МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x-1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

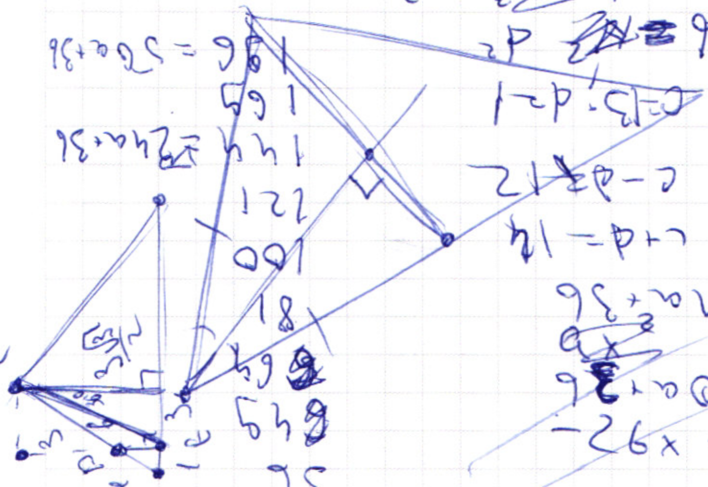
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$a \quad 7a \quad 900-3a$

$(4-6)^2 = 4$

$(c-d)^2 = 24a+36$

$(c+d)^2 = 50a+36$

$-26x+26=0$

$x-1=0$

$x=1$

$\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}$

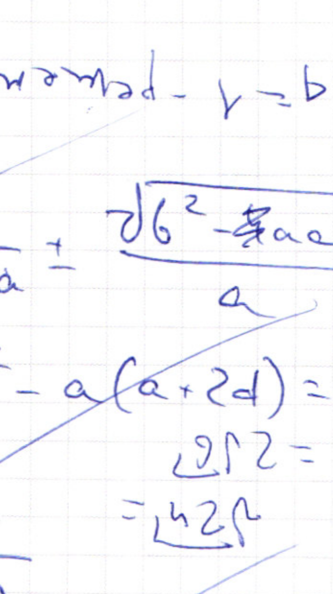
$(a+d)^2 - a(a+2d) =$

$= d^2$

$\frac{a+d}{2a} \pm \frac{d}{a}$

$\frac{a+3d}{2a} , \frac{a-d}{2a}$

$\frac{a+3d}{2a} =$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

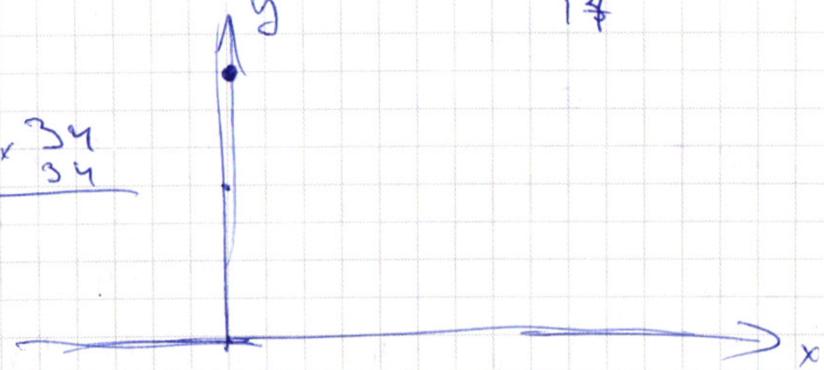
$34 - 18$

$\left(\frac{16}{13}\right)^2 + 2 = 18$

$\frac{34+18}{13} = \frac{52}{13}$

$16 - 12 \cdot 4 + 36 - 16 - 2 =$

$34^2 + 2 \cdot 13^2 = 34^2 + 2 \cdot 17 \cdot \frac{13^2}{17} =$



$\times\ \frac{34}{34}$

$13pq = 34q^2 + 18$

$p^2 + 2q^2 + 2\sqrt{2}pq = 18 + \frac{34q^2 + 18}{13} \cdot 2\sqrt{2}$

$(p + \sqrt{2}q)^2 = 18 + \frac{34q^2 + 18}{13} \cdot 2\sqrt{2}$

$p^4 + 4q^4 = 18^2 - 4p^2q^2$

$(p - 6q)^4 = (pq)^2$

$18^2 + 4 \cdot (p - 6q)^4 = p^4 + 4q^4$

$p = \sqrt{18}$

$q = p - 6q$ $\quad 40 + 25 + 3$

$q\ \sqrt{18} - 6q$

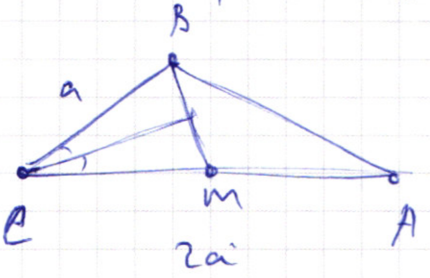
☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№2. Продолжение.

Теперь покажем, что в любом Δ таком, что в нём есть пара сторон a и $b=2a$, есть биссектриса, пер-нярная одной из медиан.

Рассмотрим ΔABC: $BC=a$; $AC=2a$; M — середина AC.



$CA=2a \Rightarrow$ ~~CM~~ (т.к. M середина AC) $CM=MA=a$

$CM=BC \Rightarrow$ в ΔCBM биссектриса из C пер-нярна $BM \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в изначальном ΔABC есть биссектриса, перпендикулярная одной из медиан.

Итак, ~~в качестве искомых т~~ множество всех искомых треугольников — множество всех треугольников со сторонами a; $2a$; $900-a$, где $a\in\mathbb{N}$, $900-a>0$

Неравенства Δ:

$$\begin{cases} a+2a>900-a \\ a+900-a>2a \\ 2a+900-a>a \end{cases}$$

~~(выполнено при всех $a\in\mathbb{N}$, т.к. т.к. $2a>a$, то $2a+900-a>2a$...)~~

(Последнее выполнено при всех $a\in\mathbb{N}$, т.к. $900+2a-a=900+a>a$)

$$\begin{cases} a+2a>900-a>0 \\ 900>2a \Leftrightarrow a<450 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a>900 \\ a<900 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a>900 \\ a<900 \\ a<450 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>225 \\ a<450 \end{cases},$$

при этом $a\in\mathbb{N}$, т.к. по условию $a\in\mathbb{Z}$ и a — сторона Δ.

Всего подходящих значений a ровно $450-225-1=225-1=224$, а значит, столько и есть требуемых треугольников.

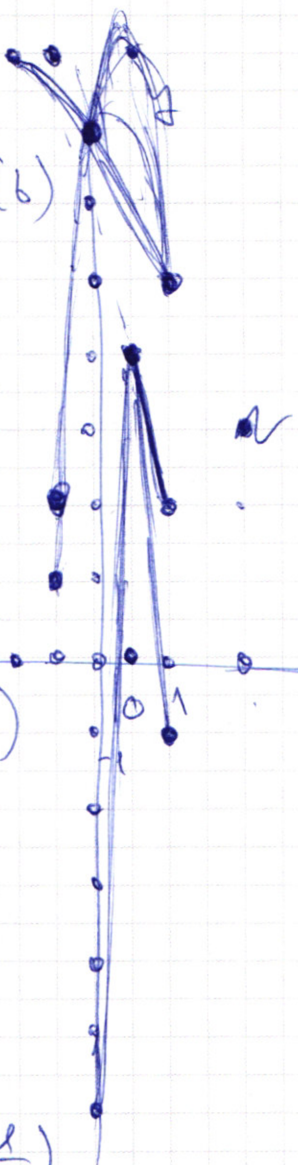
Ответ: 224

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(2)=1$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-$

$-f(y)$



$-8\cdot4+6\cdot2+7=$

$=-32+12+7=$

$=-20+7=-13$

$\cancel{8}$

$-2+3+7=$

$=8$

$-8+6+7=$

$=7-2=5$

$f(2)=f(2)+f(1)$

$\Downarrow$

$f(1)=0$

$\cancel{f\left(\frac{1}{2}\right)}$

$-8\cdot4+6\cdot2+7=$

$=-8\cdot4+8\cdot2-4+8-1=$

$=8-5=$

$=3$

$-8+6+7=$

$=5$

$f(1)=f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)$

$8x+12x-6=6-4x$

$0=f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Downarrow$

$8x+12x-6=$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-f(2)$

$=20x-6$

$-8+6+7=$

$=5$

$f(2)=1$ $(13)=6$ $f(4)=2$

$f(3)=1$ $(14)=4$

$f(5)=2$ $(15)=3$ $f(6)=2$

$f(7)=3$ $(16)=4$

$f(8)=3$ $(17)=8$

$f(9)=3$ $(18)=4$

$f(10)=3$ $(19)=9$

$f(11)=5$ $(20)=4$

$f(12)=3$ $(21)=4$

$(22)=6$

$f(12)=f(6)+f(2)=$

$=3$

$-2-3+7=2$

$f(p_1,\dots p_n)=\frac{[p_1]}{2}+\dots+\frac{[p_n]}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Пусть $a; b; c$ соответственно равны $a; ap; ap^2$, (т.к. a; b и c - члены геометрической прогрессии), где $a \neq 0; p \neq 0$. Тогда квадратное ур-е в условии можно записать в виде:

$ax^2 - 2apx + ap^2 = 0$; $a \neq 0$, на a можно разделить

$x^2 - 2px + p^2 = 0$

$(p-x)^2 = 0 \Leftrightarrow x = p$

~~$ap^3 = p$ $ap^2 = 1$~~ Четвёртый член прогрессии равен p.

С другой стороны, его можно записать в виде ap^3.

$ap^3 = p$

$(ap^2 - 1) \cdot p = 0$; $p \neq 0$ - т.к. знаменатель геом. прогрессии

$ap^2 - 1 = 0$

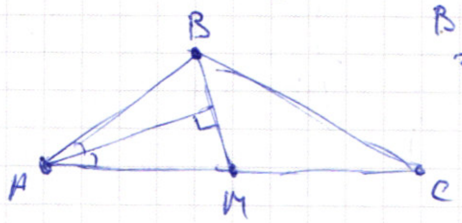
$ap^2 = 1$; но, $ap^2 = c$ - третий член прогрессии, искомый по условию.

Значит; $c = 1$.

Ответ: 1

№2.

Покажем, что если в Δ биссектриса пер-лярна одной из медиан, то в Δ есть пара сторон, одна из которых вдвое больше другой.



В ΔABM биссектриса из B пер-лярна BM, значит, ΔABM - равно~~сторонний~~бедренный, $AB = AM$

$AM = MC$ т.к. BM - медиана

$AC = AM + MC = 2AM = 2AB$

№5. Продолжение.

$AE = AD + DE = 2\sqrt{6} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot 5$

$BC = 5$

$S_{BACE} = \frac{AE \cdot BC \cdot \sin\angle ADC}{2}$ – площадь 4-угольника

$\sin\angle ADC = \frac{AC}{AD} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

$S_{BACE} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{5}}{4}$

Ответ: $r_\omega = \frac{6\sqrt{5}}{5}$; $r_\Omega = \frac{3}{2}\sqrt{5}$; $S_{BACE} = \frac{5}{4}\sqrt{5}$

№3.

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x^2 - 12x + 36) + 2(y^2 - 2y + 1) + 20 - 36 - 2\cdot 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6y)^2 = (x-6)(y-1) \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \\ x - 6y \geq 0 \end{cases}$$

Пусть $x - 6 = p$; $y - 1 = q$, тогда ур-я можно записать так:

$$\cancel{\begin{cases} (p-6q)^2 = pq \\ p^2 + 2q^2 = 18 \\ p - 6q \geq 0 \end{cases}}$$

$$\cancel{\begin{cases} (p-6q)^2 - p^2 - 2q^2 = pq - 18 \quad (I) \\ p^2 + 2q^2 = 18 \quad (II) \end{cases}}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} (p-6q)^2 = pq \\ p^2 + 2q^2 = 18 \end{cases} (*) \\ p - 6q \geq 0 \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5. Продолжение.

$AB = \frac{3}{2} AC = \frac{3}{2} \cdot 2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

AB - диаметр Ω, значит, $AB = 2r_\Omega$ и $r_\Omega = \frac{AB}{2}$;

$r_\Omega = \frac{3}{2}\sqrt{5}$

Пусть P - вторая точка пересечения AB и ω

Тогда AP - диаметр ω (если мы проведём общую касательную к ω и Ω в точке A, то $AB \perp l$ ~~$\Rightarrow$~~ [радиус, проведённый в точку касания перп-рен касательной, а прямая AB содержит этот радиус, т.к. является диаметром] $\Rightarrow AP \perp l \Rightarrow$ AP проходит через ~~...~~ центр $\omega \Rightarrow$ AP - диаметр)

$\angle ADP = 90^0$, т.к. $\angle CAD = \angle DAP$, то $\triangle ADP \sim \triangle ACD$ (~~значит~~ есть пара ~~общих~~ равных углов ($\angle CAD = \angle DAP$; $\angle ADP = \angle ACD = 90^0$), значит:

$\frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AP} \Rightarrow$ ~~$AP = \frac{AD^2}{AD}$~~ $AP = \frac{AD^2}{AC}$

По т. Пифагора для $\triangle ACD$:

$AD^2 = AC^2 + CD^2$; $AD^2 = (2\sqrt{5})^2 + 2^2 = 20 + 4 = 24 \Rightarrow AD = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$AP = \frac{24}{2\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$

$AP = 2r_\omega$ - диаметр

$r_\omega = \frac{AP}{2} = \frac{12}{2\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

$AD \cdot DE = CD \cdot BD$ - степень D отн. Ω

$DE = \frac{CD \cdot BD}{AD} = \frac{2 \cdot 3}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ ~~$= \frac{\sqrt{6}}{2}$~~

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№6. Продолжение

$8x - 12x + 6 \le 2x + 3$

$-4x + 6 \le 2x + 3$

$3 \le 2x + 4x$

$3 \le 6x$

$x \ge \frac{1}{2}$, полностью покрывает $[\frac{1}{2}; 1]$, значит, нер-во выполнено при всех x из $[\frac{1}{2}; 1]$

② Нер-во $8x - 6|2x-1| \le ax+6$ при $x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.

$x \le \frac{1}{2}$, модуль раскроем со знаком "−".

$8x + 12x - 6 \le 2x + 3$

$18x \le 9$

$x \le \frac{1}{2}$, покрывает весь $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}] \Rightarrow$ $\Rightarrow$ нер-во выполнено при всех x из $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$

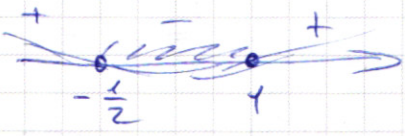
③ Нер-во $2x+3 \le -8x^2+6x+7$ на промежутке $[-\frac{1}{2}; 1]$;

$2x + 3 \le -8x^2 + 6x + 7$

$8x^2 - 4x - 4 \le 0$

$2x^2 - x - 1 \le 0$

$2(x-1)(x+\frac{1}{2}) \le 0$



$x \in [-\frac{1}{2}; 1]$, выполнено при всех x из промежутка.

Ответ: $(2; 3)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

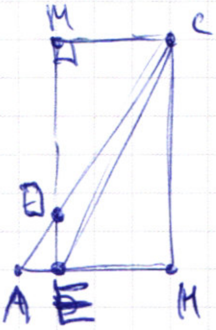
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4. Продолжение.

Пусть CM – высота к DE, тогда $CMEH$ – прямоугольник, ~~$CM = PH$~~ значит,

$CM = EH = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

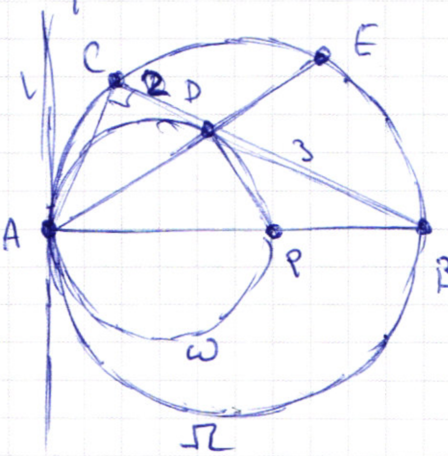


$S_{\triangle CED} = \frac{DE \cdot CM}{2}$, S_{CED} – площадь треугольника $\triangle CED$

$S_{\triangle CED} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{9}\sqrt{3}$

Ответ: $\frac{2}{9}\sqrt{3}$.

№5.



E – середина дуги $\smile BC$ из леммы Архимеда

$\Downarrow$

$\smile CE = \smile BE \Rightarrow \angle EAC = \angle EAB$ (вписанные, опир. на равные дуги)

$\Downarrow$

AD – биссектриса $\angle CAB$

$\Downarrow$

$\frac{CA}{AB} = \frac{CD}{BD}$ – свойство биссектрисы

$\Downarrow$

~~AB~~ $AB = CA \cdot \frac{BD}{CD} = \frac{3}{2} CA$

Так как AB – диаметр Ω, то $\angle ACB = 90^\circ$, как вписанный, опир. на диаметр

По теореме Пифагора для $\triangle ABC$:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow BC^2 = AB^2 - AC^2 = \left(\frac{3}{2}AC\right)^2 - AC^2 =$

$= \frac{9}{4}AC^2 - AC^2 = \frac{5}{4}AC^2$

$AC^2 = \frac{4}{5}BC^2 \Rightarrow AC = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot BC = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot (2+3) = 2 \cdot \sqrt{5}$.

№6.

~~Отметим, что~~ Предположим, требуемые а и b существуют.

В точках $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$ и 1 из неравенства следует:

$$-\frac{a}{2}+b \le -8\cdot\frac{1}{4}-6\cdot\frac{1}{2}+7=2 \qquad (1)$$

$$\frac{a}{2}+b \ge 8\cdot\frac{1}{2}-6\cdot\left|2\cdot\frac{1}{2}-1\right|=4 \qquad (2)$$

$$a+b \le -8+6+7=5 \qquad (3)$$

Складывая 1, 1 и 3, получим:

$$\left(-\frac{a}{2}\right)\cdot 2+2b+a+b \le 9$$

$$3b \le 9 \Rightarrow b \le 3$$

Складывая 2, 2 и вычитая 2, получим:

$$2\cdot\left(\frac{a}{2}+b\right) \ge 8 \; ; \; -a-b \ge -5$$

$$a+2b \ge 8 \; ; \; -a-b \ge -5$$

$$b \ge 3$$

$b \le 3$; $b \ge 3$, значит, $b=3$ - единственный возможный вариант.

$$-\frac{a}{2}+3 \le 2$$

$$\frac{a}{2}+3 \ge 4 \Rightarrow a \ge 2$$

$$a+3 \le 5 \Rightarrow a \le 2$$

$a \le 2$; $a \ge 2$, значит; $a=2$ - единств. возможный вариант

~~Проверим, что~~ Таким образом, единственная возможная пара $(a;b)$ - это $(2;3)$. Проверим, что она подходит

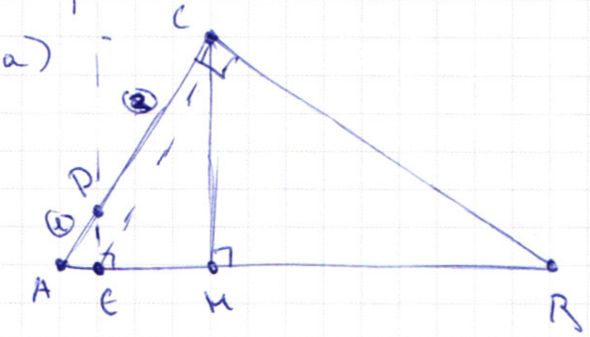
1. Неравенство $8x-6|2x-1| \le ax+b$ при $x \in$ ~~$\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$~~ $\left[\frac{1}{2};1\right]$; $x \ge \frac{1}{2}$, модуль раскрывается со знаком "+"

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.

а)



Пусть CH - высота к AB

$DE \perp AB$; $CH \perp AB$ =>

(т. Фалеса): $\frac{AE}{EH} = \frac{AD}{DC}$

$$\frac{AE}{EH} = \frac{AD}{AC-DA} = \frac{AD}{3AD-AD} = \frac{AD}{2AD} = \frac{1}{2}$$

$DE \perp AB$; $CH \perp AB \Rightarrow DE \parallel CH$,

значит, угол $\angle CED = \angle ECH$

$\angle ECH = 30^\circ$

$\frac{EH}{HC} = tg 30^\circ$ ($\triangle EHC$ - прямоугольный)

$$HC = \frac{EH}{tg 30^\circ} = EH \cdot \sqrt{3}$$

$$AH = HE + AE = EH + \frac{EH}{2} = \frac{3}{2} EH$$

$\frac{HC}{AH} = \frac{HE \cdot \sqrt{3}}{\left(\frac{3}{2} HE\right)} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, но, $\frac{HC}{AH} = tg\angle CAH = tg\angle CAB$,

значит, $tg\angle BAC = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

~~sin ∠HAC =~~

б) $AC^2 = AH^2 + HC^2$ - теорема Пифагора; $AC^2 = AH^2 + (AH \cdot tg\angle BAH)^2 = AH^2(1 + tg^2\angle CAH)$

$$AH^2 = \frac{AC^2}{1 + tg^2\angle CAH} = \frac{\sqrt{7}^2}{1 + \left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{7}{1 + \frac{4}{9}\cdot 3} = \frac{7}{1 + \frac{4}{3}} =$$

$$= \frac{3 \cdot 7}{3+4} = 3$$

$AH = \sqrt{3} \Rightarrow EH = \frac{2}{3} AH = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, ~~а CH = AH·tg∠CAH = …~~

$$AE = \frac{1}{3} AH = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$DE = AE \cdot tg\angle DAE = AE \cdot tg\angle CAB$ - определение тангенса

$$DE = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{2}{3}$$

№3. Продолжение.

I:

$p^2-12pq+36q^2-p^2-2q^2=pq-18$

$\cancel{36q^2-13pq-2q^2=18}$

$34q^2+18=13pq$

$p=\frac{34q^2+18}{13q}$

II:

$\left(\frac{34q^2+18}{13q}\right)^2+2q^2=18$

$\frac{34^2q^4+2\cdot34\cdot18q^2+18^2}{13^2\cdot q^2}+2q^2=18$

$34^2\cdot q^4+2\cdot34\cdot18q^2+18^2+2\cdot13^2\cdot q^4=18\cdot13^2\cdot q^2$

$\cancel{(34^2+2\cdot13^2)\cdot q^4-(2\cdot34\cdot18+18\cdot13^2)\cdot q^2+18^2=0}$

$(34^2+2\cdot13^2)\cdot q^4+(2\cdot34\cdot18-18\cdot13^2)\cdot q^2+18^2=0$

Заметим, что:

$34^2+2\cdot13^2+2\cdot34\cdot18-18\cdot13^2+18^2=$

$=34^2+2\cdot34\cdot18+18^2-16\cdot13^2=(34+18)^2-16\cdot13^2=$

$=52^2-16\cdot13^2=(4\cdot13)^2-16\cdot13^2=0$

~~Значит, $q^2=1$ - корень, $q=\pm1$, найдём второй корень из т. Виета:~~

Если $t=q^2$, то $t=1$ - корень и ур-е принимает вид

$(34^2+2\cdot13^2)t^2+(2\cdot34\cdot18-18\cdot13^2)\cdot t+18^2=0$

$t=1$ - корень, значит, второй корень можно найти из т. Виета:

$\cancel{t=\frac{18^2}{34^2+2\cdot13^2}}$ $t_1\cdot t_2=\frac{18^2}{34^2+2\cdot13^2}$

☑ черновик ☒ чистовик Страница № ~~7~~

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7. Примечание.

Покажем, что $f(x)$ из условия вообще существует.

~~$f(x)$~~ Положим $f(1)=0$; $f(p)=\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, где p - простое.

Для дроби x/y $(x; y \in \mathbb{N})$, ~~сок~~ сделаем её несократимой дробью ~~вы~~ $\frac{x_0}{y_0}$

Пусть $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = x_0$; $q_1 \cdot \ldots \cdot q_m = y_0$ - разложения x_0 и y_0 на простые (такие существуют и единственны с точностью до перестановки для всех чисел больших 1). Положим

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \cancel{f(p_i)} \sum_{i=1}^{n} f(p_i) - \sum_{j=1}^{m} f(q_j)$$

Из единственности разложения на простые следует, что $f\left(\frac{x}{y}\right)$ задано однозначно

Если ~~одно из них~~ $x_0 = 1$, положим

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = -\sum_{j=1}^{m} f(q_j)$$

Если $y_0 = 1$, положим

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)$$

Если $x_0 = y_0 = 1$:

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

Функция ~~требуемая~~ рассматриваемая по условию существует

Ответ: 181.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№3. Продолжение

Если $(p;q)$ удовлетворяет системе $\begin{cases}(p-6q)^2=pq\\ p^2+2q^2=18\end{cases}$, то и $(-p;-q)$ ~~будет~~ ей удовл.

$$\begin{cases}(-p+6q)^2=(-p)(-q)\\ (-p)^2+2(-q)^2=18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(p-6q)^2=pq\\ (p^2)+2q^2=18\end{cases}$$

При этом, либо $p-6q\geq 0$, либо $p-6q\leq 0$, так что, либо ровно одна пара из $(p;q)$ $(-p;-q)$ является решением изначальной системы, либо $p-6q=0$;

$pq=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}p=0\text{; тогда } -6q=0\text{; } q=0\\ q=0\text{; тогда } p=0\end{array}\right.$, значит $p=q=0$

$p^2+2q^2=0\neq 18$, не может быть.

Решим систему $(*)$:

$$\begin{cases}(p-6q)^2=pq\\ p^2+2q^2=18\end{cases}$$

$$\begin{cases}p^2-12qp+36q^2=pq\\ p^2+2q^2=18\end{cases}; \; p^2+36q^2=13pq$$

~~$2p^2+38q^2=13pq$~~

~~$32p^2+64q^2=18\cdot 32$~~

Заметим, что $p=-4$; $q=-1$ являются решениями системы: Действительно $p-6q=2>0$; $(p-6q)^2=2^2=(-4)\cdot(-1)$; $(-4)^2+2(-1)^2=16+2=18$.

$x=2$; $y=0$

~~Отв~~ Ответ: $(2;0)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7.

$$f(a) = f(a) + f(1)$$

$$f(1) = 0$$

$$f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$0 = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

Таким образом, условие задачи можно переформулировать так: сколько таких пар $(x;y)$ $[x; y \in \mathbb{N} : 2 \le x \le 22; 2 \le y \le 22]$, что $f(x) > f(y)$, будем называть такие пары искомыми.

~~Отметим, что либо $(x;y)$ искомая пара,~~ либо $(y;x)$ – иском.

Отметим, что либо $f(x) = f(y)$, либо ровно одна из пар $(x;y)$ $(y;x)$ – искомая.

Таким образом, можно свести задачу к следующей: найти все такие ~~$(x;y)$~~ пары $(x;y)$, что $f(x) = f(y)$ из целых $x;y$ из промежутка $[2;22]$ (такие пары назовём требуемыми).

~~Вла~~ Для этого найдём значения $f(x)$ для всех $x \in \mathbb{Z} \cap [2;22]$.

$f(2) = \lfloor \frac{2}{2} \rfloor = 1$ – простое

$f(3) = \lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 1$ – простое

$f(4) = f(2) + f(2) = 2$

$f(5) = \lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$ – прост.

$f(6) = f(2) + f(3) = 1 + 1 = 2$

$f(7) = \lfloor \frac{7}{2} \rfloor = 3$ – прост.

$f(8) = f(4) + f(2) = 2 + 1 = 3$

$f(9) = f(3) + f(3) = 2$

$f(10) = f(2) + f(5) = 3$

$f(11) = \lfloor \frac{11}{2} \rfloor = 5$ – прост.

$f(12) = f(6) + f(2) = 3$

$f(13) = \lfloor \frac{13}{2} \rfloor = 6$ – прост.

$f(14) = f(7) + f(2) = 4$

$f(15) = f(3) + f(5) = 3$

$f(16) = f(8) + f(2) = 4$

$f(17) = \lfloor \frac{17}{2} \rfloor = 8$ – прост

$f(18) = f(9) + f(2) = 3$

$f(19) = \cancel{f}\lfloor \frac{19}{2} \rfloor = 9$

Задача 7. Продолжение

$f(20) = f(4) + f(5) = 4$

$f(21) = f(7) + f(3) = 4$

$f(22) = f(11) + f(2) = 5 + 1 = 6$

~~f(x)~~ Напишем, при скольких x из $\mathbb{N} \cap [2; 22]$, $f(x)$ принимает каждое из значений

Значение	$f=1$	$f=2$	$f=3$	$f=4$	$f=5$	$f=6$	$f=7$	$f=8$	$f=9$	$f \geq 10$
кол-во x	2	4	6	4	1	2	0	1	1	0
кол-во пар	4	16	36	16	1	4	0	1	1	0

Кол-во требуемых пар можно найти ~~как п кол-во x) в квадрате (~~ кол-во x для каждого значения в квадрате. (Пусть кол-во x для значения α равно $n(\alpha)$, тогда для каждого из $n(\alpha)$ существует $n(\alpha)$ возможных соседей в пару, т.е. всего таких пар $(n(\alpha))^2$).

Всего требуемых пар $4 + 16 + 36 + 16 + 1 + 4 + 1 + 1 = 79$.

Всего пар 21^2, значит, таких пар $(x; y)$, что $f(x) \neq f(y)$ ровно

$21^2 - 79 = 441 - 79 = 362$

Из них искомыми (такими, что $f(x) > f(y)$) являются ровно половина (т.к. в парах $(x; y)$ $(y; x)$ либо $f(x) > f(y)$ и искомая — $(x; y)$, либо $f(y) > f(x)$ и искомая $(y; x)$, при этом, $f(x) \neq f(y) \Rightarrow x \neq y$ и ~~одна~~ ни одной пары $(x; x)$ нет среди этих 362), то есть $\frac{362}{2} = 181$

Ответ: 181