

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.
2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC , если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.
б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED .
5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1, BD = 3$.
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leq x \leq 21, 1 \leq y \leq 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

a, b, c, \dots — геометрическая прогрессия;

$$ax^2 + 2bx + c = 0; \quad c = ?$$

Из условия $b = qa, c = q^2a, x = q^3a$

$$ax^2 + 2qax + q^2a = 0; \quad a \neq 0$$

$$x^2 + 2qx + q^2 = 0$$

$$(x+q)^2 = 0$$

$$q^3a + q = 0$$

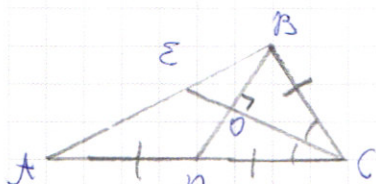
$$q(q^2a + 1) = 0$$

П.к. $q \neq 0$, то $q^2a + 1 = 0$

$$q^2a = -1 = c$$

Ответ: $c = -1$

№ 2



Рассмотрим $\triangle ABC$, в котором BD — медиана, CE — биссектриса, $BD \perp CE$, $BD \perp AD$ ($\angle = 0$)

образуется $\triangle BCD$, в котором CO — высота, т.к. $CE \perp BD$ и CO — биссектриса, т.к.

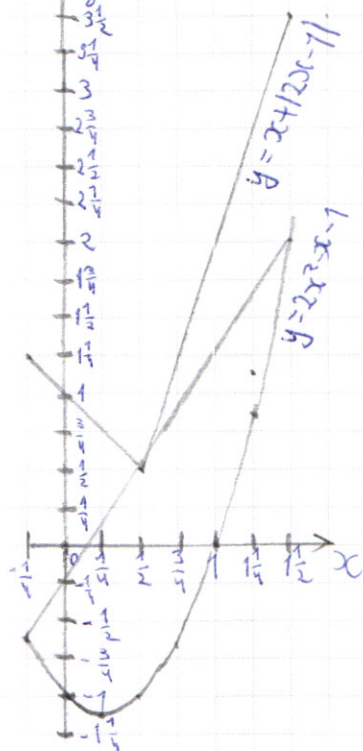
CE — биссектриса $\Rightarrow \triangle BCD$ — р.б., $DC = BC = \frac{1}{2} AC$, т.к. $AD = DC$.

Нам нужно найти все треугольники с периметром 1200 и целыми сторонами такие, что одна сторона в 2 раза больше другой.

П.к. одна сторона меньше суммы двух других, то сторона меньше $1200 : 2 = 600$, т.е. максимальное возможное значение длины стороны — 599. Сумма двух сторон должна быть минимум 601, т.к. в ином

Построим графики функций $y = 2x^2 - x - 1$ и $y = x + |2x - 1|$ на промежутке

$[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$



Соединим точки $(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8})$ и $(1\frac{1}{2}; 2)$ как один из вариантов $ax + b$.

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}a + b = -\frac{5}{8} \\ 1\frac{1}{2}a + b = 2 \end{cases}$$

$$\hline -1\frac{3}{4}a = -2\frac{5}{8}$$

$$a = 1,5; b = -0,25$$

Заметим, что $y = 1,5x - 0,25$ ~~пересекает~~ принадлежит точка $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ — вершина $y = x + |2x - 1|$. Если мы поднимем график выше или сделаем левее, то $y = ax + b$ будет пересекать график $y = x + |2x - 1|$ в 2 точках \Rightarrow вершина $y = x + |2x - 1|$ будет ниже графика $y = ax + b$, что не удовл. усл. Если мы опустим график $y = ax + b$ ниже или правее, то $y = ax + b$ и $y = 2x^2 - x - 1$ пересекнутся в 2 точках, отличных от $(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8})$ и $(1\frac{1}{2}; 2)$, т.е. точки пересечения графиков будут ниже этих точек, что не удовл. усл. Значит, $y = 1,5x - 0,25$ — единственная.

Ответ: $(1,5; -0,25)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

случае третья сторона будет ~~меньше~~ больше 600. Рассмотрим возможные случаи тех сторон, отношение длин которых друг к другу равно 1:2. П.к. сумма сторон минимум 607, то минимальные стороны в таком случае - 201 и 402 (третья сторона - 597) Дальше нам подходят стороны 202 и 404, 203 и 406..., 298 и 596, 299 и 598. Если мы возьмем сторону 300, то вторая сторона уже равна 600, что не удовлетворяет условию, поэтому мы берем треугольнички со стороной от 201 до 299, т.е. 99 штук.

Ответ: 99.

№ 3

$$\begin{cases} y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y-2-2(x-1) = \sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \quad \text{ОДЗ: } y-2x \geq 0$$

$$y-2=t; \quad x-1=k$$

$$t-2k = \sqrt{tk}$$

$$t^2-4kt+4k^2-tk=0$$

$$t(t-k)-4k(t-k)=0$$

$$t-4k=0 \text{ или } t-k=0$$

$$y-2=4x-4 \text{ или } y-2=x-1$$

$$y=4x-2 \text{ или } y=x+1$$

$$\text{Если } y=4x-2, \text{ то } y-2x = 2x-2 \geq 0; \quad x \geq 1$$

$$\text{Если } y=x+1, \text{ то } y-2x = 1-x \geq 0; \quad x \leq 1$$

$y=x+1$: (подставляем во 2-ое равенство в системе)

$$2x^2+(x+1)^2+2x+1-4x-4x-4+3=0$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x-2) = 0$$

$$3x = 0 \text{ или } x - 2 = 0$$

$$x = 0;$$

$$y = 1$$

$$x = 2; \text{ — не удовл. усл. } x \leq 1$$

$$y = 3$$

$$y = 4x - 2;$$

$$2x^2 + 16x^2 - 16x + 4 - 4x - 16x + 8 + 3 = 0$$

$$18x^2 - 36x + 15 = 0$$

$$6x^2 - 12x + 3 = 0$$

$$D = 144 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = 72 = (6\sqrt{2})^2$$

$$x_{1,2} = \frac{\pm 6\sqrt{2} + 12}{12}$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1;$$

$$y = 2\sqrt{2} + 2$$

$$x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1;$$

$$y = -2\sqrt{2} + 2$$

— не удовл. усл. $x \geq 1$

$$\text{Проверка } x = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1; y = 2\sqrt{2} + 2:$$

$$2\sqrt{2} + 2 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)(2\sqrt{2} + 2)} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 2 + 2$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\text{Ответ: } (0; 1); \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1; 2\sqrt{2} + 2\right)$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1-x = \sqrt{x^2 + x - 2x - x - 1 + 2} = \sqrt{(x-1)^2}$$

$$2x-2 = \sqrt{4x^2 - 2x - 2x - 4x + 2 + 2} = \sqrt{4x^2 - 8x + 4} = 2\sqrt{x-1}$$

$$2x^2 + x^2 + 2x + 1 - 4x - 4x - 4 + 3 = 0$$

$$3x^2 - 6x = 0 \quad 2(x-1) \geq 0$$

$$3x(x-2) = 0 \quad x > 1$$

$$x=2; y=3 \quad \emptyset$$

$$x=0; y=7 \quad \oplus$$

$$2x^2 + 16x^2 - 16x + 4 - 4x - 16x + 8 + 3 = 0$$

$$18x^2 - 36x + 15 = 0$$

$$6x^2 - 12x + 3 = 0$$

$$D = 144 - 4 \cdot 6 \cdot 3 = 72 = (6\sqrt{2})^2$$

$$x_{1,2} = \frac{\pm 6\sqrt{2} + 12}{12}; \quad x_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{2} + 2}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1; \quad y = 2\sqrt{2} + 2 \quad \oplus$$

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1; \quad y = -2\sqrt{2} + 2 \quad \ominus$$

$$-2\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} - 2 = -\sqrt{2} \quad \ominus$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)(2\sqrt{2} + 2) - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2} - 2 + 2 = 2 + \sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2 - 3\sqrt{2} =$$

$$= 4$$

$$2\sqrt{2} + 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 = \sqrt{2} + 2$$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a; b = qa; c = q^2 a$$

$$x_1 = q^3 a$$

$$ax^2 + 2qax + q^2 a = 0$$

$$x^2 + 2qx + q^2 = 0$$

$$x_1 = -q; x_2 = q^3 a$$

$$-q^4 a = q^2$$

$$q^2(1 - q^2 a) = 0$$

$$q^2 a = 1$$

$$-a + q^3 a = 2qa$$

$$-a + q^3 a + 2qa = 0$$

$$-a(1 - q^2 a - 2a) = 0$$

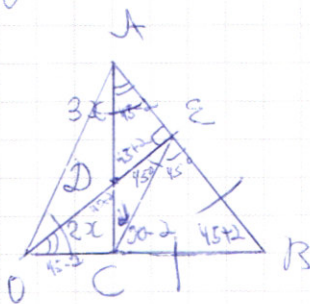
$$q^3 a = 1$$

$$-a + q^3 a = -2qa$$

$$q(q^3 a + 1) = 0$$

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BO}{CO} \cdot \frac{CD}{AD} = 1$$

$$\frac{2AE \cdot BO}{3EB \cdot CO} = 1$$



$$\frac{CB \cdot CO}{AC \cdot CO} = \frac{AD}{CO}$$

$$\frac{CB}{5x} = \frac{2x}{CO}$$

$$CB \cdot CO = 10x^2 = AC \cdot AD$$

$$y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}$$

$$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

$$2x(x-4) + (y-1)(y-3) = 0$$

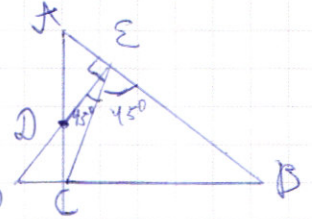
$$4x^2 + y^2 - 4xy = xy - 2x - y + 2$$

$$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

$$4x^2 + y^2 - 5xy + 2x + y - 2 = 0$$

$$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

$$2x^2 - 5xy + 6x + 5y - 5 = 0$$



$$BO \cdot CO = EB \cdot DO$$

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

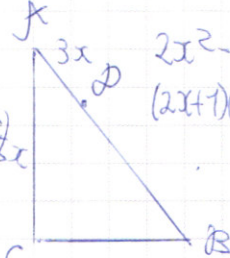
$$D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$$

$$= \frac{\pm 3 + 1}{4}; x_1 = 1; x_2 = 0,5$$

$$x \in (-\frac{1}{4}; 0,5)$$

$$\frac{OE}{EB} = \frac{OC}{CB}$$

$$BO \cdot CO = EB \cdot DO$$



$$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq 1 - x$$

$$(2x+1)(x-1) \leq ax + b \leq 1 - x$$

$$q^3 a + q = 0$$

$$q(q^2 a + 1) = 0$$

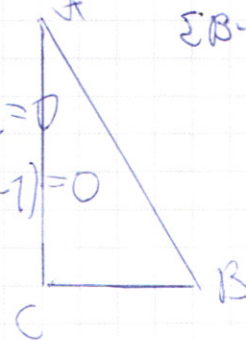
$$\frac{BO \cdot CO \cdot AC \cdot AD}{EB \cdot AD \cdot CB \cdot DO} = 1$$

$$\frac{OC}{CB} \cdot \frac{AB}{AE} \cdot \frac{ED}{DO} = 1$$

$$q^6 a^2 + 2q^4 a^2 + q^2 a = 0$$

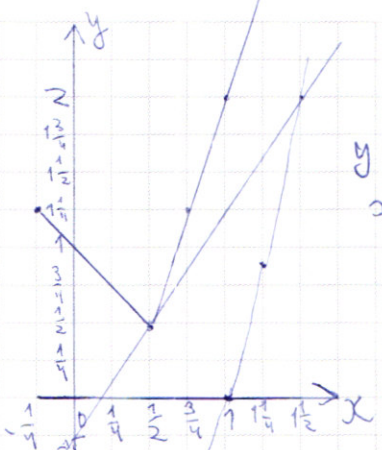
$$\frac{OE}{EB} = \frac{OC}{CB} \quad q^2 a(q^4 a + q^2 a + 1) = 0$$

$$\frac{OE}{AE} = \frac{CB}{AC} = \frac{BE}{DE} = \frac{OC}{CO}$$



$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BO}{CO} \cdot \frac{CD}{AD} = 1$$

$$\frac{ED}{CB} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

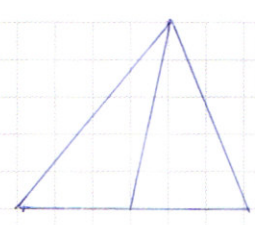


$$x \in [\frac{1}{4}, 0,5] - 1-x$$

$$y = 1 - 3x$$

$$x \in [0,5, 1,5] - 3x - 1$$

$$y = 3x - 1$$



207 | 402
202

~~399 | 198~~

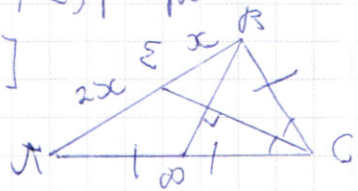
299 598 303

300600300

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

$$f(p) = p/2, p - \text{периметр}$$

$$f(2) = [1]$$



$$y^2 - 4xy + 4x^2 - xy + 2x + y - 2 = 0$$

$$y^2 + 2x^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 - xy + 2x + y - 2 = 0$$

$$y^2 + 2x^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

$$y^2 + 4x(x-y) + (1-x)(y-2) = 0$$

$$y^2 + 2x^2 - 4(x-y) + 3 = 0$$

$$(y-2x)^2 - (x-1)(y-2) = 0$$

$$y(y-4) + (x-1)(x-3) + x^2 = 0$$

$$y = 2x$$

$$(y-2-2x+2)^2 - (x-1)(y-2) = 0$$

$$(y-2-2(x-1))^2 = (x-1)(y-2)$$

$$(y-2)^2 - 4(x-1)(y-2) + 4(x-1)^2 = (x-1)(y-2) = 0$$

$$(y-2)^2 - 5(x-1)(y-2) + 4(x-1)^2 = 0$$

$$-4k - tk = -5kt$$

$$t - 2k = \sqrt{tk}$$

$$t^2 - 4k + 4k^2 - tk = 0$$

$$t(t-k) - 4k(t-k) = 0$$

$$y-2-2(x-1) = \sqrt{(y-2)(x-1)} \quad (y-2-2(x-1))^2$$

$$t - 4k = 0 \text{ или } t \cdot k = 0$$

$$y-2 = 4x-4$$

$$y-2 = x-1$$

$$y = 4x-2$$

$$y = x+1$$

$$f(D) = \frac{3}{\sqrt{D}}$$

$$\angle + \angle AD = 90^\circ, \angle + \angle BPA = 75^\circ$$

$$\angle BPA - \angle CPA = 90^\circ$$

$$y-2 = t$$

$$x-1 = k$$

