МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

Дано: (b') - геом. прогр., $b_1' = a$, $b_2' = b$, $b_3' = c$,

b_4' - корень $ax^2 - 2bx + c = 0$

Найти: b_3'

Решение: 1) пусть $b_1' = a$, $b_2' = a \cdot q = b$, $b_3' = aq^2 = c$, $b_4' = aq^3$,

где q - знаменатель геом. прогр.

2) $ax^2 - 2bx + c = 0$ (1)

$\frac{D}{4} = b^2 - ac = a^2q^2 - a \cdot a^2 \cdot q^2 = 0$

$\frac{D}{4} = 0$, $D = 0$ $\Rightarrow$ ур-е ~~ие~~ (1) имеет 1 кор.

3) $ax^2 - 2bx + c = 0$

$b_4' = x = \frac{b}{a} = \frac{a \cdot q}{a} = q$.

$b_4' = q$; $aq^3 = q \Leftrightarrow \cancel{aq^2} \neq 1$ $aq^3 - q = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow q(aq^2 - 1) = 0$

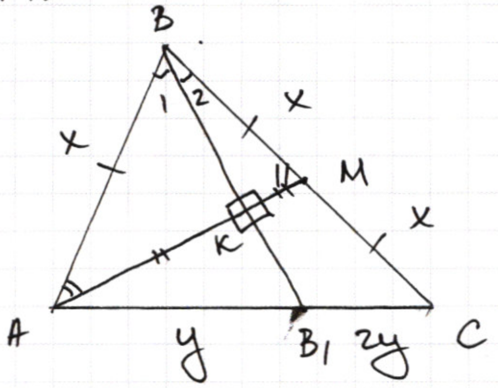
$\left[\begin{array}{l} q = 0 \\ aq^2 = 1 \end{array}\right.$

по условию $q \neq 0$, значит $aq^2 = 1 = c$

$b_3' = aq^2 = 1 = c$

Ответ: третий член $b_3' = 1$

№2



Дано: $\triangle ABC$, AM - мед, BB_1 - бис.,
$AM \perp BB_1$, $AM \cap BB_1 = K$, $P_\triangle = 900$, $AB \in \mathbb{Z}$, $BC \in \mathbb{Z}$, $AC \in \mathbb{Z}$

Найти: кол-во возм. тр-ков

Решение: 1) $BB_1 \perp AM \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle ABK$ и $\triangle BKM$ - п/у

2) BB_1 - бис $\Rightarrow \angle 1 = \angle 2$; BK - общ. $\Big\} \Rightarrow \triangle ABK = \triangle KBM$ (по кат. и углу) $\Rightarrow AB = BM$

3) Пусть $AB = x$, $BC = 2x$

4) BB_1 - бис $\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AB_1}{B_1C} = \frac{1}{2}$, тогда $AB_1 = y$, $B_1C = 2y$

5) $P_\triangle = 3(x+y) = 900 \Leftrightarrow x+y = 300$

6) в тр-ке

$AB < AC + BC \Leftrightarrow x < 3y + 2x \Leftrightarrow x > -3y$

$AC < AB + BC \Leftrightarrow 3y < 3x \Leftrightarrow x > y$

$BC < AB + AC \Leftrightarrow 2x < x + 3y \Leftrightarrow x < 3y$

7) т.к. x и y - отрезки, $x>0$, $y>0$, то из п.6 $\Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} x > y \\ x < 3y \end{cases} \Leftrightarrow y < x < 3y$

8) $\begin{cases} x + y = 300 \\ y < x < 3y \end{cases}$

$x = 300 - y$; $y = 300 - x$

$y < 300 - y < 3y \Leftrightarrow 75 < y < 150$

$75 < 300 - x < 150 \Leftrightarrow 150 < x < 225$

9) $\begin{cases} 75 < y < 150 \\ 150 < x < 225 \end{cases}$

с учетом того, что $x + y = 300$ и $x \xrightarrow{ед.} y$
(можно устан. взаимнооднозн. соотв.) И всего пар чисел x и y
$150 - 75 - 1 = 74$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

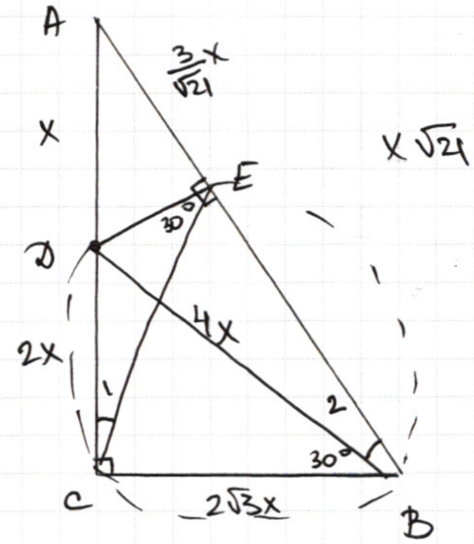
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

Ответ: 74.

№4



Дано: $\triangle ABC$ – прямоуг, $D \in AC$ – кат, $E \in AB$ – гип, $AD : AC = 1:3$, $DE \perp AB$, $\angle CED = 30°$, $AC = \sqrt{7}$

Найти: а) $tg\angle BAC$

б) S_{CED}

а) Решение: 1) т.к $AD:AC = 1:3$, то $AD = x$, $DC = 2x$, $AC = 3x$

2) $\angle DEB = \angle DCB = 90°$ ($DE \perp AB$) и опир. на DB $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ около $DEBC$ можно опис. окр.

3) $\angle DEC = \angle CBD = 30°$ и $\underset{(\angle 1 = \angle 2)}{\angle DCE = \angle DBE}$, т.к. впис. и опир. на одну дуги $\smile DC$ и $\smile DE$ соотв.

4) $\triangle DCB$ – п/у, $\angle CBD = 30° \Rightarrow DB = 2DC = 4x$; $CB = DC \cdot ctg\angle DCB$

$CB = 2\sqrt{3}x$

5) $\triangle AEC \sim \triangle ADB$ ($\angle A$ - общ, $\angle 1 = \angle 2$ (п. 3)) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{EC}{DB} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AE = \frac{AD \cdot AC}{AB} = \frac{x \cdot 3x}{AB}$

6) $\triangle ACB$ – п/у $\Rightarrow$ по т. Пиф $AB = \sqrt{9x^2 + 4 \cdot 3x^2} = \sqrt{21x^2} = x\sqrt{21}$

7) из п. 5, 6 $\Rightarrow AE = \frac{3x^2}{AB} = \frac{3x^2}{x\sqrt{21}} = \frac{3x}{\sqrt{21}}$

8) $\triangle ADE$ – п/у $\Rightarrow$ по т. Пиф. $DE = \sqrt{x^2 - \frac{9x^2}{21}} = \sqrt{\frac{12x^2}{21}}$ $\frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{21}} = \frac{2x}{\sqrt{7}}$

9) $tg\angle BAC = tg\angle EAD = \frac{DE}{AE} = \frac{2x \cdot \sqrt{21}}{\sqrt{7} \cdot 3x} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}$

N 4

б) 1) по т. синусов для $\triangle CDE$ $\frac{CE}{\sin\angle CDE} = 2R$

2) по т. син. для $\triangle CEB$

$\frac{CE}{\sin\angle EBC} = 2R$

$\sin\angle EBC = \frac{AC}{AB} = \frac{3x}{x\sqrt{21}} = \frac{3}{\sqrt{21}}$

$2R = DB = 4x$, т.к. $\angle DEB = 90^\circ$ и опир. на $\cup DB$

$CE = 4x\cdot\frac{3}{\sqrt{21}} = \frac{12x}{\sqrt{21}}$

3) из п1,2 $\Rightarrow$ $\sin\angle CDE = \frac{CE}{2R} = \frac{12x}{\sqrt{21}\cdot 4x} = \frac{3}{\sqrt{21}}$

4) $S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} CD\cdot DE\cdot\sin\angle CDE = \frac{1}{2}\cdot 2x\cdot\frac{2x}{\sqrt{7}}\cdot\frac{3}{\sqrt{21}} = \frac{6x^2}{7\cdot\sqrt{3}}$

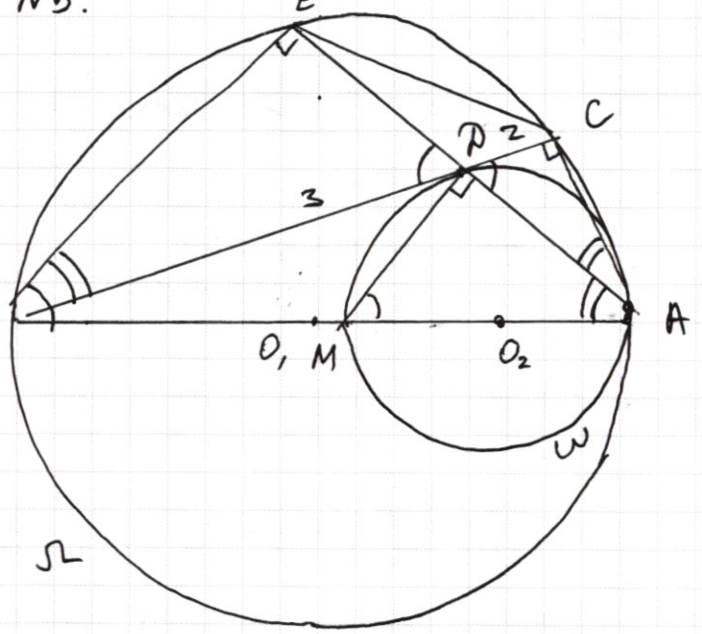
5) $AC = 3x = \sqrt{7} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

6) $S_{\triangle CDE} = \frac{6x^2}{7\cdot\sqrt{3}} = \frac{6\cdot 7}{9\cdot 7\cdot\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{9\cdot 3} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

Ответ: а) $tg\angle BAC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

б) $S_{CDE} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

N5.



Дано: Ω и ω – окр,

$\Omega \cap \omega = A$, AB – диам Ω,

BC – хорда ~~ω~~ Ω кас

ω в D, $AD \cap \Omega = \{A, E\}$,

CD = 2, BD = 3

Найти: R – радиус Ω

r – радиус ω

S_{BACE}

Решение: 1) $\angle BEA = \angle BCA = \angle MDA = 90^\circ$,

т.к. опир. на диаметры ($M \in AB$, AB – линия центров)

2) $BE \perp EA$, $MD \perp EA \Rightarrow \angle EBA = \angle DMA = \alpha$, $\angle BAE = \beta$, $\alpha + \beta = 90^\circ$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5

3) BC - кас к ω, DA - хорда $\Rightarrow \angle CDA = \angle DMA = \alpha$

4) $\angle CDA = \angle EDB = \alpha$ (т.к. верт) $\Rightarrow \angle EBD = \beta$ из $\triangle EBD$ - прямоуг.

5) $\angle EBC = \angle EAC = \beta$ - вписс и опир на $\cup EC$

6) из $\triangle BCA$ - п/у : ~~tg2β~~ $\cancel{\frac{BC}{AB}} = \cancel{\frac{BC}{AC}}$

$\frac{BC}{D} = \sin 2\beta \Leftrightarrow \frac{5}{D} = \sin 2\beta$ (1), D - диаметр Ω
d - диаметр ω

$AC = D \cdot \cos 2\beta$

из $\triangle DCA$ - п/у : $DC = 2 = AC \cdot tg\beta = D \cdot \cos 2\beta \cdot tg\beta \Rightarrow$

$D = \frac{2}{\cos 2\beta \, tg\beta}$ (2)

(2) подстав в (1):

$\frac{5}{2} \cdot \cos 2\beta \cdot tg\beta = \sin 2\beta$

$\frac{5}{2} \frac{1-tg^2\beta}{1+tg^2\beta} tg\beta = \frac{2tg\beta}{1+tg^2\beta}$

$5tg\beta - 5tg^3\beta = 4tg\beta \quad | : tg\beta, \ tg\beta \neq 0$

$5tg^3\beta = tg\beta$

$5tg^2\beta = 1$

$tg\beta^2 = \frac{1}{5}$

$tg\beta = \frac{1}{\sqrt5}$, т.к. β - острый, то $tg\beta = \frac{-1}{\sqrt5}$ - не подходит

7) $\sin 2\beta = \frac{2tg\beta}{1+tg^2\beta} = \frac{\frac{2}{\sqrt5}}{1+\frac15} = \frac{\frac{2\cdot5}{\sqrt5}}{6} = \frac{\sqrt5}{3}$

$D = \frac{BC \cdot 3}{\sqrt5} = \frac{5}{\sqrt5} \cdot 3 = 3\sqrt5 \Rightarrow R = \frac{D}{2} = \frac{3\sqrt5}{2}$ - радиус Ω

8) BD - кас $\Rightarrow BD^2 = BM \cdot BA = (D-d) \cdot D = 9$

$(3\sqrt5 - d) \cdot 3\sqrt5 = 9 \Leftrightarrow 3\sqrt5 d = 36 \Leftrightarrow d = \frac{12}{\sqrt5} = \frac{12\sqrt5}{5} \Rightarrow r = \frac{6\sqrt5}{5}$ радиус ω

N 5

9) $S_{BACE} = \frac{1}{2} BC \cdot EA \cdot \sin\alpha$

$BC = BD + DC = 3 + 2 = 5$

$EA = AB \cdot \cos\beta = D \cdot \cos\beta = 3\sqrt{5}\cos\beta$

$S_{BACE} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3\sqrt{5} \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha = \frac{15\sqrt{5}}{2}\cos^2\beta$ т.к. $\alpha + \beta = 90°$

$1 + tg^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta}$

$1 + \frac{1}{5} = \frac{1}{\cos^2\beta}$

$\cos^2\beta = \frac{1}{1+\frac{1}{5}} = \frac{5}{6}$

$S_{BACE} = \frac{15\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

Ответ: $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ – радиус Ω

$r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ – радиус ω

$S_{BACE} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

N3

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} & (1) \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow x - 6y = \sqrt{(y-1)(x-6)}$

(2) $\Leftrightarrow x^2 - 12x + 2(y^2 - 2y + 10) = 0 \Leftrightarrow (x-6)^2 + 2(y-4)(y+2) = 0$

квадратное ур-е отн x

$x = 6 \pm \sqrt{36 - 2y^2 + 4y - 20}$

$x = 6 \pm \sqrt{-2(y^2 - 2y - 8)}$

$y^2 - 2y - 8 \le 0 \Leftrightarrow (y-4)(y+2) \le 0$

$-2 \le y \le 4$

+ – + ; −2, 4, y

(2): $(x^2 - 12x + 36) + (2y^2 - 4y - 16) = 0 \Leftrightarrow (x-6)^2 + 2(y-4)(y+2) = 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$b_1 = a$, $b_2 = b$, $b_3 = c$, $b_4 = .$

геом пр.

$b_1 = aq$, $b_2 = aq^2$, $b_3 = aq^3$, $b_4 = aq^3$

$a = a$
$b = aq$
$c = aq^2 = 1$
$d = aq^3 = x$

d — 4 член

$ax^2 - 2bx + c = 0$

$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} = \frac{aq^2 \pm \sqrt{a^2q^4 - a^2q^4}}{a}$

$D = b^2 - ac = a^2q^2 - a \cdot aq^2 = 0 \Rightarrow$ 1 кор.

$b_4 = \frac{b}{a} \quad \frac{aq}{a} = q$

$b_4 = \frac{b}{a} = q$. $\quad b_4 = q$

$ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$ $\quad$ 1) x^2

$aq^2 - 2aqx + ax^2 = 0$

$q(aq^2 - 1) = 0$

$\boxed{aq^3 = q \quad aq^2 = 1}$

отн q

$\boxed{\text{Ответ: 1}}$

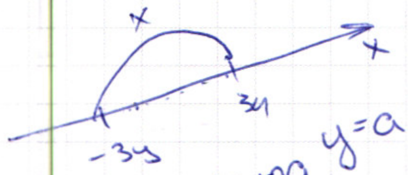
$q = \cancel{2ax} \frac{ax \pm \sqrt{a^2x^2 - a \cdot ax^2}}{a}$ $\quad q = x$

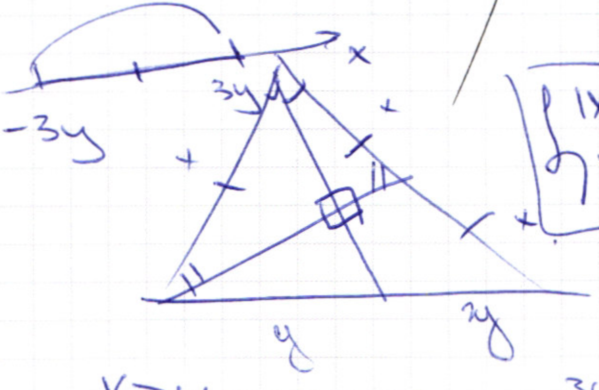
№2

$P = 900$ $\quad$ сторона целочисл.

$P = 3(x+y) = 900$

$x \ne 2a$ $\quad y = a$

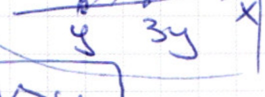




$\begin{cases} |x| < 3y \\ x > y \end{cases}$ $\quad x, y \in \mathbb{Z}$

$x + y = 300$

$\begin{cases} x > y \\ x < 3y \end{cases}$



$3x > 3y$ $\quad \boxed{x > y}$

$x > y$
$x < 3y$
$x > -3y$

$|x| < 3y$

$3y > -x$
$3y + 2x > x$
$\cancel{3y >} \cancel{x} \cdot 3$

$3y + x > 2x$
$3y > x$

$x > -3y$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} & (1) \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 & (2) \end{cases}$$

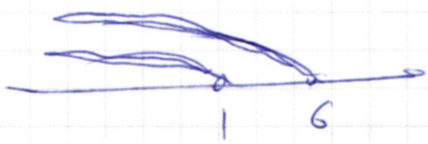
$\frac{2ab}{a+b} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{a+b}{2} \geq$

$\geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

(1) $x-6y=$

$xy-6y-x+6 = x(y-1)-6(y-1)=(y-1)(x-6)$

$\begin{cases} y\geq 1 \\ x \geq 6 \end{cases}$ $\begin{cases} y \leq 1 \\ x \leq 6 \end{cases}$



$x=6,\ y=1$ $(1) = 6-6=0$

! (1) $x-6y=\sqrt{(y-1)(x-6)}$ $\forall \leq \frac{2(y-1)(x-6)}{y+x-7}$

(2) $x^2+2y^2-12x-4y+20=0$

$x^2-12x+36+y^2-2y+1+y^2-2y+1 \quad -18=0$

$(x-6)^2+(y-1)^2\cdot 2 \quad -18=0$

$(x-6)^2-2(y-1)^2=18$

$(x^2-12x+36)+2(y^2-2y\ \cancel{+16}^{\,8})=0$

! (2) $(x-6)^2+2(y-4)(y+2)=0$

$4+32$

$\begin{cases} x^2-12y+36y^2=(y-1)(x-6) \\ x\geq 6y \end{cases}$

$\cancel{4-}$ $1+16$

8

$4+4\cdot 16$ 8 $4\cdot 4$

$(x-6)^2$

$\cancel{y-8}$

-8^2

$4 \quad -2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

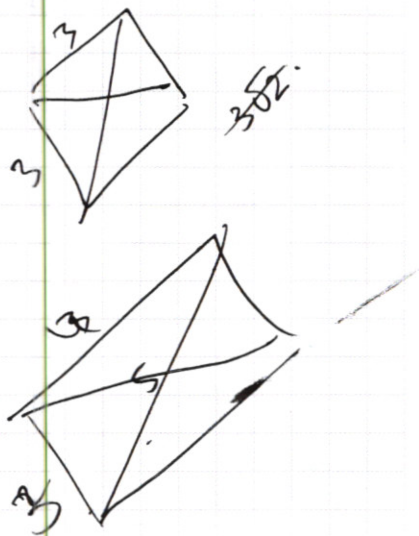
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$\begin{cases} x > y \\ x < 3y \end{cases}$ $x+y=300$

$y \quad 2y \quad 3y \quad x$

$x = 2y \quad 3y = 300 \quad y = 100$



№2

$x \geq 6y$!

1) $x^2 - 12y + 36y^2 = xy - 6y - x - 6 + 6$

$x^2 - 6y + 36y^2 + x - xy - 6 = 0$

$x^2 \qquad 36y^2 \qquad y(36y - x - 6)$

$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2 + 2(y-4)(y+2) = 0 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} y \geq 4 \\ y \leq -2 \end{array}\right.$

$4 - 40$

$x^2 - 12x + 2(y^2 - 2y + 10) = 0$

$(y-4)(y+2) \geq 0$

$x = 6 \pm \sqrt{36 - 2y^2 + 4y - 20}$

$-2 \quad 4$

$1 \qquad 4 \quad -8^2 \quad 4-2$

$\frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{2}x} \cdot 3 \quad \sqrt{2}$

$-(2y^2 - 2y - 16)$

$-2(y^2 - 2y - 8)$

$\sqrt{-2(y-4)(y+2)}$

$\boxed{-2 \leq y \leq 4}$

$\frac{3}{R} = tg\beta$

$\frac{2}{R} = \frac{1-tg^2\beta}{1+tg^2\beta} \cdot tg\beta$

$2 = \frac{1-tg^2\beta}{1+tg^2\beta} \cdot 3$

$\frac{2}{3} = \frac{1-tg^2\beta}{1+tg^2\beta}$

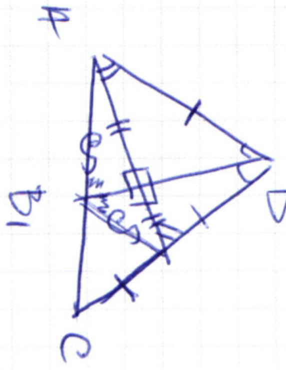
$2 + 2tg^2\beta = 3 - 3tg^2\beta$

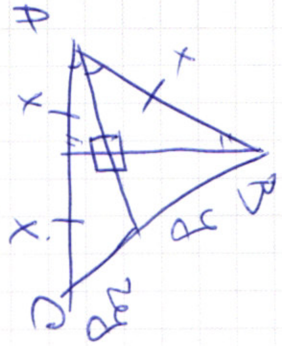
$1 = 5tg^2\beta$

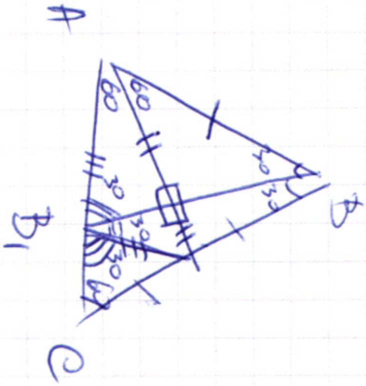
$tg^2\beta = \frac{1}{5}$

$\boxed{tg^2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}}$

$R = 3\sqrt{5}$







$15 > 12$

$3\sqrt{5} \quad \frac{12}{\sqrt{5}}$

№6.

$8x - 6|2x-1| \le ax + b \le -8x^2 + 6x + 7$

$-6 \quad -56$

$45 - 3\sqrt{5}d = 3$

$3\sqrt{5}d = 36$

$-8x^2 + 6x + 7 =$

$-3 \pm \sqrt{9+56}$

$5 \pm \sqrt{25 - 8 \cdot 13}$

$\frac{-7 \pm \sqrt{49-8}}{8}$

$8x - 6|2x-1| \le -8x^2 + 6x + 7$

$8x^2 + 2x - 6|2x-1| + 7 \le 0$

$x \ge \frac{1}{2}$ $\quad\varnothing$

$8x^2 + 2x - 12x + 6 + 7 = 0$

$8x^2 - 10x + 13 \le 0$

$x \le \frac{1}{2}$

$8x^2 + 2x + 12x - 6 + 7 = 0$

$8x^2 + 14x + 1 \le 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(x - \left(6+\sqrt{-2(y-4)(y+2)}\right)\right)\left(x - \left(6-\sqrt{-2(y-4)(y+2)}\right)\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 6+\sqrt{} \\ x = 6-\sqrt{} \end{array}\right. \qquad -2 \le y \le 4$$

$$(y-1)(x-6) = x^2 - 12xy + 36y^2$$

$x \geq 6y$

$$xy - \cancel{6y} - x + 6 = x^2 - 12xy + \cancel{36y^2}$$

$$36y^2 + 6y - 13xy + x^2 + x - 6 = 0$$

~~$36y^2 + 6y - 13y(6$~~

$x \geq 6y$

$y \geq -2 \quad y \le 4$

$-y \geq -4$

$x + y \geq 6y - 2$

$x \geq 5y - 2$

$x - y \geq 6y - 4$

$$\begin{cases} x \geq 7y - 4 \\ x \geq 5y - 2 \end{cases}$$

300

$x < 350$

$x > 50$

$+$

$150 < x < 225$

$75 < y < 150$

$x = 224 \quad 223 \quad 222 \quad 221 \quad 220 \quad 219 \quad \ldots \quad 151$

$y = 76 \quad y = 77 \quad y = 78 \quad 79 \quad 80 \quad 81 \quad 82 \quad 83 \quad \ldots \quad 149$

2

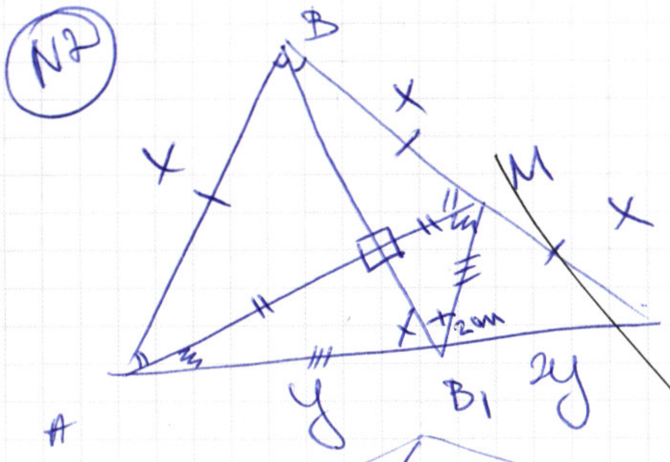
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№2



$180 - 11 - \cancel{m} + \cancel{2}m + 1\cancel{80} - 2 \cdot 1 - 11 - \cancel{m} = 1\cancel{80}$

$P = 900 = 3(x+y)$

$\boxed{x+y=300}$

$3x > 3y \qquad x > y$

$x + 3y > 2x \qquad x > -3y$

$2x + 3y > x \qquad x < 3y$

$x+y=300$

$x > y$

$\begin{cases} x+y=300 \\ y<x<3y \end{cases}$

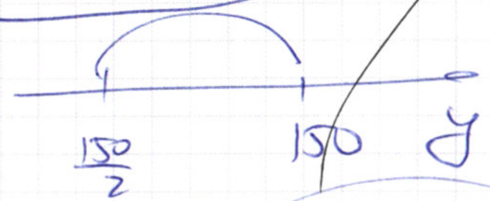
$\begin{cases} x>y \\ x<3y \end{cases}$

$\begin{cases} 150<x<225 \\ 75<y<150 \end{cases}$

$75 < 300 - x < 150$

$-225 < -x < -150$

$150 < x < 225$



$300 - y > y \qquad 300 > 2y$

$300 - y < 3y \qquad y < 150$

$4y > 300 \qquad y > \frac{150}{2}$

$225 < x+y < 375$

$75 < y < 150$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

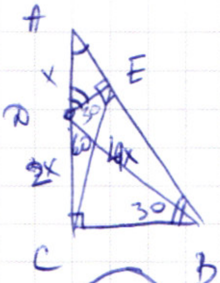
(заполняется секретарём)

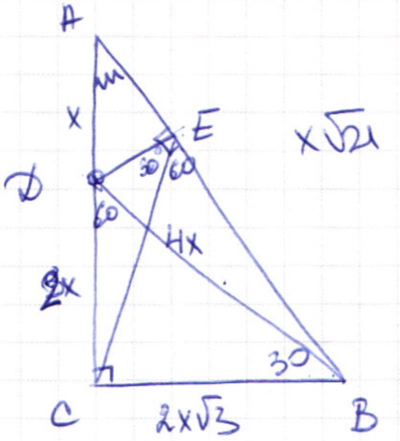
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1

308

$tg\angle BAC - ? = \frac{BC}{CA} = \boxed{\frac{DE}{AE}}$





$x\sqrt{21}$

$S = \frac{1}{3}$

$S' = \frac{9x^2}{21}$

$S' = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot \frac{3x}{\sqrt{21}} \cdot \frac{3}{\sqrt{21}}$

$S : \frac{x\sqrt{3}}{21}$

a) 1) $\triangle ADE \sim \triangle ABC$

$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$

2) $DEBC$ - впис

3) $\triangle AEC \sim \triangle ADB$

$\frac{AE}{AD} = \frac{EC}{DB} = \frac{AC}{AB}$

$\frac{AE}{x} = \frac{12x}{\sqrt{21}\,4x} = \frac{3}{\sqrt{21}}$

$AE = \frac{3x}{\sqrt{21}}$

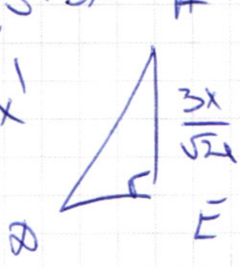
$3x$ $\quad 9x^2 + 12x^2 = 21x^2$

$\frac{CE}{\sin\angle B} = 4x$

$\frac{CE}{3x} \cdot \frac{x\sqrt{21}}{A} = 4x$ $\quad CE = \frac{12x}{\sqrt{21}}$

$x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$AC = 3x = \sqrt{7}x$



$\frac{21x^2}{21} - \frac{9x^2}{21}$

$\frac{12x^2}{21}$

$\frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{21}} = DE$

$tg\angle BAC = \frac{DE}{AE} = \frac{2\sqrt{3}x\sqrt{21}}{\sqrt{21}\,3x} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{3}}}$

б) $AC = \sqrt{7}$

$\frac{CE}{\sin\angle CDE} = 4x$ $\quad \frac{12x^{3}}{\sqrt{21}\sin\angle CDE} = 4x$

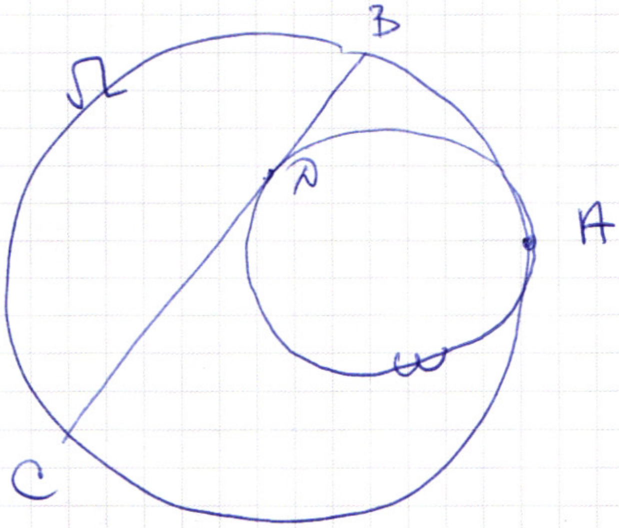
$S_{CDE} = \frac{1}{2} DE \cdot CD \cdot \sin\angle CDE$ $\quad \sin\angle CDE = \frac{3}{\sqrt{21}}$

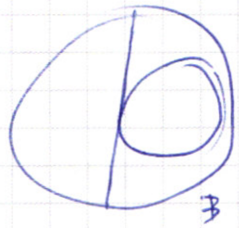
☑ черновик ☐ чистовик

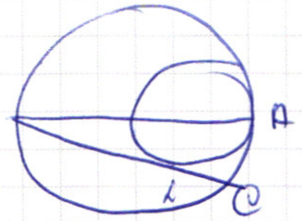
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)







$\frac{3}{R} = tg 2\beta$

$\frac{5}{R} = \sin 2\beta$

$AC = R\cos 2\beta$

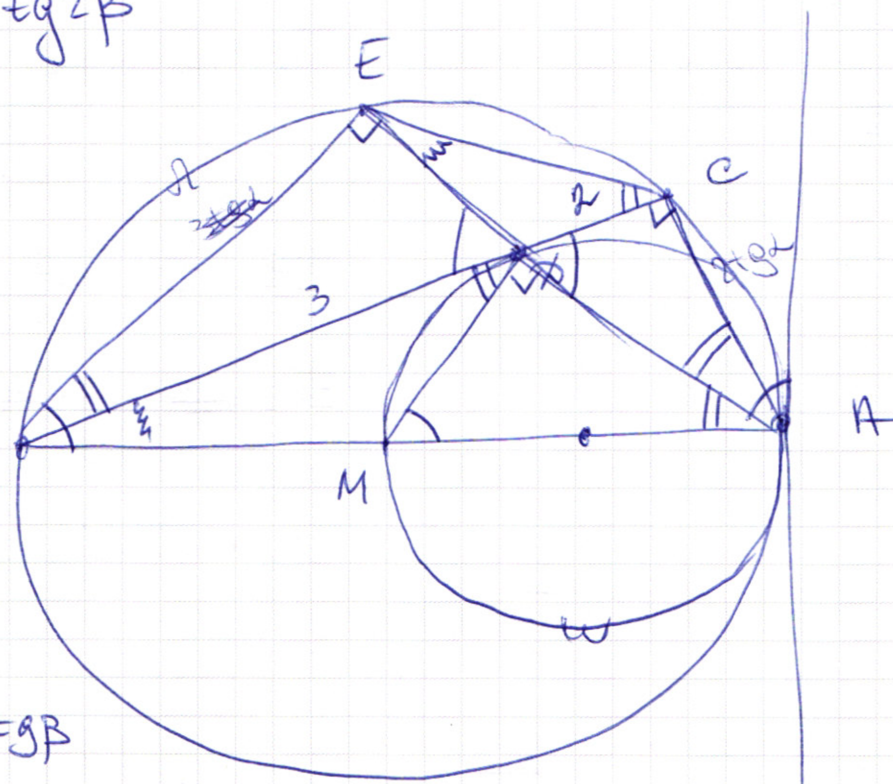
$DC = 2 = R \cdot \cos 2\beta \cdot tg\beta$

r - ?

S_{BACE}

$CD = 2$

$BD = 3$



$\frac{3}{R} = \Bigg| \begin{array}{l} \frac{5}{2} \cdot \cos 2\beta \, tg\beta = \\ = \sin 2\beta \end{array}$

$AC = R\cos 2\beta$

$DC = 2 = R \cdot \cos 2\beta \cdot tg\beta$

$\frac{3}{R} = tg\beta$

1) $\triangle DEB \sim \triangle DCA$

$\frac{DE}{DC} = \frac{EB}{CA} = \frac{DB}{DA}$

$ED \cdot DA = 6$

$\triangle BEA \sim \triangle MDA$

$\frac{BE}{MD} = \frac{EA}{DA} = \frac{BA}{MA} = \frac{D}{d}$

$\triangle DCA \sim \triangle MDA$

$\frac{DC}{MD} = \frac{CA}{DA} = \frac{DA}{MA}$

$\cancel{\frac{R \cdot DA}{d} = \frac{d \cdot EA}{D}}$

$\boxed{\frac{EA}{DA} = \frac{R}{r}}$

$BD^2 = (R - r) \cdot r = 9$

черновик ☑ чистовик ☐ (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)