МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2+2bx+c=0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}, \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD:AC=3:5$ и $DE\perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED=45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC=\sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD=1$, $BD=3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$2x^2-x-1\leqslant ax+b\leqslant x+|2x-1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4};\frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 21$, $1\leqslant y\leqslant 21$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

пусть знаменатель геометрической прогрессии равен q тогда

$b = aq \quad c = a\cdot q^2$ а четвертый член равен $a\cdot q^3$

$ax^2 + 2bx + c = 0$ подставим значения в ис

$ax^2 + 2qax + q^2\cdot a = 0$

$a(x^2 + 2qx + q^2) = 0$

$a(x+q)^2 = 0$. тогда $a = 0$ или $x + q = 0$

но $a \neq 0$ т.к. $x = -q$ (a x - четв. член геометрической прогрессии)

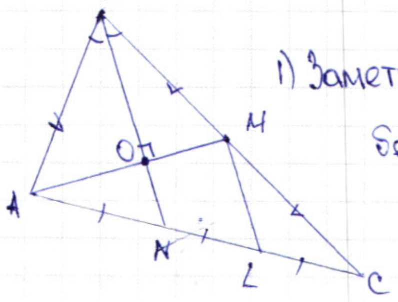
a - первой член геом. прогрессии.

тогда $x = -q$ и $x = a\cdot q^3 \Rightarrow a\cdot q^3 = -q \Rightarrow$

$a = -\frac{1}{q^2} \Rightarrow c = a\cdot q^2 = -\frac{1}{q^2}\cdot q^2 = -1$

Ответ третий член геометрической прогрессии равен -1

№2.



Дано
ΔABC
$P_{ABC} = 1200$
BN-биссект.
AM- медиана
$BN \perp AN$
Найти

1) Заметим, что в ΔABM; BO - высота и биссектриса => ΔABM - равнобедр. => $AO = OM$ и $AB = BM$ => $\Delta ABO = \Delta BOM$ (по 3 сторонам)

$AB = BM = MC$. 2) проведем доп построение $ML \parallel BN$

тогда по теореме Фалеса $\frac{NL}{LC} = \frac{BM}{MC} = \frac{1}{1} \Rightarrow NL = LC$.

и по свойству биссектрисы внутреннего угла

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№2 продолжение

$\frac{AN}{NC}=\frac{AB}{BC}=\frac{1}{2} \Rightarrow AN=\frac{1}{2}NC=NL=LC$

тогда периметр $\triangle ABC = AB+AC+BC = 3AB+3AN = 1200 \Rightarrow$

$AB+AN=400$

и по неравенству треуг ABC $AC+AB>BC$ и $AB+BC>AC$.

~~3AN~~> $3AN+AB>2AB$ и $3AB>3AN$

$3AN>AB$ и $AB>AN$.

$AB=400-AN \Rightarrow 3AN>400-AN \Rightarrow AN>100$ и

$400-AN>AN \Rightarrow AN<200$ те

$AN\in(100;200) \Rightarrow AB\in(200;300)$ и если $AB\in\mathbb{Z} \Rightarrow AN\in\mathbb{Z}$ тк $400\in\mathbb{Z}$.

тогда всего возможных пар AB и AN : 99 штук это

$AN=101$ $AB=299$; $AN=102$ и $AB=298$; …; $AN=199$ $AB=201$.

~~Ответ 99~~ + тогда всего возможных треугольников 99.

Ответ 99 треуг. периметр которых равен 1200 с целочисленными сторонами и одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

№4.

Дано

$\triangle ABC$ $\angle C=90^\circ$

$AD:AC=\frac{3}{5}$

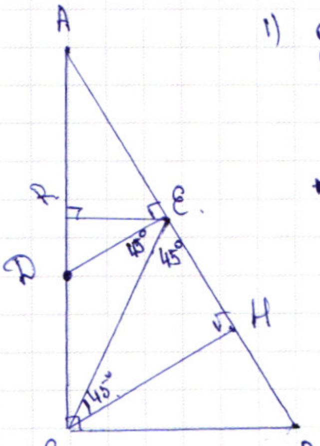
$DE\perp AB$

$\angle CED=45^\circ$

1) $tg\angle BAC$ - ?

2) $AC=\sqrt{29}$

$S_{\triangle CED}$ - ?



1) доп построение $CH\perp AB$

$\triangle AED \sim \triangle AHC$ по 2углам ($\angle A$ - общий; $\angle E=\angle H$)

$\frac{AD}{AC}=\frac{DE}{CH}=\frac{3}{5} \Rightarrow DE=\frac{3}{5}CH$.

$\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AH}=\frac{3}{5} \Rightarrow AE=\frac{3}{5}AH \Rightarrow EH=\frac{2}{5}AH$.

в $\triangle CEH$: $\angle HEC=\angle HCE=45^\circ \Rightarrow$

$\triangle CEH$ - равнобедренный $\Rightarrow CH=EH$

$CH=\frac{2}{5}AH$. $\Rightarrow$ в $\triangle ACH$: по теореме Пифагора

$AC^2=CH^2+AH^2=\frac{4}{25}AH^2+AH^2=\frac{29}{25}AH^2 \Rightarrow AC=\frac{\sqrt{29}}{5}AH$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 продолжение

$CH = \sqrt{AH \cdot BH}$ (тк высота к гипотенузе) $\Leftrightarrow$ $CH^2 = AH \cdot BH \Rightarrow$

$AH^2 \cdot \frac{4}{25} = AH \cdot BH \Rightarrow BH = \frac{4}{25} AH \Rightarrow AB = BH + AH = \frac{29}{25} AH$

$\triangle ABC \sim \triangle HCB$ (по 2 углам $\angle B$ общий и $\angle H = \angle C$) $\Rightarrow$

$\frac{BH}{BC} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow AC \cdot BH = CH \cdot BC$

$\frac{\sqrt{29}}{5} AH \cdot \frac{4}{25} AH = \frac{2}{5} AH \cdot BC \Rightarrow$

$BC = \frac{2\sqrt{29}}{25} AH$ тогда

$tg \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{\frac{2\sqrt{29}}{25} AH}{\frac{\sqrt{29}}{5} AH} = \frac{2\sqrt{29} \cdot 5}{\sqrt{29} \cdot 25} = \frac{2}{5}$

б) по букве ~~А)~~ $AC = \cancel{\frac{\sqrt{29}}{5} AH}$ $AC = \sqrt{29}$ $CD = \frac{2}{5} AC = \frac{2\sqrt{29}}{5}$.

Опустим $CR \perp AC$. $\Rightarrow \triangle AER \sim \triangle ABC$ (по 2 углам угол A-общий $\angle R = \angle C$).

$\frac{RE}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{\frac{3}{5} AH}{\frac{29}{25} AH} = \frac{15}{29} \Rightarrow RE = \frac{15}{29} \cdot BC$. а $BC = \frac{2}{5} AC \Rightarrow$

$\cancel{\frac{AR}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{15}{29} \Rightarrow AR = \frac{15}{29} AC = \frac{15\sqrt{29}}{29}}$ тогда.

$RE = \frac{6}{29} AC = \frac{6\sqrt{29}}{29} \Rightarrow S_{\triangle CED} = \frac{1}{2} RE \cdot CD = \frac{1 \cdot 6\sqrt{29} \cdot 2\sqrt{29}}{2 \cdot 29 \cdot 5} =$

$= \frac{12}{10} = 1{,}2.$

Ответ а) $tg \angle BAC = \frac{2}{5}$ б) $S_{\triangle CED} = 1{,}2$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№5

Дано

O_1 - центр Ω $BD = 3$

$CD = 1$

O_2 - центр ω

A - точка кас.

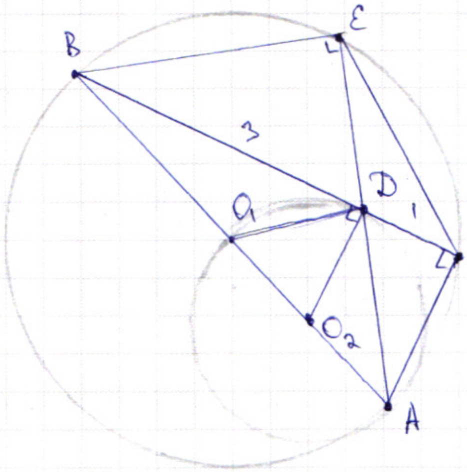
AB - диам. $BC \perp O_2D$.

$AD \cap \Omega = E$.

Найти радиусы и S_{BACE}

Пусть R - радиус большей окружности

r - маленькой.



Заметим что

$O_2 \in AB$ и $O_1 \in AB$ тк AB ~~через внутр.~~ диаметр по свойству внутр. касания.

1) $\angle BCA = 90^\circ$ тк опирается на диаметр.

$\angle O_2DB = 90^\circ$ тк BC - касательная $\Rightarrow$

$\triangle ABC \sim \triangle O_2BD$ (по 2 углам $\angle B$ - общий; $\angle D = \angle C = 90^\circ$)

$\frac{BO_2}{BA} = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{4}$. $\quad \frac{2R-r}{2R} = \frac{3}{4}$ и $\frac{O_2D}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow r = \frac{3}{4}AC$

$BD^2 = BO_1 \cdot BA$ (теорема касательной)

$R - 4r = 6R \Rightarrow 2r = R$. ~~тк O_1A - диаметр ω~~.

~~тогда~~ $3^2 = R \cdot (2R) \Rightarrow$ ~~$R = 2\sqrt{2}$ $r = \sqrt{2}$~~.

$R^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. тогда $r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$. $\Rightarrow$

заметим что O_1A - диаметр $\omega \Rightarrow \angle O_1DA = 90^\circ$ тк опирается на O_1A. тогда $\triangle AD O_1 \sim \triangle AEB$ по 2 углам ($\angle A$ - общий $\angle D = \angle E$) $\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AO_1}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow AD = DE$ ~~тог~~

тогда в $\triangle ABE$: BD медиана $\Rightarrow S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BED}$

и в $\triangle ACE$: CD - медиана $\Rightarrow S_{\triangle ACD} = S_{\triangle CDE} \Rightarrow$

$S_{BACE} = S_{ABD} + S_{BED} + S_{ACD} + S_{CDE} = 2S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot BC \cdot AC =$

$= 4 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

Ответ $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ $\quad r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ $\quad S_{BACE} = 4\sqrt{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1|$

замена $ax+b=y$

$\begin{cases} y \le x+|2x-1| & \text{I} \\ y \ge 2x^2-x-1 & \text{II} \end{cases}$

I если $x \ge 0,5$ то $y=3x-1$

x	0,5	1
y	0,5	2

если $x<0,5$ то $y=1-x$

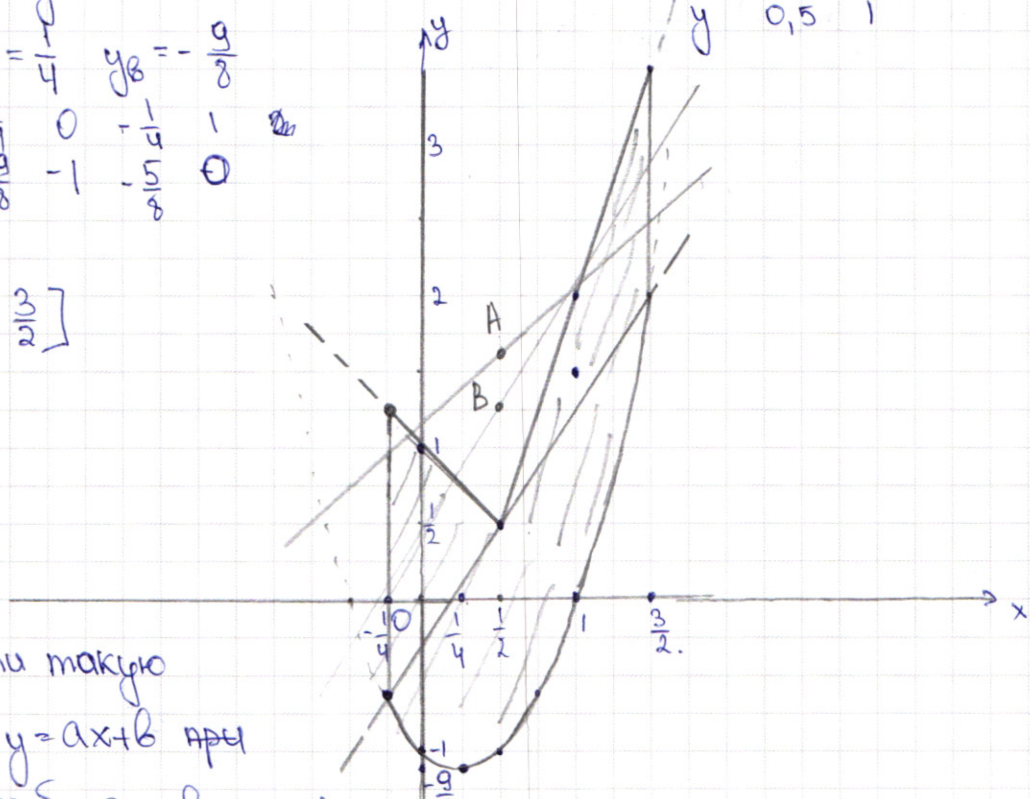
x	0,5	0
y	0,5	1

II $y=2x^2-x-1$

$x_в=\frac{1}{4}$ $y_в=-\frac{9}{8}$

x	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	1
y	$-\frac{9}{8}$	-1	$-\frac{5}{8}$	0

$x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$



нужно найти такую прямую $y=ax+b$ ~~при~~ ~~которой~~ не будет выходить за пределы помеченной области. она будет всего одна т.к. если взять значение y при $x=-\frac{1}{4}$ $(y>-\frac{5}{8})$ то при проведении прямых в любую точку выделенной области на прямой $x=1,5$ прямая будет проходить через число $y>\frac{1}{2}$ при $x=\frac{1}{2}$. а если взять $x=-\frac{1}{4}$ и $y=-\frac{5}{8}$. ~~у точек A и I~~

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№6 продолжение

и проводить в точки при $x=\frac{3}{2}$ $y\in(2;3,5]$ то такие прямая будет выходить из выделенной зоны те

при $x=\frac{1}{2}$ значение $y>\frac{1}{2}$. но одна прямая про ~~выходящая из~~ точки $(-\frac{1}{4};-\frac{5}{8})$ и ~~пр~~ $(\frac{3}{2};2)$ проходит и через $(0,5;0,5)$

тогда

~~$y=\frac{3}{2}x-b$~~ ~~$y=\frac{3}{2}x+b$~~

$$\begin{cases} 2=\frac{3}{2}a+b \\ \frac{1}{2}=\frac{1}{2}a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{2} \\ b=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

Ответ $(a;b)(\frac{3}{2};-\frac{1}{4})$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $ax^2+2bx+c=0.$ $a - b,$ $b=qa$ $c=q^2a^{\cancel{3}}$

$D=4b^2-4ac=4(b^2-ac)$ $b^2=q^2a^2$

$x_1=\frac{-2+2\sqrt{b^2-ac}}{2}=\sqrt{b^2-ac}-1$ $\sqrt{b^2-ca}=\sqrt{q^2a^2-q^2a^{\cancel{3}}}-1=q^3a$

$q^3a=-1$

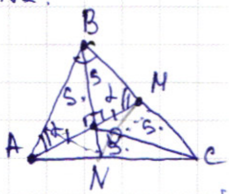
$x_2=-\sqrt{b^2-ac}-1$ $a=-\frac{1}{q^3}$ $c=q^2\cdot\left(-\frac{1}{q^3}\right)=-\frac{1}{q}$ ✗

$ax^2+2qa x+q^2a=0$

$a(x^2+2qx+q^2)=0.$

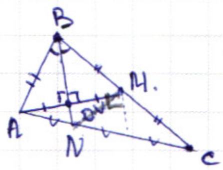
$(x+q)^2=0$ $x=-q$ $-q=q^3a.$ $a=-\frac{1}{q^2}$ $c=-1$

№2.



$\triangle ABO=\triangle BOM$ (по ст и 2 прил. углам)

$\triangle ABM$ - р/б. $AB=BM$ => $AB=\frac{1}{2}BC.$



$\frac{AN}{NC}=\frac{AB}{BC}.$ $\frac{AN}{NC}=\frac{1}{2}$ $NC=2AN.$

$P_{ABC}=1200=AC+BC+AB=3AB+AC.$ $AN^2=AO^2+NO^2$

$P_{ABC}=3AB+3AN=1200$ $AB+AN=400.$ $AB^2=BO^2+AO^2.$

~~$AB^2+AN^2=BO^2+NO^2+2AO^2.$~~ ~~$160000-2AN\cdot BA=BO^2+NO^2+2AO^2$~~

$\frac{1}{3}$ $999\frac{2}{3}$ 1 2 3 4 5 . . . .

№3. $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$ $y>2x.$ (2) $y^2-4xy+4x^2-xy+2x+y-2=0$

$2x^2+y^2-4x-4y+3=0.$

$2x^2-x(5y-6)+5y+1=0$ $2x^2-5xy+6x+5y+1=0.$

$D=25y^2-60y+36-40y-16=25y^2-100y-20.$

~~$=5y^2-20y-4$~~.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№4

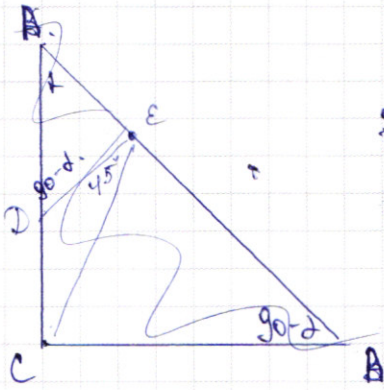
а) $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$

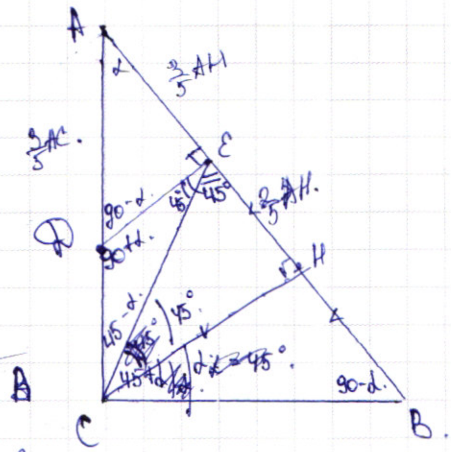
$D \in AC$ $E \in AB$

$AD : AC = 3:5$ $DE \perp AB$.

$\angle CED = 45^\circ$. $tg\, BAC$ - ?

$\frac{BC}{AC}$ - ?





$\triangle AED \sim \triangle ACB$. по 2 углам.

$CH = EH$.

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. $AD \cdot AC = AE \cdot AB$.

$\frac{3}{5} AC^2 = AE \cdot AB$

$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$. $\frac{3}{5} \cdot AC \cdot BC = AB \cdot DE$.

$DE = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} AH = \frac{6}{25} AH$.

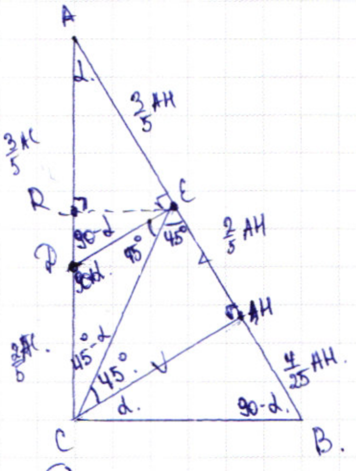
$\frac{DE}{CH} = \frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$. $DE = \frac{3}{5} CH =$ $CH = \sqrt{AH \cdot HB}$

$\frac{CH}{AC} =$ $AD^2 = \frac{9}{25} AH^2 + \frac{36}{625} AH^2 = \frac{261}{625} AH^2$.

$+\frac{225}{30}$ 255 $-261 | 3$ 24 21 $87 | 3$ 29

$\frac{3\sqrt{29}}{25} AH$.

$\frac{2}{5} AH^2 = AH \cdot HB$ $HB = \frac{2}{5} AH$.



$\frac{4}{25} AH^2 = AH \cdot HB$

$DE = \frac{3}{5} CH = \frac{6}{25} AH$.

$HB = \frac{4}{25} AH$ $AB = \frac{29}{25} AH$.

$AC^2 = CH^2 + AH^2 = \frac{4}{25} AH^2 + AH^2 = \frac{29}{25} AH^2 \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{29}}{5} AH$.

$AH = \frac{25}{29} AB$ $AC = \frac{25}{29} \cdot \frac{\sqrt{29}}{5} AB = \frac{5\sqrt{29}}{29} AB$.

$\frac{BH}{BC} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow AC \cdot BH = CH \cdot BC$.

б)

$\frac{3}{5}$ $\frac{AE}{AB} = \frac{RE}{BC}$.

$\frac{3}{5} : \frac{29}{25} = \frac{3 \cdot 25}{5 \cdot 29} = \frac{15}{29}$

$\frac{\sqrt{29}}{5} AH \cdot \frac{4}{25} AH = \frac{2}{5} AH \cdot BC$.

$BC = \frac{5 \cdot \sqrt{29} \cdot 4}{2 \cdot 5 \cdot 25} AH = \frac{2\sqrt{29}}{25}$

$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{29}{25}} = \frac{RE}{BC}$.

В.

$\frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{29}}{25} : \frac{\sqrt{29}}{5} = \frac{2\sqrt{29} \cdot 5}{\sqrt{29} \cdot 25} = \frac{2}{5}$

Ответ $tg\, \angle BAC = \frac{2}{5}$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7. 201 202 203 204 205 206 207.

$f(p) = [\frac{p}{2}]$. если $x=1$ то. $3AN > AB$. $1200 - 3AB > AB$

$f(\frac{x}{y}) < 0$. $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$. $AN = 400 - AB$. $1200 > 4AB$

$1200 - 3AB = 2AB$ $AB < 300$

если $x=1$ то $f(x)=1$ $f(2)=1$ $f(3)=1{,}5$ $f(4)=$

$AB > 200$

~~$|f(x)| > |f(\frac{1}{y})|$~~ ~~$|f\frac{1}{y}| > |f(x)|$~~

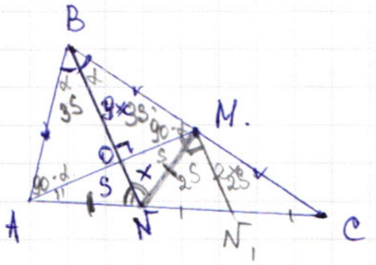
201 202 203 204 205

$p=$

206 207 208 209.

№2.

99 вариантов.



$ON = \frac{1}{2}MN_1$ $BN = 2MN_1$

$MN_1 = 2ON$ $\Rightarrow$ $AB = \frac{1200}{5}$

$ON = \frac{1}{4}BN$ 240.

180-90+α=α

$MN_1 = \frac{1}{2}BN$.

$BO + ON = BN$ $AO^2 = \sqrt{AB^2 - 9x^2}$

$AB + AN = 400$ $BO = \frac{3}{4}BN$. $AO^2 = AN^2 - x^2$

$AB > AN$ ~~$AB + 3AN > AN + AB$~~ $AN^2 - x^2 = AB^2 - 9x^2$

$3AN > AB$.

$AN^2 = AB^2 - 8x^2$.

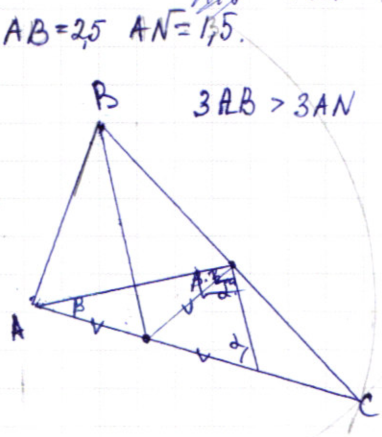
$AB = 2{,}5$ $AN = 1{,}5$.

$AB + AN = 400$ $3AN + AB > 2AB$

$3AB > 3AN$ $AB > AN$.

$AM^2 + MN_1^2 = AN_1^2$ $3AN > AB$

$AM^2 + 2x^2 = 2AN^2$



$2\alpha + 2\beta = 180°$

$\alpha + \beta = 90°$.

черновик ☑ чистовик ☐ (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№3

$$\begin{cases}(y-2x)^2 = \left(\sqrt{xy-2x-y+2}\right)^2\end{cases}$$

$y^2 - 21xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$

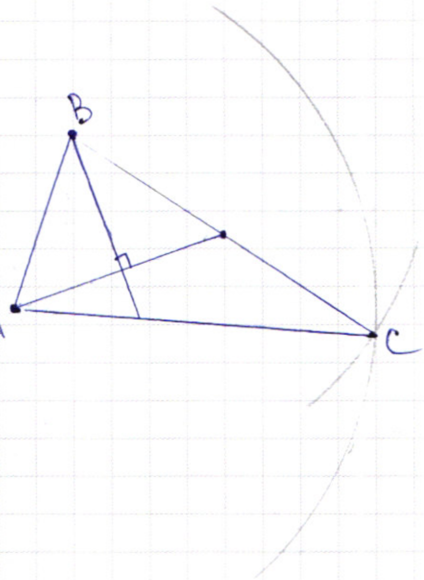
$4x^2 - 4xy + y^2 - xy + 2x + 2y - 2 = 0$

$4x^2 - 5xy + y^2 + 2x + y - 2 = 0 = 2x^2 + 2y^2 - 8x - 8y + 6.$

$4x^2 - 4xy - xy + y^2$

$4x(x-y) - y(x-y) + 2x + y - 2 = 0$

$(x-y)(4x-y) + 2x + y - 2 = 0. = 2$



$\cancel{2x^2}$

$-5xy - y^2 + 10x + 9y - 8 = 0.$

$y^2 - 5xy + 10x + 9y - 8 = 0.$

$2x(x-2) + y(y-4) + 3 = 0.$

$\cancel{\sqrt{xy \quad y(x-y)}}$

$y - 2x = \sqrt{(x-1)(y-2)}$

$x(y-2) - 1(y-2)$

$(y-2x)^2 = (x-1)(y-2).$

$(x-1)(y-2).$

$2(x^2-y) + (y^2-4x) + 3.$

$\cancel{\sqrt{2x}}\ (\sqrt{2}x - \sqrt{y})(\sqrt{2}\cdot x + \sqrt{y}) + (y - 2\sqrt{x})(y + 2\sqrt{x}) + 3.$

$2x^2 + y^2 - 6x - 3y + 3 = \sqrt{(x-1)(y-2)}.$

№6. $2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1|$

$y \le x+|2x-1|$ $\quad$ $y=x+|2x-1|$ если $x \ge 0{,}5$ то $y=x+2x-1=3x-1$

x	$0{,}5$	1
y	$0{,}5$	2

$y \ge 2x^2-x-1$. $\quad$ $2\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-1$ $\quad$ если $x<0{,}5$ то

$x_в = \frac{1}{4}$ $\quad$ $y_в=-1$. $\quad$ $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1$ $\quad$ $y=x-2x+1=1-x$.

x	$0{,}5$	0
y	$0{,}5$	1

$\frac{1}{4}$

~~x 1/2 1 0 -1; y -1 0 0 2~~ $\quad -\frac{1}{4}$

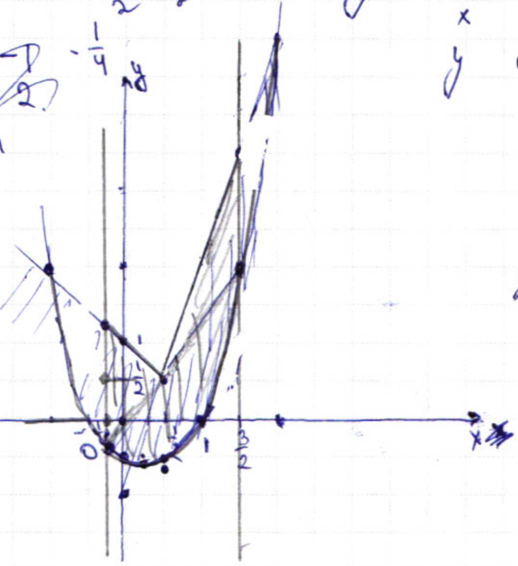
$3x-1$

y	2	$2{,}5$
x	1	$1{,}5$

$\frac{1}{16}\cdot 2+\frac{1}{4}-1$ $\quad$ $\frac{2}{16}-\frac{1}{4}-1$

$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1$ $\quad$ $\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-1$

$+\frac{1}{8}-1=-\frac{9}{8}$



$\cancel{2x^2-x-1=3x-1}$

$2x^2-4x=0$

$2x(x-2)=0$

2.

x	$0{,}5$	0	$-\frac{1}{4}$
y	-1	-1	$-\frac{5}{8}$

$x\ \frac{3}{2}$.

$y=\frac{9}{4}\cdot 2-\frac{3}{2}-1=\frac{9}{2}-\frac{3}{2}-1=2$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}a+b=2 \\ \frac{1}{2}a+b=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$[\frac{3}{2};2]$ и $[-\frac{1}{4};\frac{5}{8}]$

$y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}$.

$a=\frac{3}{2}$. $\quad \frac{9}{4}+b=2$

$b=-\frac{1}{4}$.

$y=ax+b$.

$y=-\frac{1\cdot 3}{4\cdot 2}-\frac{2}{8}$.

$-\frac{5}{8}$.

$y=\frac{3}{2}a+b$. $\quad -\frac{1}{4}a+b$.

$$\begin{cases} -\frac{5}{8}=-\frac{3}{4}a+b \\ 2=\frac{3}{2}a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5=-2a+8b & |\cdot 3 \\ 4=3a+2b & |\cdot 2 \end{cases}$$

$\frac{4}{2{,}5}$ $AH^2=AH\cdot BH$

$BH=$

$$\begin{cases} -15=6a+8b \\ 8=6a+4b. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7=12b. \\ a=\frac{-2b+4}{3} \end{cases}$$

$-\frac{\frac{31}{6}}{3}$

$b=-\frac{7}{12}$ $\quad$ $a=\frac{+\frac{7}{6}+4}{3}$

$-\frac{31}{18}$.

$y=\frac{31}{18}x-\frac{7}{12}$. $\quad$ $\frac{31}{36}-\frac{21}{36}=\frac{10}{36}$.

Ответ $(\frac{3}{2};-\frac{1}{4})$

☑ черновик $\quad$ ☐ чистовик $\quad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\quad$ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

б) $AC = \sqrt{29}$. $CD = \frac{2\sqrt{29}}{5}$

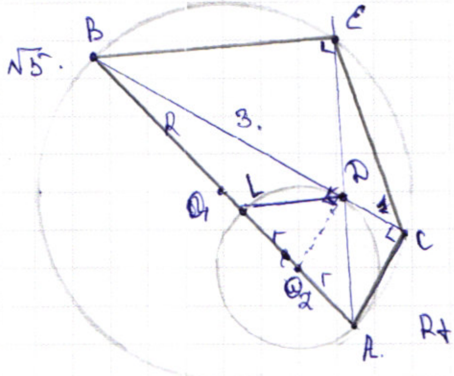
$\frac{2\sqrt{29}}{5} \cdot \sqrt{29} = \frac{29}{5} = 5{,}8$

$\frac{RE}{BC} = \frac{15}{29}$. $RE = \frac{15}{29} BC$. $\frac{ER}{AC} = \frac{15}{29}$

$ER = \frac{15\sqrt{29}}{29}$. $S_{CED} = \frac{2\sqrt{29}}{5} \cdot \frac{15\sqrt{29}}{29} \cdot \frac{1}{2} =$

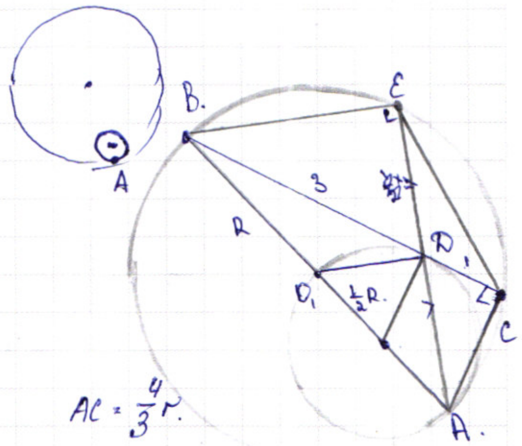
$\frac{30}{10} = 3$

Ответ $S_{CED} = 3$.



O_1 и O_2 - центры.

$\angle BEA = 90°$. $\angle ACB = 90°$.



$R - 2r + R + 2r = 2R$. +.

$AC = \frac{4}{3} r$.

$R + R - 2r + r = 3x$ $\quad 2R - r = 3x$

$\frac{r}{2R - r} = \frac{1}{3}$

$r = x$. $\quad r = x \quad R = x$.

$2R = 4x \Rightarrow R = 2r$

$BC^2 = BL \cdot BA \Rightarrow 16 = (2R - 2r) \cdot 2R$.

$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} R = \frac{2}{3} R$.

$4 = (R - r) \cdot R$.

$4 = R \cdot r$.

$4^2 + \frac{4}{9} R^2 = 4R^2$. $\quad 4R^2 - \frac{4}{9} R^2 = 16 \quad |:4$

$R^2 - \frac{1}{9} R^2 = 4 \quad \frac{8}{9} R^2 = 4 \quad R^2 = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$

$R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. $\quad r = \frac{3}{4}\sqrt{2}$

$2 S_{ABC}$ - ? $\quad 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 2\sqrt{2} \cdot 4 = 8\sqrt{2}$.

Ответ $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ $\quad r = \frac{3}{4}\sqrt{2}$ $\quad S = 8\sqrt{2}$.