МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 a, b, c, d - геом. прогрессия (d - четвертый ее член)

По св-ву геом. прогрессии о среднем геометрическом:

$$\boxed{b^2 = ac}$$

Рассмотрим ур-ие, корнем кот. является d:

$$ax^2 + 2bx + c = 0, \quad k = b$$

$$D_1 = k^2 - ac = b^2 - ac.$$

Т.к. по доказанному $b^2 = ac$, то $D_1 = 0$, уравнение имеет 1 корень

$$\boxed{d(x) = \frac{-k}{a} = \frac{-b}{a}} \quad (1)$$

Пусть знаменатель данной прогрессии q:

$\overset{a}{a} \quad \overset{b}{aq} \quad \overset{c}{aq^2} \quad \overset{d}{aq^3}$ - по определению геом. прогрессии.

$q = \frac{b}{a}$ - по определ. геом. прогрессии.

Тогда $\boxed{c\ (\text{третий ее член}) = a \cdot q^2 = a \cdot \frac{b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a}}$

Снова по св-ву геом. прогрессии: $c^2 = b \cdot d$, откуда

$\cancel{b} \neq \quad d = \frac{c^2}{b} = \left(\frac{b^2}{a}\right)^2 : b = \frac{b^4}{a^2 \cdot b} = \frac{b^3}{a^2} \quad (2)$

По условию d - корень ур-ие $ax^2 + 2bx + c$, значит, приравниваем правые части уравнений (1) и (2):

$$-\frac{b}{a} = \frac{b^3}{a^2}, \text{ откуда: } \frac{b^2}{a} = -1$$

по доказанному $\frac{b^2}{a}$ и есть третий член прогрессии

Ответ: -1.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1

(Нумеровать только чистовики)

№3 $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} & (1) \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0. & (2). \end{cases}$

(1): При усл-ии: $y-2x \geqslant 0$, $xy-2x-y+2 \geqslant 0$:

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

$y^2-5xy+y+4x^2+2x-2=0$ – решим как квадратное относительно y:

$y^2-(5x-1)y+(4x^2+2x-2)=0.$

$D=b^2-4ac=25x^2-10x+1-16x^2-8x+8=9x^2-18x+9=(3x-3)^2$

$y_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{5x-1+3x-3}{2}=4x-2$

$y_2=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{5x-1-3x+3}{2}=x+1.$

Итак, ур-ие (1) задает 2 прямые $y=x+1$; $y=4x-2$.

(2): $2x^2+y^2-4x-4y+3=0$

1 случай из ур-ия (1): $y=4x-2$:

$2x^2+(4x-2)^2-4x-4(4x-2)+3=0.$

$2x^2+16x^2+4-16x-4x-16x+8+3=0.$

$18x^2-32x-4x+15=0.$

$18x^2-36x+15=0 \quad |:3$

$6x^2-12x+5=0.$, $k=-6$

$D_1=36-30=6.$

$x_1=\dfrac{-k+\sqrt{D_1}}{a}=\dfrac{6+\sqrt{6}}{6}=1+\dfrac{\sqrt{6}}{6}$, $y_1=4x-2=\dfrac{{}^2\cancel{4}(6+\sqrt{6})}{\cancel{6}_3}-2=$

$=\dfrac{12+2\sqrt{6}}{3}-2=2+\dfrac{2}{3}\sqrt{6}.$

$x_2=\dfrac{-k-\sqrt{D_1}}{a}=\dfrac{6-\sqrt{6}}{6}=1-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$, $y_2=4x-2=\dfrac{{}^2\cancel{4}(6-\sqrt{6})}{\cancel{6}_3}-2=2-\dfrac{2}{3}\sqrt{6}.$

2 случай из ур-ия (1): $y=x+1$.

$2x^2+(x+1)^2-4x-4(x+1)+3=0.$

$2x^2+x^2+2x+1-4x-4x-4+3=0.$

$3x^2-6x=0,$

~~$D_1=k^2-ac=9-12<0$ – корней нет.~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Ответ: $(1+\frac{\sqrt6}{6}; 2+\frac{2}{3}\sqrt6)$, $(1-\frac{\sqrt6}{6}; 2-\frac{2}{3}\sqrt6)$~~

$3x(x-2)=0$

$x_3=0$ или $x_4-2=0$

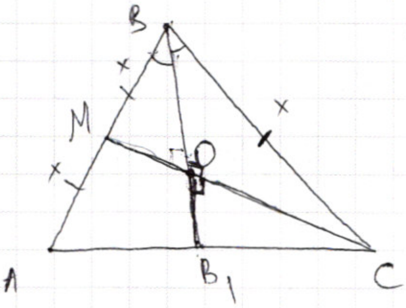
$x_4=2$

$y_3=x_3+1=1$

$y_4=x_4+1=3.$

Ответ: $(0;1)$, $(2;3)$, $\left(1+\frac{\sqrt6}{6}; 2+\frac{2}{3}\sqrt6\right)$, $\left(1-\frac{\sqrt6}{6}; 2-\frac{2}{3}\sqrt6\right)$.

№2 Пусть в $\triangle ABC$: $BB_1 \perp CM$ (BB_1 - биссектриса, CM - медиана)



Пусть $AM=MB=x$.

$\triangle MBO = \triangle CBO$ - по катету и острому углу. (BO - общ.)

Из равенства: $MB=BC=x$

Тогда выбор трех сторон сводится к выбору двух чи-
~~сел из 1200 (т.к.~~
сел, таких, что $3x+y=1200$ (где $AC=y$).

Но каждому x соответствует единственный y, $y=1200-3x$. Тогда нам достаточно выбрать одно число из 1200 (это будет x), кот. будет соответство-вать единственное y. Это можно сделать 1200 способ.

Для существования треугольника необходимы сле-дующие условия: $\begin{cases} 2x < x+y \\ x < 2x+y \\ y < 3x \end{cases} \to \begin{cases} x<y \\ y<3x \end{cases} \to x < y < 3x$

Т.к. $x \in N$, $y \in N$, то $y=2x$.

Тогда $\triangle ABC$ - р/б ($AB=AC=2x$, $BC=x$).

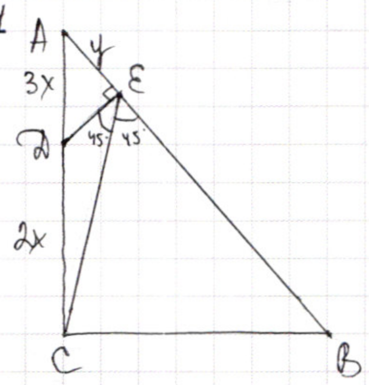
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$P = 5x = 1200$, $x = 240$.

Данному периметру соответствует единственный $\triangle ABC$ со сторонами $240, 480, 480$.

Ответ: 1.

№4



Дано: $\triangle ACB$ - прямоуг.

$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$; $DE \perp AB$.

$\angle CED = 45^\circ$

б) $AC = \sqrt{29}$

а) Найти: $tg\, BAC$

б) Найти: S_{CED}.

Решение.

а) Пусть $AD = 3x$; $DC = 2x$, $AE = y$

$\triangle AED \sim \triangle ACB$ (по 2 угл: $\angle A$ - общий, $\angle AED = \angle ACB = 90^\circ$).

Из подобия следует: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$, $AB = \frac{AD \cdot AC}{AE} = \frac{3x \cdot 5x}{y} = \frac{15x^2}{y}$

$\triangle CED$: по теор. синусов: $\frac{CD}{\sin CED} = \frac{CE}{\sin CDE}$

$\sin CDE = \sin(180^\circ - ADE) = \sin ADE = \frac{AE}{AD} = \frac{y}{3x}$.

$\frac{2x \cdot 2}{\sqrt{2}} = \frac{CE \cdot 3x}{y}$, $CE = \frac{y \cdot 2\cancel{x} \cdot 2}{3\cancel{x} \cdot \sqrt{2}} = \frac{4y\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{2y\sqrt{2}}{3}$

$\triangle BCE$ - по теор. синусов: $\frac{CE}{\sin CBA} = \frac{BC}{\sin CEB}$.

$\angle CEB = 90^\circ - \angle CED = 45^\circ$, $\sin CBA = \frac{AC}{AB} = \frac{5x \cdot y}{15x^2} = \frac{5y}{15x} = \frac{y}{3x}$

$\frac{2y\sqrt{2} \cdot 3x}{3 \cdot y} = \frac{BC \cdot 2}{\sqrt{2}}$; $BC = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{y} \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot \sqrt{2}}{\cancel{3} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{2}} = 2x$.

$tg\, BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5} = 0,4$.

б) $S_{CED} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot EC \cdot \sin CED$;

По найденному $tg\, BAC = \frac{DE}{AE} = \frac{2}{5}$, $DE = \frac{2}{5} AE = \frac{2}{5} y$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\triangle ADE$ - по т. Пифагора: $AD^2 = AE^2 + DE^2$

$$9x^2 = y^2 + \frac{4}{25}y^2 = 1\frac{4}{25}y^2.$$

Т.к. $AC = \sqrt{29}$, то $x = \frac{1}{3}AD = \frac{\sqrt{29}}{5}$.

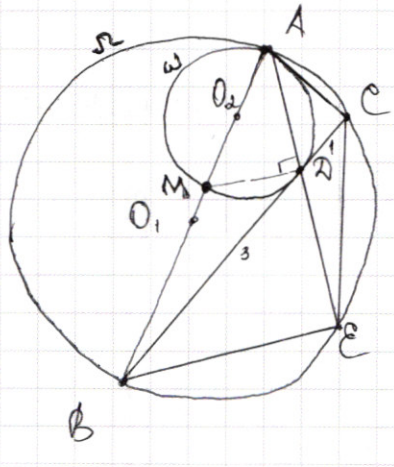
$9 \cdot \frac{29}{25} = \frac{29}{25}y^2$, $y^2 = 9$, $y = 3$ ($y = -3$ - не уд. смыслу задачи).

$DE = \frac{2}{5}y = \frac{6}{5}$, $CE = \frac{2y\sqrt{2}}{3} = \frac{2\cdot 3\cdot\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$.

$S_{CED} = \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6}{5}$

Ответ: а) $tg\, BAC = 0,4$; б) $S_{CED} = \frac{6}{5}$.

№5



Дано: окр. Ω, окр. ω, $CD = 1$, $BD = 3$

Найти: R, r (R - радиус Ω, r - ω); S_{BACE}

Решение:

Т.к. две окружности касаются друг друга внутренним образом, то одна лежит внутри другой, и диаметр большей окружности, проведенный через точку их касания, содержит диаметр меньшей окружности.

Пусть D - диаметр Ω, R - ее радиус,
d - диаметр ω, r - ее радиус,

По свойству хорд и касательной получаем:

$BD^2 = BM \cdot MA$, где M - точка пересечение ω и D.

$BM = (D - d)$, $AM = d$; тогда:

$$d(D-d) = 9.$$

$\angle MDA = 90°$ - т.к. опирается на диаметр.

$R = \frac{D}{2}$, $r = \frac{d}{2}$ По св-ву хорд: $BD \cdot DC = AD \cdot DE = 3$.

№6 $\begin{cases} 2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x-1| \\ -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$, $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$ - на плоскости задает полосу.

Пусть $f(x) = ax + b$ - задает прямую, лежащую на отрезке $[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$ между графиками функций $y = 2x^2 - x - 1$ и $y = x + |2x-1|$.

1) $y = 2x^2 - x - 1$ - парабола (квадратичн. функция), ветви вверх.

$$x_B = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{4} = \frac{1}{4}, \quad y_B = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{8}.$$

x	0	$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{2}$
y	-1	$-\frac{5}{8}$	0	2

2) $y = x + |2x-1|$

а) $\begin{cases} 2x - 1 \geq 0, \ x \geq \frac{1}{2} \\ y = 3x - 1 \end{cases}$

x	0	1	$\frac{3}{2}$
y	-1	2	$\frac{7}{2}$

б) $\begin{cases} 2x - 1 < 0, \ x < \frac{1}{2} \\ y = 1 - x \end{cases}$

x	0	1	$-\frac{1}{4}$
y	1	0	$\frac{5}{4}$

Изобразим в координатной плоскости $(x; y)$ данные графики.

Графическая иллюстрация:

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

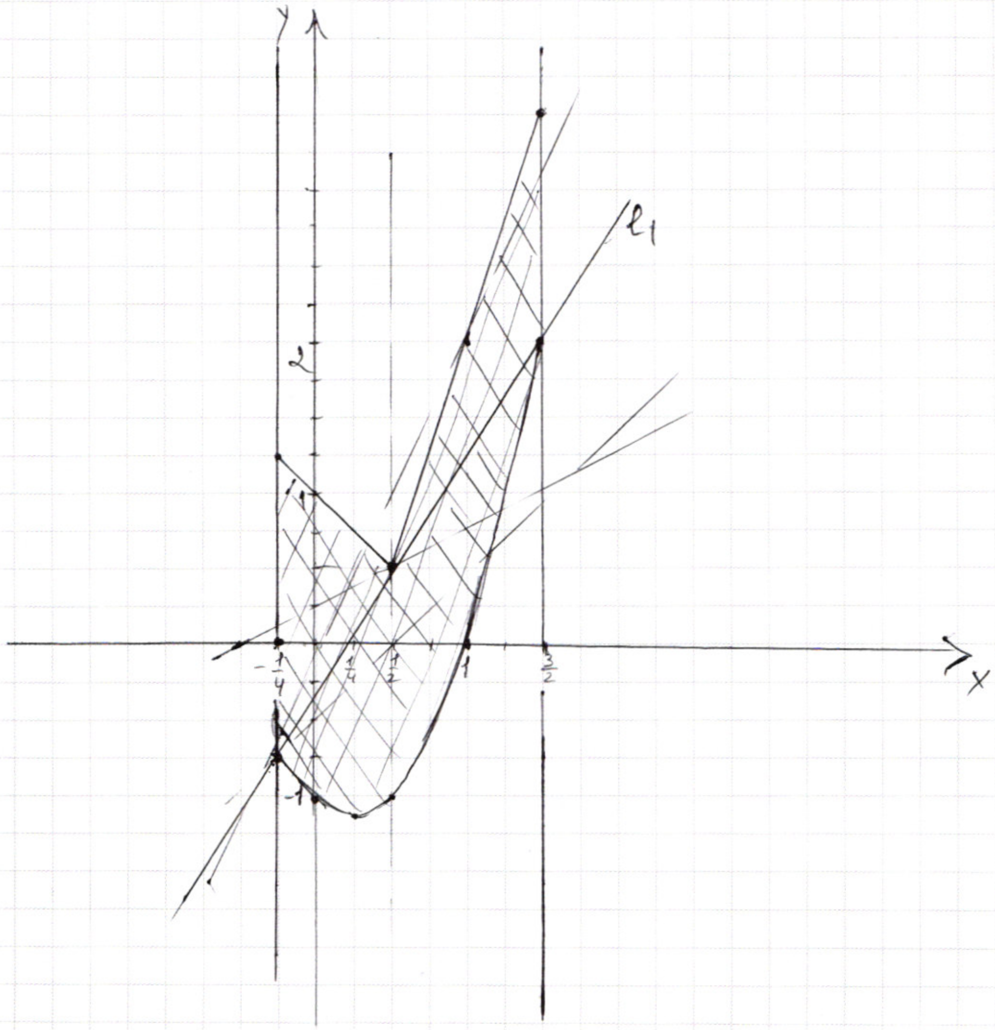
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



В заштрихованной части графике должна находиться прямая $y = ax + b$

Отметим, что $a \neq 0$, $b \neq 0$, т.к. тогда усл. не выполн.

Прямая, ~~содержащая точки~~ должна начинаться с точки, леж. на отрезке, где $y = -\frac{1}{4}$, а $x \in [-\frac{5}{8}; 1\frac{1}{4}]$, заканчиваться на отрезке, где $y = \frac{3}{2}$, а $x \in [2; 3\frac{1}{2}]$.

1) Прямая, содержащая точки $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$; $(\frac{3}{2}; 2)$ — подходит

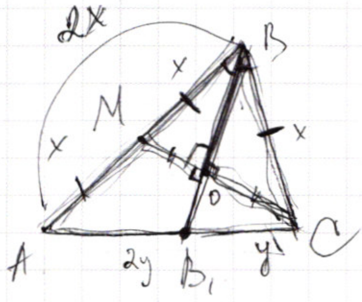
$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}a + b = 2 \end{cases} \quad \boxed{a = \frac{3}{2},\ b = -\frac{1}{4}} \text{ — прямая } l_1.$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Больше таких прямых при данном усл-ии нет, т.к. если мы будем изменять координаты точек, то прямая не будет <u>полностью</u> лежать в заштрихованной области

Ответ: $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.



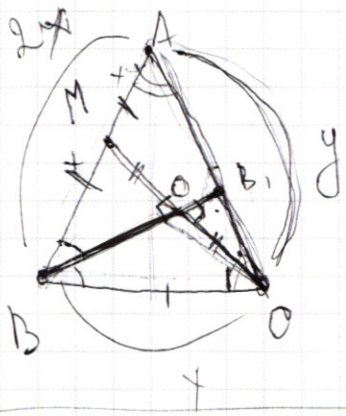
$2a + c = 1200$

$2x - 1 < 0$

$2x < 1$

$x < \frac{1}{2}$

$\triangle MBO = \triangle CBO$ – по кат. и остр. углу.



$3x + y = 1200 \to y \le 3x,$

$\cancel{y = 1200 - 3x}$

C_{1200}^{2}

$x < 2x + y$

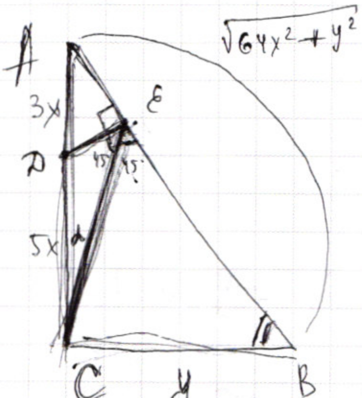
$2x \le x + y$

$x < y$

$\angle BB_1C = \angle ABB_1 + \angle A = \frac{1}{2}\angle C + \angle A$

$\cancel{\angle B_1}$

№4



$\triangle CEB$:

т. синусов: $\frac{y \cdot 2}{\sqrt{2}} = \frac{CE\sqrt{64x^2+y^2}}{8x}$,

$$CE = \frac{16xy}{\sqrt{128x^2+2y^2}} = a$$

$\triangle CEB$:

т. кос: $y^2 = \frac{16^2x^2y^2}{128x^2+2y^2} + BE^2 - \sqrt{2} \cdot a\,BE$ $\quad a^2$

$x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$

$$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x - 1|$$

1) $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$: $2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + 1 - 2x$

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le 1 - x$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

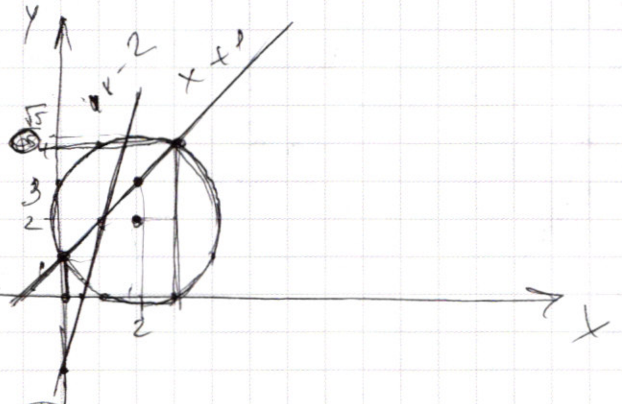
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(2) $2x^2+y^2-4x-4y+3=0.$

$(x^2-4x+4)-4+(y^2-4y+4)-4+x^2+3$

$(x-2)^2+(y-2)^2=5$



(1) $y^2-4yx+4x^2=xy-2x-y+2$

$y^2+4x^2-5xy+2x+y-2=0.$

~~$y^2-4yx+4x^2=xy-2x-y+2$~~

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$y^2-5xy-y$

$4x-2 \quad x+1$

$y^2-(5x-1)y+(4x^2+2x-2)=0.$

$D=(25x^2-10x+1)-(16x^2+8x-8)=9x^2-18x+9=(3x-3)^2$

$(3x-3)^2=9x^2-1$

$y_1=\dfrac{5x-1+3x-3}{2}=4x-2$

$y_2=\dfrac{5x-1-3x+3}{2}=x+1$

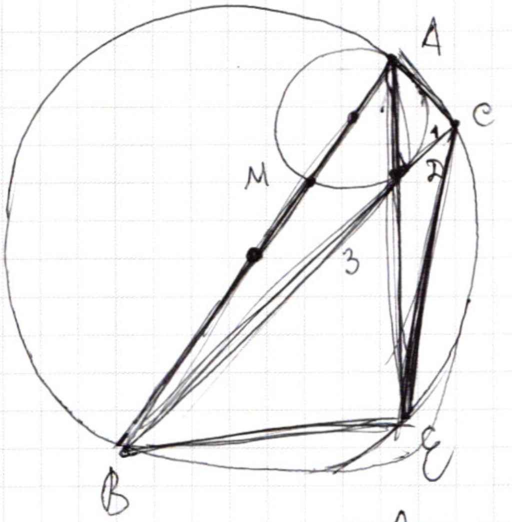
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



По св-ву хорды и касат.

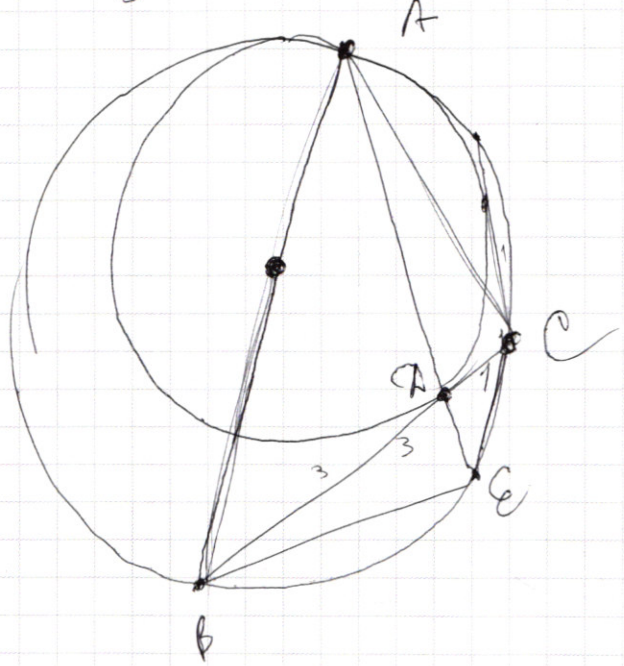
$BM \cdot MA = BD^2$

$9 = d(D-d)$ (1)

$AD \cdot DE = BD \cdot DC = 3$

$dD - d^2 = 9$

$d^2 - dD + 9 = 0$



Св-во хорд.

$DC = CC_1 = 1$

$AD \cdot DE = BD \cdot DC$

$BM \cdot MA = BD^2$

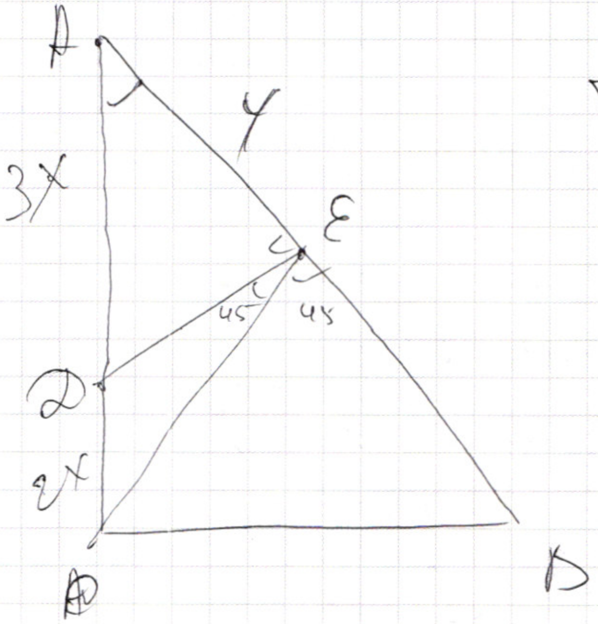
$dD - d^2 = 9$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$tg A = \frac{BC}{AC}$,

$tg A = \frac{DE}{AE} = \frac{\sqrt{9x^2-y^2}}{y}$,

1) $2x - 1 \geq 0$ $\quad$ $2x \geq 1$

$x \geq \frac{1}{2}$.

$2x-1 \geq 0$ при $x \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$

2) $2x - 1 < 0$.

2) $2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + 1 - 2x$

1) $2x^2 - x - \cancel{1} \leq ax + b \leq x + 2x - \cancel{1}$

$2x^2 - x \leq ax + b + 1 \leq \cancel{x+2x}\ 3x$

2) $2x^2 - 4x \leq ax + b + 1 - 3x \leq 0$.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) a, b, c, d — геом. прогрессия.

корень $ax^2+2bx+c=0$, $k=b$.

$\cancel{D=b^2-ac=a^2c^2-ac=ac(ac-1)}$

$b^2=a\cdot c$

$a \quad b \quad c \quad d$, $b^2=ac$

$a \quad aq \quad aq^2 \quad aq^3$

$ax^2+2bx+c=0, k=b.$

$D=b^2-ac=ac-ac=0.$ $\quad c=\frac{b^2}{a}$

$d=x=\frac{-k}{a}=\frac{-b}{a}.$ $\quad b^2=a\cdot c,$ $\quad c=\frac{b^2}{a}$

$a \quad b \quad c \quad d$

$c=\sqrt{b\cdot d}=\sqrt{b\cdot\left(\frac{-b}{a}\right)}=\sqrt{\frac{-b^2}{a}}=\frac{b}{\sqrt{a}}$ $\quad \frac{-b}{a}=\frac{b^3}{a^2}$

$a \quad b \quad c \quad d$

$a \quad aq \quad aq^2 \quad aq^3$ $\quad \frac{b^2}{a}=-1$

$a \quad b \quad \frac{b^2}{a} \quad \frac{-b}{a}.$ $\quad \cancel{b<1}$ $\quad a<0$

$c^2=b\cdot d=\frac{a\cdot b^2}{a^2}=\frac{b^2}{a}.$ $\quad a\cdot a^2q^2$

$\frac{-b^2}{a}=\frac{b^2}{a}$ $\quad d=\frac{c^2}{b}$

$\frac{b^4}{a^2\cdot b}=\frac{b^3}{a^2}$

d: $ax^2+2bx+c=0$, $b^2=ac$

$D=4b^2-4ac=4ac-4ac=0$

$d=x=\frac{-b}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\frac{-b}{a}$

$c=\sqrt{bd}=\sqrt{\frac{b\cdot(-b)}{a}}=\sqrt{\frac{-b^2}{a}}=\frac{b}{\sqrt{-a}}=\frac{b\sqrt{-a}}{a}$

$\begin{cases} b=aq \\ \frac{b^2}{a}=aq^2 \end{cases}$ $\quad \frac{b^2}{a\cdot b}=\frac{aq^2}{aq}$; $\boxed{\frac{b}{a}=q}$

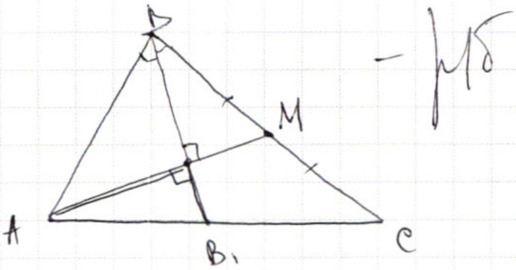
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

② $P = 1200.$



③ $\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0. \end{cases}$ ОДЗ: $xy-2x-y+2 \geq 0.$

$\begin{cases} y-2x \geq 0 \\ y^2-4yx+4x^2 = xy-2x-y+2 \end{cases}$

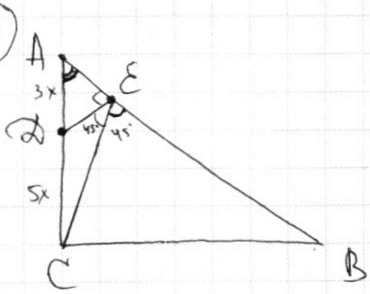
$\begin{cases} y \geq 2x \\ y^2+4x^2-5xy+2x+y-2=0. \end{cases}$

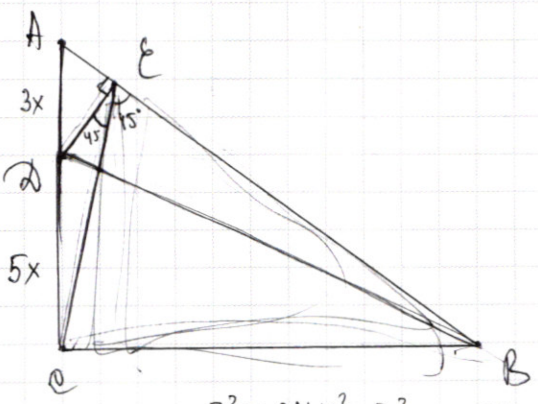
$(2x+y)^2-9xy+2x+y-2=0$

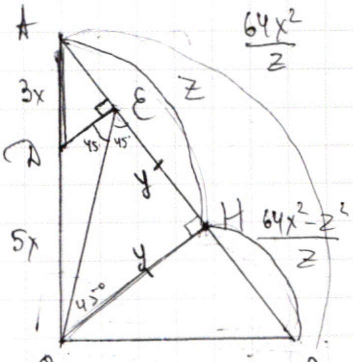
$(2x+y)^2+(2x+y)-(9xy+2)=0$

$(2x+y)(2x+y+1)$

④







$CH^2 = AH \cdot HB.$

$\cancel{CB^2 = BH \cdot AB}$

$AC^2 = AH \cdot AB$

$64x^2 = z \cdot (z+?)$

$64x^2 = z^2 + z \cdot ?$

$z \cdot ? = 64x^2 - z^2$

$? = \frac{64x^2-z^2}{z}$

$AB = \frac{z^2+64x^2-z^2}{z} = \frac{64x^2}{z}$

$y = \sqrt{64x^2-z^2}$

$\cancel{64x^2-z^2 = z \cdot \frac{64x^2-z^2}{z}}$

$BC =$

$BC^2 = \frac{64^2x^4}{z^2} - 64x^2 = \frac{64x^2-z^2}{z^2} \cdot \frac{64x^2}{z}$

$\frac{64x^4-64x^2z^2}{z^2} = 64x^4 - z^2.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~1) x ∈ [-1/5~~ 1) $x \in [\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le 3x - 1$

$2x^2 - x \le ax + b + 1 \le 3x$

$2x^2 - 4x \le (a-3)x + (b+1) \le 0.$

$2x^2 - 4x \le 0$

$2x(x-2) \le 0$

+ − +

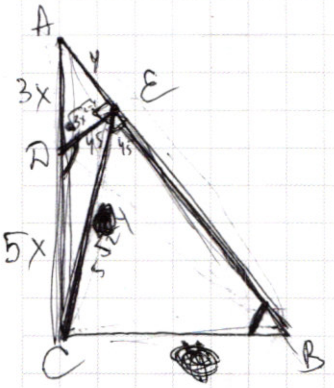
0 2 x

$x = \frac{3}{2}: \quad 2\cdot\frac{9}{4} - \frac{4\cdot 3}{2} \le (a-3)\cdot\frac{3}{2} + b + 1 \le 0.$

$4,5 - 6 = -1,5$

$\triangle AED \sim \triangle ACB$

$\frac{y}{8x} = \frac{3x}{AB}, \; AB = \frac{24x^2}{y}$



$$\begin{cases} (a-3)\cdot\frac{3}{2} + b + 1 \le 0 & |\times 2 \\ (a-3)\frac{3}{2} + b + 1 \ge -1,5 & |\times 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a - 9 + 2b + 2 \le 0 \\ 3a - 9 + 2b + 2 \ge -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a \le -2b - 7 \\ 3a \ge -2b - 7 \end{cases}$$

$\frac{1}{2} ED \cdot EC \cdot \sin(ED)$

~~$BD = BE \cdot AB$~~

$y^2 = a^2 + BE^2 - \sqrt{2}\, a\, BE.$

$a = \frac{16xy}{\sqrt{2(y^2+64x^2)}}$

$BE^2 - \sqrt{2}\cdot a \cdot BE + a^2 - y^2 = 0.$

$D = \frac{\cancel{2}\cdot 16^2 x^2 y^2}{\cancel{2}\cdot(y^2+64x^2)} - 4a^2 + 4y^2$

$\sin ADE = \frac{y}{3x}; \; \sin CDE = \frac{y}{3x}.$

$\frac{5\cancel{x}\cdot 2}{\sqrt{2}} = \frac{CE\cdot 3\cancel{x}}{y}, \quad \frac{10}{\sqrt{2}} = \frac{EC}{y}, \quad EC = \frac{10y}{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}y}{2} = 5\sqrt{2}y$

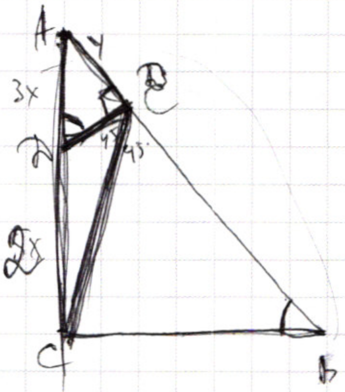
$\frac{BC\cdot 2}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}y \cdot y^2}{8x\cdot 24x^2}; \quad BC = \frac{5\cdot 2y^3}{2\cdot 8\cdot 24\cdot x^3} = \frac{5}{8\cdot 24}\frac{y^3}{x^3}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$tg^2 = \frac{DE^2}{AE^2}$

~~AE~~

$\triangle AED \sim \triangle ACB$

$\frac{3x}{AB} = \frac{y}{8x}$, $AB = \frac{24x^2}{y}$

~~$\triangle CEB$: син:~~

$\triangle CED$: син: $\frac{5x \cdot 2}{\sqrt{2}} = \frac{EC}{\sin CDE}$

$\sin CDE = 180 - ADE = \sin ADE = \frac{y}{3x}$

$\frac{5x \cdot 2}{\sqrt{2}} = \frac{EC \cdot 3x}{y}$, $EC = \frac{5\cancel{x} \cdot 2 \cdot y}{3\cancel{x} \cdot \sqrt{2}} = \frac{10y}{3\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2}y}{3 \cdot 2} = \frac{5\sqrt{2}y}{3}$

$\triangle BCE$ син: $\frac{5\sqrt{2}\cancel{y} \cdot 24\cancel{x^2}}{3 \cdot 8\cancel{x} \cdot \cancel{y}} = \frac{BC \cdot 2}{\sqrt{2}}$

$BC = \cancel{\frac{5 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 24x}{2 \cdot 3 \cdot 8}} = 5\cancel{x}$

$AC = \sqrt{29}$; $x = \frac{\sqrt{29}}{5}$

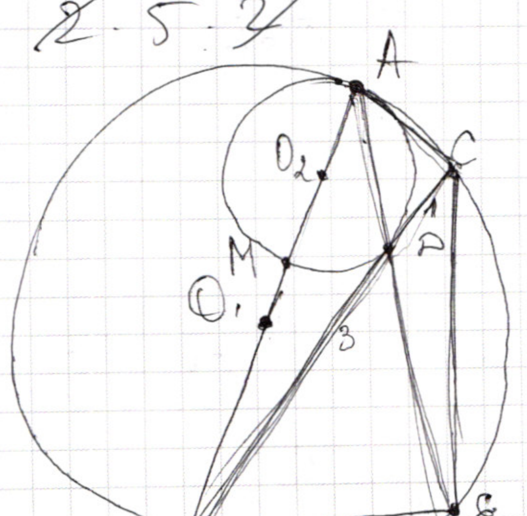
$DE^2 = 9x^2 - y^2 = tg^2 \cdot AE^2$

$9x^2 - y^2 = 0{,}16 \cdot y^2$

$9x^2 =$

$\frac{6 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 5 \cdot \cancel{2}} =$

$d(d-d) = 9$.



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

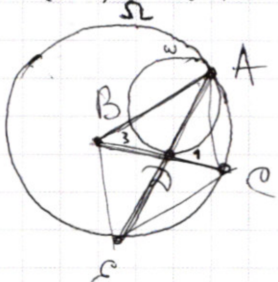
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

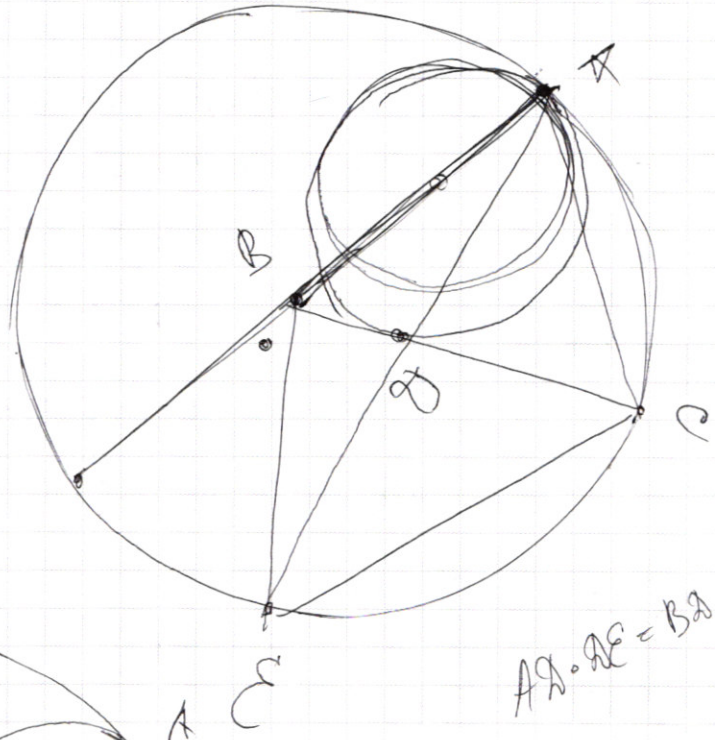
ШИФР

(заполняется секретарём)

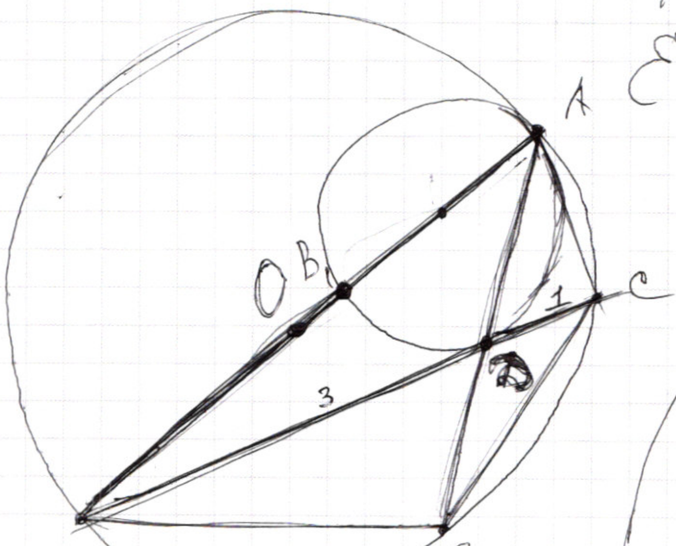
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

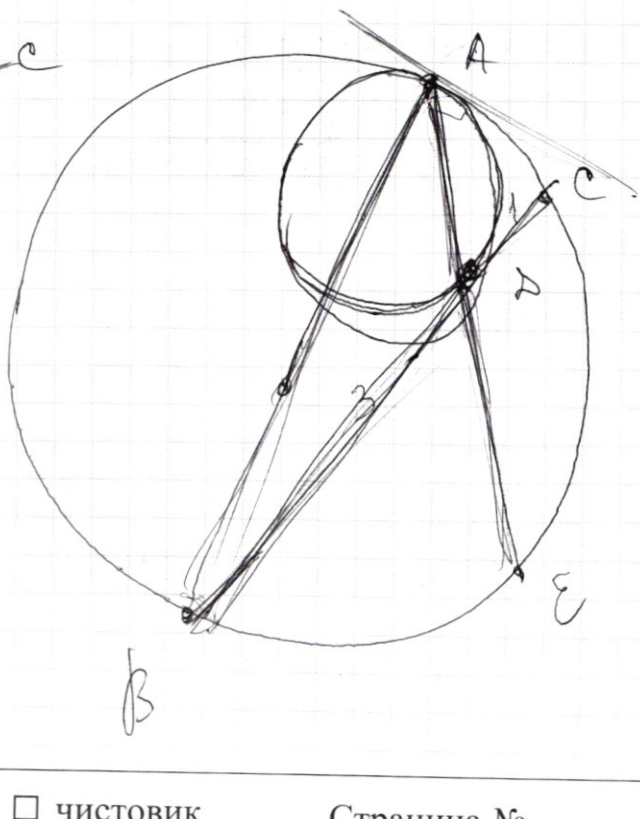
7 ~~$f(ab) = f(a) + f(b)$~~





$AD \cdot DE = BD \cdot DC = 3$





$AB_1 \cdot D = 9$

$(D - d) \cdot D = 9.$

$D^2 - dD - 9 = 0.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} & (1) \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

В

(1): $y^2 - 4xy + 4x^2 - xy + 2x + y + 2 = 0$

$y^2 + 4x^2 - 5xy + 2x + y + 2 = 0$

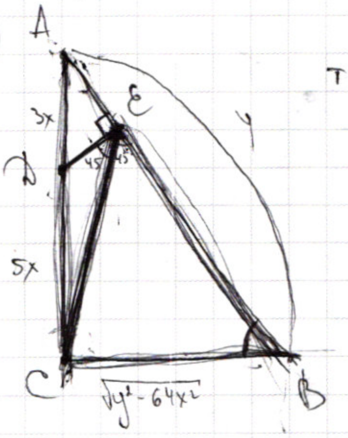
$(y + 2x)^2 - 9xy + 2x + y + 2 = 0.$

$y^2 + 4xy + 4x^2$

$\sin 135 = \sin(90 + 45) = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 135 = \cos(90 + 45) = -\sin 45 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(4)



т. косин.:

$\triangle AEC$: $64x^2 = AE^2 + EC^2 + \sqrt{2} \cdot AE \cdot EC$;

$\triangle CEB$: $BC^2 = EC^2 + EB^2 - \sqrt{2} \cdot CE \cdot EB$

$64x^2 - BC^2 = AE^2 - EB^2 + \sqrt{2} \cdot EC(AE + EB)$

$64x^2 - y^2 + 64x^2 = AE^2 - EB^2 + \sqrt{2} \cdot EC \cdot \overset{\overset{AB}{\shortparallel}}{y^2}$

$128x^2 - y^2 = (AE - EB)\underbrace{(AE + EB)}_{y} + \sqrt{2} \cdot EC \cdot y^2.$

$128x^2 - y^2 = y(AE - EB) + \sqrt{2} \cdot EC \cdot y^2.$

$64x^2 + y^2 = 2EC^2 + AE^2 + EB^2$

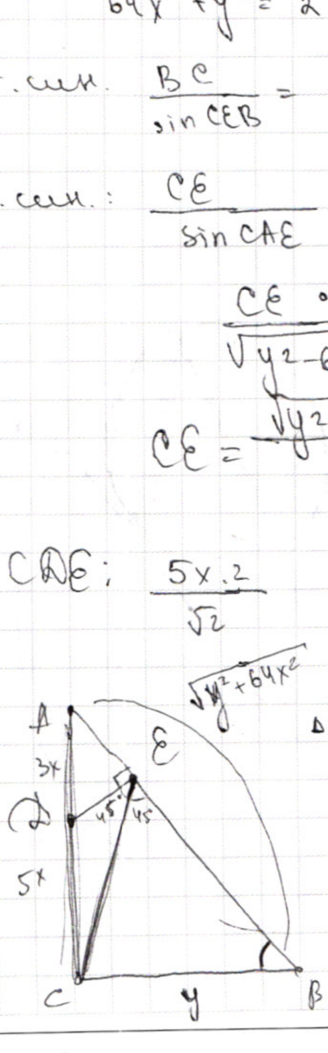
т. син. $\frac{BC}{\sin CEB} = \frac{CE}{\sin EBC}$; $\frac{\sqrt{y^2 - 64x^2} \cdot 2}{\sqrt{2}} = \frac{CE \cdot y}{8x}$

т. син.: $\frac{CE}{\sin CAE} = \frac{AC}{\sin CDA}$; $\frac{CE \cdot 2}{\sqrt{2}} = 8x$

$$\frac{CE \cdot y}{\sqrt{y^2 - 64x^2}} = \frac{8x \cdot 2}{\sqrt{2}}$$

$$CE = \frac{\sqrt{y^2 - 64x^2} \cdot 8x \cdot 2}{\sqrt{2} \cdot y}$$

$\triangle CDE$: $\frac{5x \cdot 2}{\sqrt{2}}$



$\triangle CEB$: син: $\frac{2y}{\sqrt{2}} = \frac{CE \cdot \sqrt{y^2 + 64x^2}}{8x}$, $CE = \frac{16xy}{\sqrt{2}(y^2 + 64x^2)}$

$\frac{8x \sqrt{y^2 + 64x^2}}{8x}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{3}{2}x - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$

$\frac{3}{2}x = 0$

$x = 0$

$\frac{3}{4} + b = \frac{2}{4}$

$b = \frac{1}{4}$

$\frac{9}{4} \cdot 2 - \frac{3}{2} - 1 =$

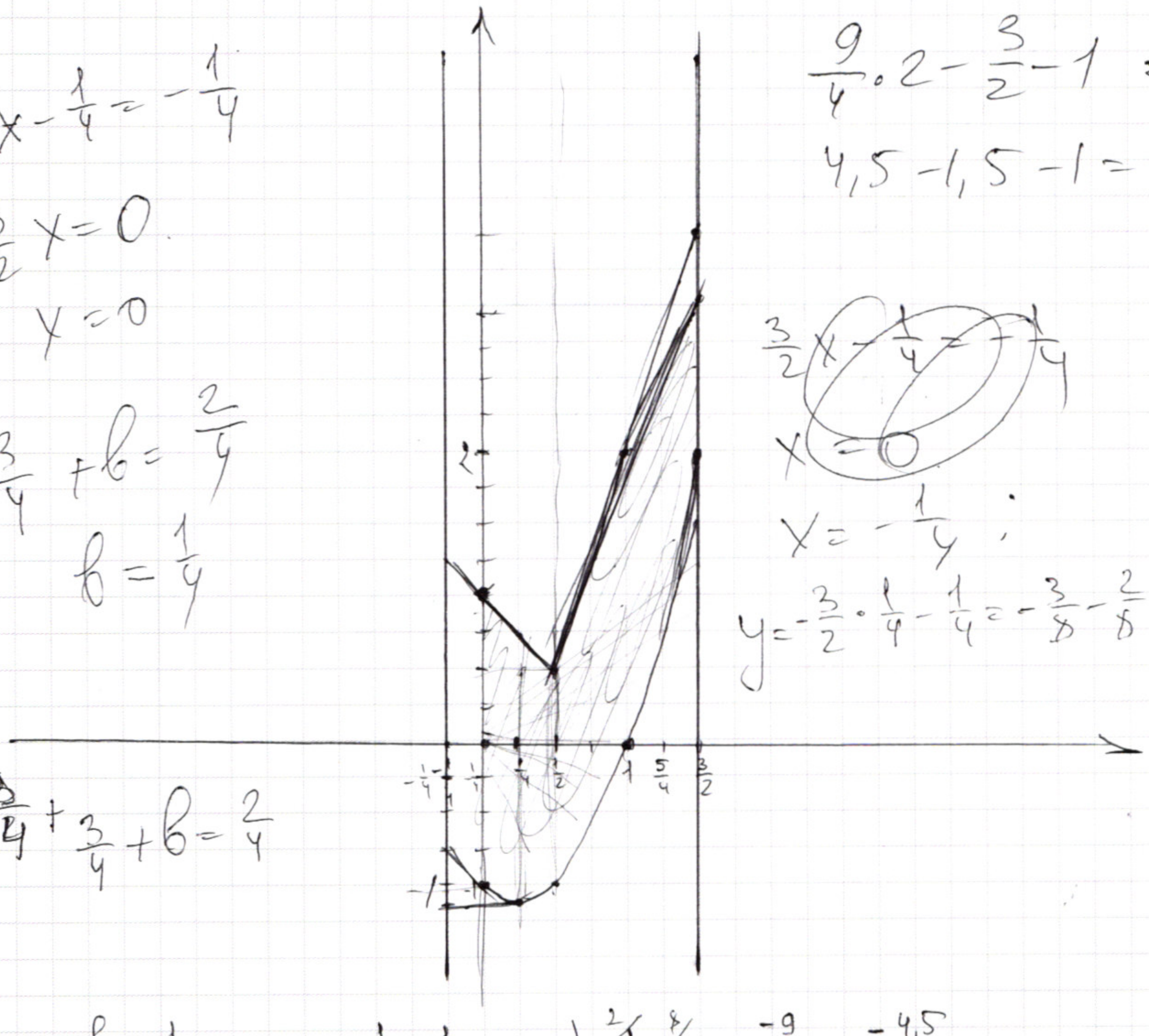
$4,5 - 1,5 - 1 = 2$

$\frac{3}{2}x - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$

$x = 0$

$x = -\frac{1}{4}$;

$y = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{8} - \frac{2}{8} = -\frac{5}{8}$



$\frac{9}{4} + \frac{3}{4} + b = \frac{2}{4}$

$x_в = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{4}$, $y_в = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{-9}{8} = -\frac{4,5}{4}$

$2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = 4,5 - 1,5 - 1 = 2$

$\frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1-2-8}{8} = \frac{-9}{8}$

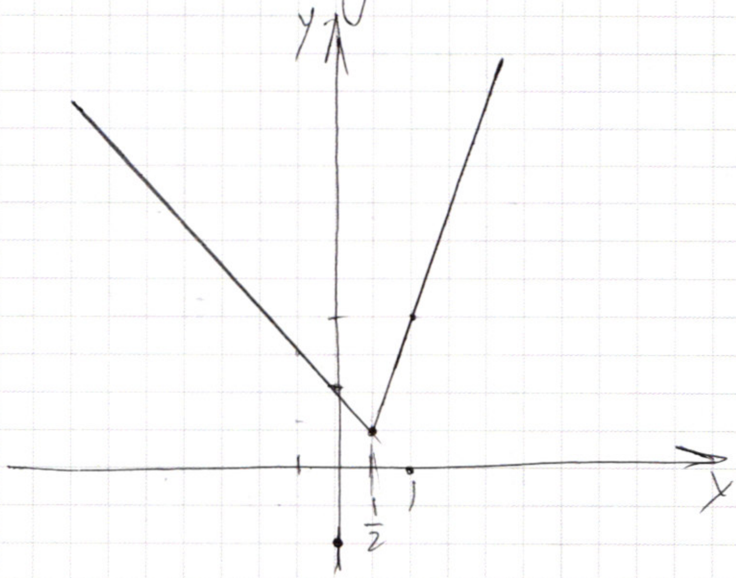
$2 \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{3-8}{8} = -\frac{5}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$y = x + |2x-1|$

$x \geqslant \frac{1}{2}$: $y = 3x-1$ $\qquad$ $x < \frac{1}{2}$: $1-x$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)