МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

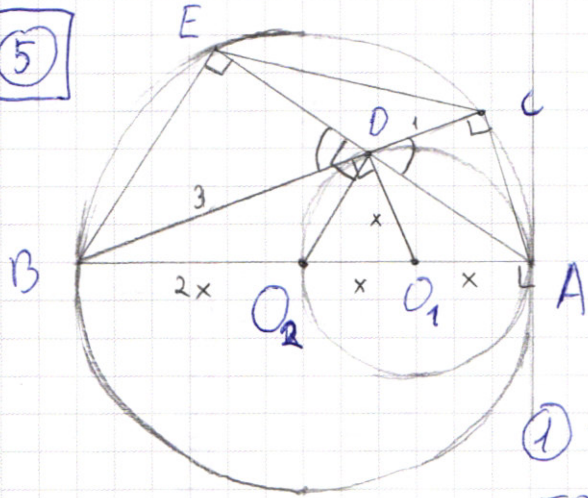
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5



Дано:

$BD=3$ BC - касат. к окр ω

$DC=1$ AB - диаметр Ω

A - точка касания ω и Ω

R - рад. окр. Ω r - радиу. окр ω

S_{BACE} -? r -? R -?

1) Т.к окружности касаются в одной точке то, через нее можно провести общую касательную к окр. $\Rightarrow$ радиусы и диаметры этих окружностей лежат на одной прямой, (т.к рад. $\perp$ касательной по свойств окр.)

2) Пусть ~~...~~ O_1 - ~~рас~~ центры окр ~~...~~ ω ~~...~~ O_2 - точка пересеч AB с окр ω $\Rightarrow$ O_1A - диаметр окр ω

3) 1) Т.к BC - касат. (по усл) $\Rightarrow$ $DO_1 \perp BC$ (по свойств. окр)

2) Т.к BA - диаметр, и $C \in$ окр. Ω $\Rightarrow$ $\angle BCA = 90°$ (по свойств окр)

Из 1) и 2) $\Rightarrow$ $BO_1 : O_1A = BD : DC = 3:1$ (по теореме фалеса) т.к $DO_1 \perp BC$ и $AC \perp BC$ (из (1))

4) Пусть $O_1A = x$, тогда $BO_1 = 3x$

Т.к O_2A - диаметр ω и O_1 - центр. окр ω, то $O_2O_1 = O_1A = x = r$

тогда $BO_2 = O_2A = 2x$, т.к $BA = BO_1 + O_1A = x + 3x = 4x$ и

~~B~~O_2 - ~~радиус~~ центр. окр Ω, т.к AB - диаметр, и $BO_2 = O_2A = R$

5) $BEA = 90°$, (по свойст. окр. т.к $E \in \Omega$ и AB - диаметр)

$O_2DA = 90°$ (аналогично для окр ω) $\Rightarrow \dfrac{BO_2}{O_2A} = \dfrac{ED}{DA} \Rightarrow$ (по теореме фалеса)

Из 5 и 4 $\Rightarrow ED = DA$

☐ черновик ☑ чистовик

Страница № 1

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

⑥ Рассм $\triangle BED$ и $\triangle ACD$

1) $\angle BDE = \angle ADC$ (по теор. о верт углах)

2) $\angle BEA = \angle ACD = 90^\circ$ (по доказ.)

$\Rightarrow \triangle BED \sim \triangle ACD$ (по приз. подобия)

$\Downarrow$

$\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{BD}{ED}$ (по свойт $\sim \triangle$)

$\Leftarrow$ $ED \cdot DA = BD \cdot DC$

т.к. $ED = DA$ (по док.)

и $BD = 3$ и $DC = 1$ (по усл)

$ED^2 = 3$

$ED = DA = \sqrt{3}$

$CA = \sqrt{DA^2 - DC^2}$ (по теор Пифагора) $CA = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$

⑦ $S_{BACE} = \dfrac{1}{2} EA \cdot BC \cdot \sin\angle CDA$ $\qquad \sin\angle CDA = \dfrac{CA}{DA} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$EA = ED + DA = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ (по док.), $BC = 4$

$\Rightarrow S_{BACE} = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{2}$

⑧ $4x = BA = \sqrt{BC^2 + CA^2}$ (по теор. Пифагора)

$4x = \sqrt{16 + 2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow x = r = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

$2x = R = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ (из ④ пункта)

Ответ: $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$, радиус окр. $\omega = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

радиус окр. $\Omega = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{1}$ Т.к a, b, c - подряд идущие члены геом прогрессии, то

пусть ~~разность~~ множитель прогр. $= q$, тогда $b = aq$

$c = aq^2$ (по опр. геом прогрессии)

$x = aq^3$ — Т.к x - четвертый член геом. прог.

$ax^2 + 2bx + c = 0$ ← подставим

$a(aq^3)^2 + 2\cdot aq\cdot aq^3 + aq^2 = 0$

$a^3q^6 + 2a^2q^4 + aq^2 = 0$

$aq^2(a^2q^4 + 2aq^2 + 1) = 0$ пусть $aq^2 = t$, тогда

$t(t^2 + 2t + 1) = 0 \Rightarrow t_1 = 0$, $t_2 = -1$ $\Rightarrow$ $t = aq^2 = c$ (то есть 3 член геом прогрессии)

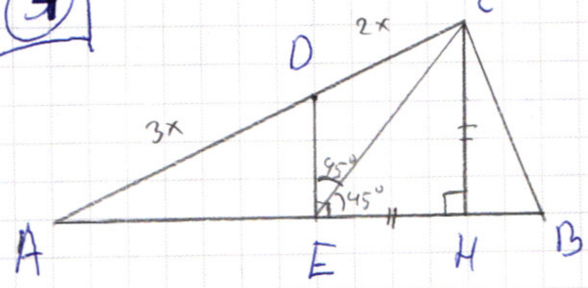
$D = 4 - 4\cdot 1 = 0$

$t_2 = \frac{-2}{2} = -1$

$c = -1$, т.к $c = 0$ не подходит, т.к тогда все члены геом. прог. равнялись бы 0

Ответ: -1

$\boxed{4}$



Дано:

$AD : AC = 3:5$

$DE \perp AB$

$\angle CED = 45^\circ$

$AC = \sqrt{29}$

а) $tg\angle BAC$ - ? б) $S_{\triangle CED}$ - ?

1) Т.к $AD : AC = 3:5$, пусть $AD = 3x$, тогда $DC = AC - AD = 2x$

2) Т.к $\angle DEB = 90^\circ$ (по усл.) и $\angle CED = 45^\circ$ (по усл.) $\Rightarrow \angle CEB = \angle DEB - \angle CED = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

3) Проведем высоту $CH \perp AB$, тогда из $\triangle EHC$, $\angle ECH = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow \triangle ECH$ - равнобедренный (по признаку равноб. $\triangle$) $\Rightarrow EH = HC$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

④ Т.к $\angle DEH = 90^\circ$ (по усл.) и $\angle EHC = 90^\circ$ (по постр.)

$\Downarrow$

$\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{EH}$ (по теореме Фалеса)

$\Downarrow$

$AE : EH = 3:2$, пусть $AE = 3y$, тогда $EH = 2y$

$\Downarrow$

$CH = 2y$, т.к $CH = EH$ (из 3 пункта)

⑤ $tg\angle BAC = \frac{CH}{AH} = \frac{2y}{5y} = \frac{2}{5}$
(по опр. tg)

⑥ $AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{25y^2+4y^2} = \sqrt{29}y$ $\Rightarrow$ $y = 1$, т.к $AC = \sqrt{29}$ (по усл)
(по теор. Пифагора)

~~$\sqrt{29}y = 5x$ т.к $AC = 5x$ (из пункта)~~

~~$DC = 2x = \frac{2\sqrt{29}}{5}$ т.к $AC = 5x = \sqrt{29}$~~ ~~$DC = 2x =$~~

⑦ $EC = \sqrt{EH^2 + CH^2} = \sqrt{4y^2+4y^2} = 2\sqrt{2}y = 2\sqrt{2}$, т.к $y=1$

⑧ $S_{\triangle CED} = \frac{1}{2} DE \cdot EC \cdot \sin\angle CED$ $= \frac{\sqrt{2}}{2}$, т.к $CED = 45^\circ$

$DE = AE\, tg\angle BAC$

$DE = 3y \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$, т.к $y = 1$

$S_{\triangle CED} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1 \cdot 6 \cdot 4}{4 \cdot 5} = \frac{6}{5} = 1,2$

Ответ: $tg\angle BAC = \frac{2}{5}$ $S_{\triangle CED} = 1,2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

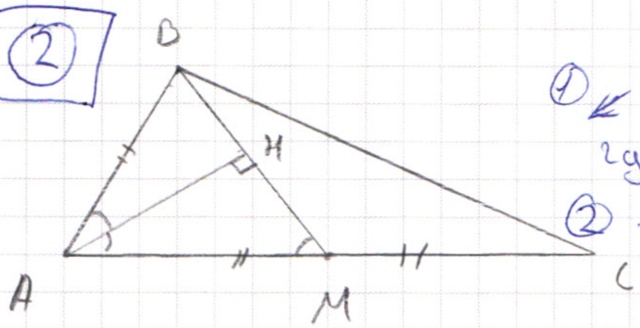
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{2}$



1) Нарисуем произвольный $\triangle ABC$, где медиана $BM \perp$ бисс. AH,

2) тогда $\triangle ABM$ – равнобедренный, (по признаку равноб треуг) т.к AH и высота и бисс.

3) $\Downarrow$

$AM = AB$ (по опр. равноб. треуг)

$AM = MC$ (по опр. медианы)

$\Downarrow$

$AB = AM = MC$, пусть $AB = AM = MC = x$, а $BC = b$

4) Тогда в каждом таком треугольнике одна из сторон x, вторая $2x$, а третья b, и периметр такого $\triangle$ $P_\triangle = 3x + b$

$$\begin{cases} P = 3x+b = 1200, \text{ где } \cancel{x} \\ b + x > 2x \\ b < x + 2x \end{cases}$$

(~~по условию построения~~, т.к есть сумма любых двух сторон в любом треуг, больше третьей стороны)

$\Rightarrow$ $P_\triangle$: $\begin{cases} 3x+b = 1200 \\ b > x \\ b < 3x \end{cases}$ $\Rightarrow$ $x > 200$, $x < 300$, т.к иначе нерав. $b > x$ и $b < 3x$ становятся неверными

при $x = 300$, $b = 300$, тогда $2x = 600$, тогда $x + b \not> 2x$

а при $x = 200$, $b = 600$, тогда $b \not< x + 2x$, т.к $600 \not< 600$

$\Leftarrow$

что $x \in [201; 299]$, при ~~$x \in$~~

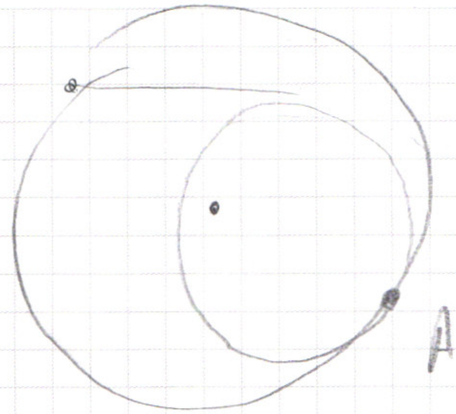
$\Downarrow$

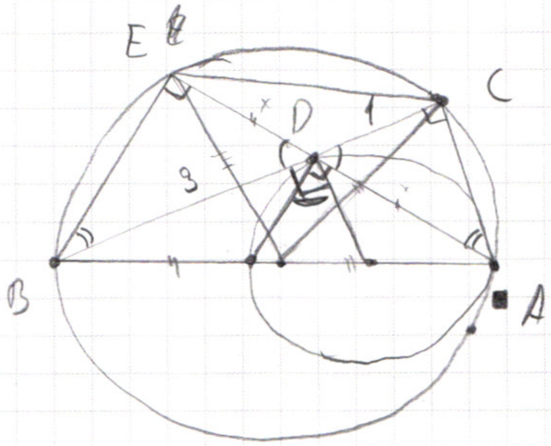
Количество целых $x = 99$

Ответ: 99

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

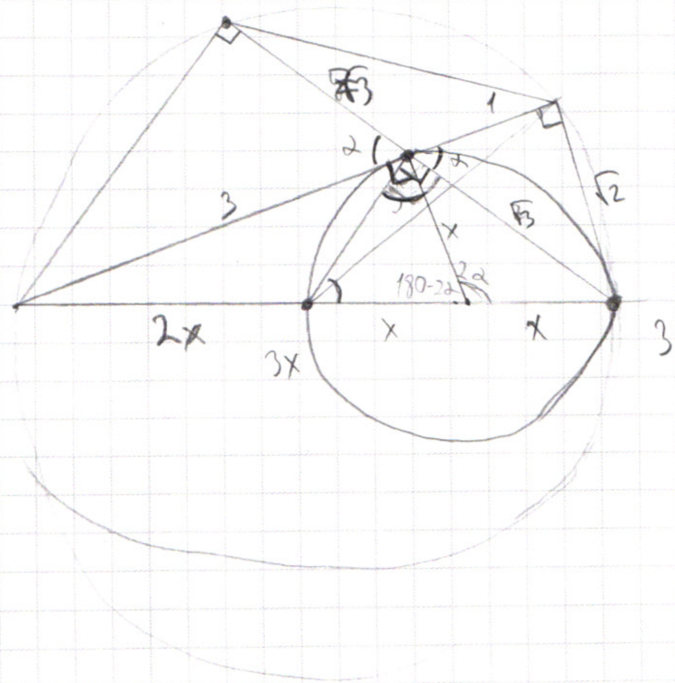
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$\frac{1}{x} = \frac{x}{3}$

$3 = x^2$ $\boxed{z = \sqrt{3}}$



$\frac{1}{z} = \frac{z}{3}$ $z = \sqrt{3}$

2 $S_{DABEC} = V$

$180 - 90 - 180 + 2\alpha$

$3 - 1 =$

$90 + 180 + 2\alpha = 90$

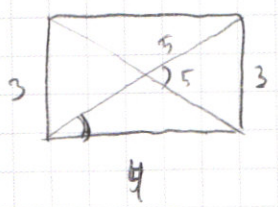
$-90 + 2\alpha$

$\beta + 180 - 2\alpha = 90$

$x = 298$

$2x = 596$

$b = 1200 - 894 = 306$



12

$25 \cdot \frac{24}{25} =$

$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$

$2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

$P = 1200 \quad = \quad 3x + b = 1200 \qquad b = \underline{1200 - 3x}$

$x = 300$

$b = 300$

$b + x > 2x \qquad b > x \qquad b > x$

$b < 3x \qquad b < 3x \qquad b < 3x \qquad 200 < x < 300$

600 600

$201;\ 299 \quad 99$

201 2 3 4 5

$y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}$

$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$

$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$

$4x^2 + y^2 - 5xy + 2x + y - 2 = 0$

$2x(x-2) + y(y-4) + 3 = 0$

$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$

$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$

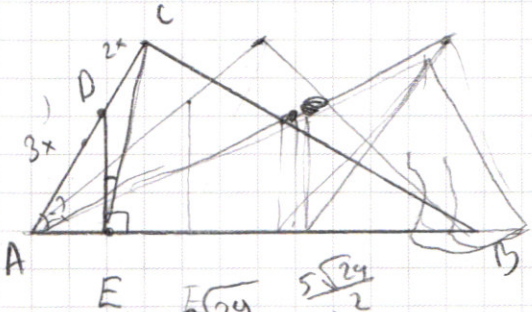
$2x^2 - 5xy + 6x + 5y - 5 = 0$

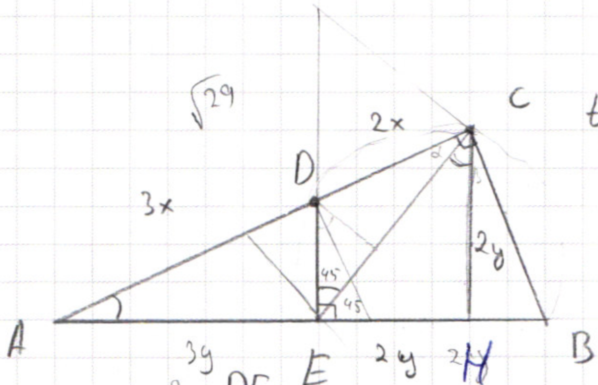
$2x^2 + 6x - 5 - 5y(x-1) = 0$

$2x(x$

$y^2 = -2x^2 + 4x + 4y + 3 = 5xy - 2x - y + 2 - 4x^2$

$2x^2 + 6x + 5y - 5xy + 1 = 0$

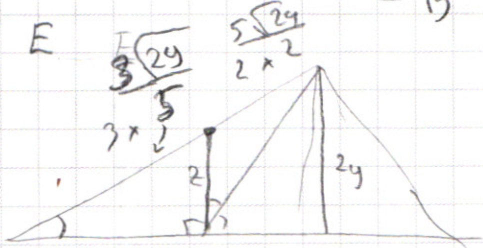




$\angle < CED = 45°$

$tg \angle BAC - ?$

$\frac{BC}{AC} - ?$



$\frac{DE}{AE} = tg$

$tg = \frac{2}{5}$

$\sin DAC = \frac{2}{5}$

$tg = \frac{\sin}{\cos}$

$\cos = \sqrt{1 - \frac{4}{25}} = \frac{21}{25} \quad \frac{\sqrt{21}}{5}$

$\frac{\frac{3\sqrt{29}}{5}}{2} =$

$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{21}}{5}} = \frac{2}{\sqrt{21}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$ax^2+2bx+c=0$

$D=4b^2-4ac=aq^2-4a^2q^2 q$

$x=$

$D=-3a^2q^2 \Rightarrow$ x - не имеет корней

a b c x
a aq aq² aq³

$\frac{x^2}{q^3}+$

$aq^6+2aq^4+aq^3=0$

$cq^4+2cq^2+cq=0$

$cq^3+2cq+c=0$ $\qquad q^3+2q+1=0$

$q(cq^2+2c)+c=0$

a b c x
a aq aq² aq³

$ax^2+bx+c=0$

$a^3q^6+aq\cdot aq^3+aq^2$

$a^3q^6 \; a^2q^4+aq^2=0 \qquad aq^2=t$

$t^3+t^2+t=0$

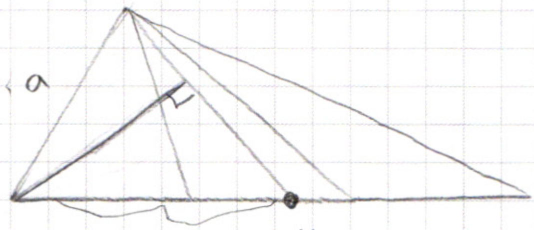
$t^2+t+1=0$

$D=1-4\cdot1\cdot\ldots$

297 = b

$\frac{1200-297}{3}=903$

301



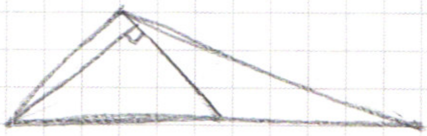
1002 : 3 = 334

198

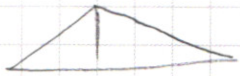
668

250
500 250

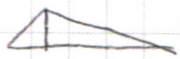
Otve=0
301
200
600 300
602



450
100 200
200 400 600



200 < x < 300



198
1002 1

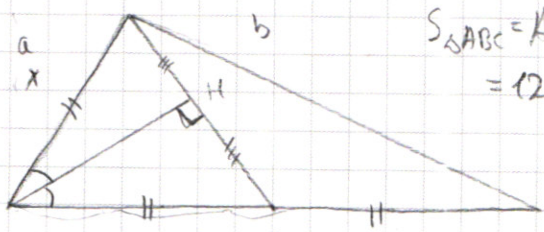
b : 3
200 < b < 300

$\frac{AC}{2}=AB$

AC = 2AB

303
897
299
598

$S_{\triangle ABC}=AH\cdot BM=1200$



$3x+b=1200$ $\quad 1\Rightarrow$ $\cancel{b}$ $\quad x=\frac{1200-b}{3}$

$b>x$ $\quad x=350$

$b<3x$

$3x+b$

$b>x$

$\cancel{b>2x-x}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)