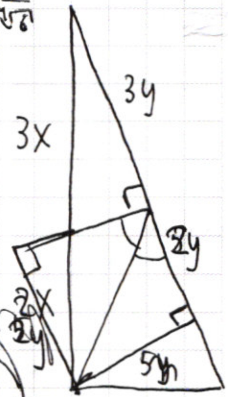
$\frac{CH}{5x}=\frac{HB}{BC}=\frac{BC}{AB}$

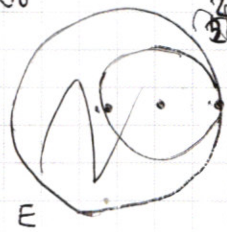
$\frac{3\cdot2}{5\cdot3}=\frac{2}{5}$

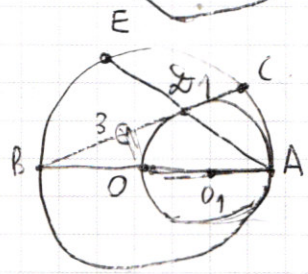
$2x^2-x-1$

$1+8=3^2$

$x_{1,2}=\frac{1\pm3}{2}$







$\frac{1}{9^2}x^2+\frac{2}{9}x+1=0$

$\left(\frac{1}{9}x+1\right)=0$

$\frac{1}{3}+\frac{16}{6}=\frac{1}{3}+\frac{8}{3}$

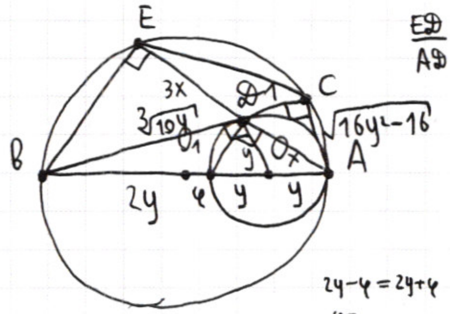
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



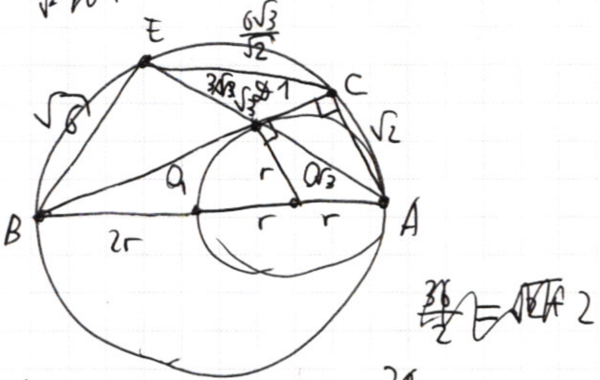
$\frac{ED}{AD}=\frac{BD}{CD}$

$3=\sqrt{10}\cdot y \quad y=\frac{3}{\sqrt{10}}$

$2y-y=2y+y$

$y=$

$\frac{81}{8}=\frac{9}{8}+9$



$\frac{6}{\sqrt2}$

$\sqrt{\frac{36}{2}-16}=\frac{4}{\sqrt2}=\sqrt2$

$\sqrt{\frac{36}{2}-12}=\frac{\sqrt{12}}{\sqrt2}=\sqrt6$

$\sin\angle B=\frac{2\sqrt3\cdot\sqrt2}{6}=\frac{\sqrt6}{3}$

~~525, 930~~

110, 150, 175, 180

300, 600, 300

~~330, 230, 580 250, 500, 450~~

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)