МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

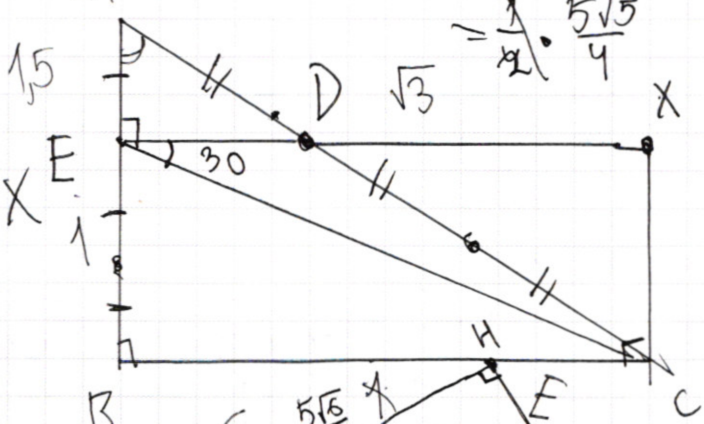
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4. $S_{1A} = \frac{1}{2}\cdot\frac{5\sqrt{6}}{6}\cdot\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{7,5}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{5\cdot3\sqrt{5}}{6} = \frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\cdot\frac{5\sqrt{5}}{4}$

$\cancel{S = \frac{5\sqrt{5}}{4} + 5\sqrt{5} = \frac{25\sqrt{5}}{4}}$



EX $\frac{XC}{EX} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$x^2 + \frac{6}{9}x^2 = 7$

AB

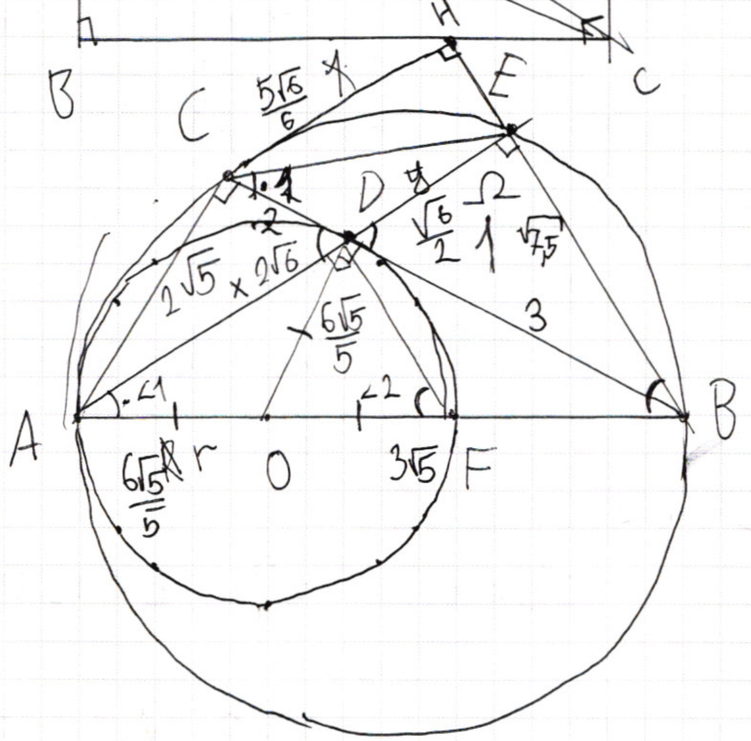
$\frac{5}{3}x^2 = 7$

$\frac{BC}{AB} = \frac{2EX}{3XC} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $x=$

$tg A = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\frac{2\sqrt{3}}{3}x = \frac{y}{x}$

$AC = \sqrt{7}$

№5



$\frac{D}{5} = \frac{D-r}{3}$ $3D = 5D - 5r$

$AD\cdot DE = 6$ $2D = 5r$

$\frac{D}{AE} = \frac{2r}{AD}$ $D = \frac{5r}{2}$

$\times\,7,5$
6
450

$9 + r^2 = (D-r)^2$

$9 + r^2 = D^2 - 2Dr + r^2$

$9 = D(D-2r)$

$xy = 6$ $\frac{5x}{12\sqrt{5}} = \frac{x+y}{3\sqrt{5}}$

$9 = \frac{5r}{2}\left(\frac{r}{2}\right)$ $9 = \frac{5r^2}{4}$

$r^2 = \frac{36}{5}$ $r = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

$D = 3\sqrt{5}$ $R = 1,5\sqrt{5}$

$\angle1 = 90 - \angle2$ $\cancel{90}\,2\angle2 - 90$ $\frac{5x}{4\sqrt{5}} = x + y$

$S_2 = \sqrt{5}\cdot5 = 5\sqrt{5}$ $\frac{x^2}{4} = 6$ $x^2 = 24$ $\frac{1}{4}x = y$

$x = 2\sqrt{6}$ $S = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

№1. a, b, c - последовательные члены геометрической прогрессии, а значит $ac = b^2 \Rightarrow b^2 - ac = 0$;

решим уравнение $ax^2 - 2bx + c$

$$D = 4b^2 - 4ac = 4(b^2 - ac) = 0$$

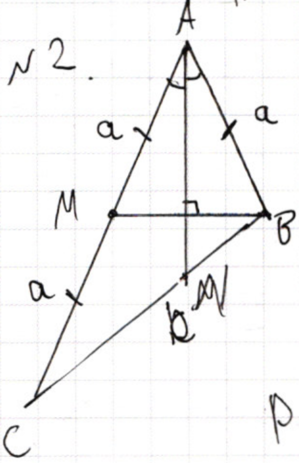
$x = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a}$, значит следущий член $x = \frac{b}{a}$,

то есть $c^2 = b \cdot \frac{b}{a} = \frac{b^2}{a}$

запишем систему для c $\begin{cases} ac = b^2 \\ c^2 = \frac{b^2}{a} \end{cases}$ $: \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{a}$, $c = 1$

Ответ: 1

№2.



Дано:

$\triangle ABC$,

AM - бис.

BM - мед.

$AM \perp BM$

$P = 900$

Найти: кол. $\triangle$

Решение:

1). в $\triangle ABM$ биссектриса совпадает с высотой, а значит он - равнобедренный. Тогда $AB = AM = \frac{1}{2}AC$

2) Пусть $AB = a$, $AC = 2a$

Пусть $BC = b$

Тогда $P = b + 3a$ $b = P - 3a$

$P \vdots 3$ $3a \vdots 3 \Rightarrow b \vdots 3$

Из неравенства треугольника $b < a + 2a = 3a$

$2b \leq a + 2a + b = P$, $b < 450$,

$2a < a + b$ $b > a$ $3b > 3a$

Для каждого $b \in (225, 450)$ $4b > 3a + b = P$ $b > 225$

$b \vdots 3$ найдутся соответствующие a и $2a$.

Всего таких b $228, 231, \ldots, 447$

$$\frac{447 - 228}{3} + 1 = 74$$

Ответ: 74.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6. $8x-6|2x-1| \leq ax+b \leq -8x^2+6x+7$ $\quad 4\cdot 18=72+40=$
$=112+31=193$

22 $22-4=18$ $\underline{18}$
21 $22-4=18$ $\underline{18}$
20 $22-6=16$
19 $22-2=20$
18 $22-4=\underline{18}$
17 $22-2=20$
16 $22-5=$
15 $22-4=\underline{18}$

$a \vdots b$

$\cancel{11}, 3, 5, 7, 9,$
$13,$

$22\cdot 2\cdot 11$

$\cancel{21-3}=$

$22-4=18$

$21=3\cdot 7 \quad 18$

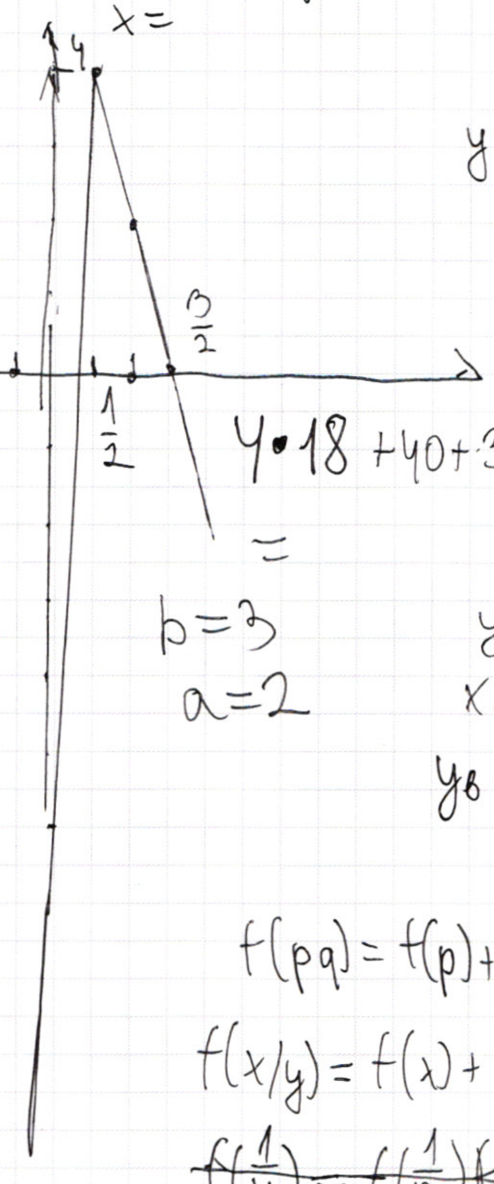
$f($ 10 5 2 4

$20=5\cdot 2\cdot 2$

$\cancel{20}-4$

$D=36+224=260 \qquad D'=9+56=65$

$x=\frac{-6\pm\sqrt{260}}{}$ $\qquad x=$



$y=8x-6|2x-1|$

$x \geq \frac{1}{2}$

$y=8x-12x+6=$
$=-4x+6$

$4\cdot 18+40+31=$
$=$

$y=20x-6$

$b=3$
$a=2$

$y=-8x^2+6x+7$

$x_в=\frac{-6}{-16}=\frac{3}{8}$

$y_в=-8\cdot\frac{9}{8}+\frac{18}{8}+7=$
$=8\frac{1}{8}$

$f(pq)=f(p)+f(q)=[p/2]+[q/2]$

$f(x/y)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=$

$\cancel{f\left(\frac{1}{y}\right)=f\left(\frac{1}{p}\right)+f\left(\frac{1}{q}\right)}=$

$\frac{x}{y}=$

$x \vdots y \qquad f\left(\frac{p_1p_2}{q_1q_2}\right)=f(p_1p_2)+f\left(\frac{1}{q_1q_2}\right)$

$f\left(\frac{p_1}{q_1}\right)+f\left(\frac{p_2}{q_2}\right)=f(p_1p_2)$

$f(1,5)=f(3)+f\left(\frac{1}{2}\right)$
$f(2,5)=f(5)+f\left(\frac{1}{2}\right)$

№3 ~~Дано~~: $\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x^2-12x+36)+2(y^2-2y+1)=18 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$ Сделаем замену:

Пусть $x-6=p \qquad y-1=q$

$x=p+6 \qquad y=q+1$

Тогда $x-6y=p+6-6q-6=p-6q$, подставим в уравнение:

$\begin{cases} 1) p-6q=\sqrt{pq} \\ 2) p^2+2q^2=18 \end{cases}$, где $pq\geq 0 \quad p-6q\geq 0 \quad p\geq 6q$

Возведем обе части уравнения 1) в квадрат

$p^2-12pq+36q^2=pq$ Решим отн. q

$p^2-13pq+36q^2=0 \qquad D=169q^2-144q^2=25q^2$

$p=\frac{13q\pm 5q}{2} \qquad p_1=9q \qquad p_2=4q$

Если $p>6q$, то: $\qquad 9q\geq 6q \qquad 4q\geq 6q$

$q\geq 0 \quad p\geq 0 \qquad q\leq 0 \quad p\leq 0$

Подставим полученное в уравнение 2)

$81q^2+2q^2=18 \qquad 16q^2+2q^2=18$

$q^2=\frac{18}{83} \quad q=\sqrt{\frac{18}{83}} \quad p=9\sqrt{\frac{18}{83}} \qquad q^2=1 \quad q=-1 \quad p=-4$

Проведем обратную замену:

$x=9\sqrt{\frac{18}{83}}+6 \qquad x=-4+6=2$

$y=\sqrt{\frac{18}{83}}+1 \qquad y=-1+1=0$

Ответ: $\left(9\sqrt{\frac{18}{83}}+6; \sqrt{\frac{18}{83}}+1\right); (2;0)$

~~№4 Дано~~:

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ x^2-12x+36+2(y^2-2y+1)=18 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$

$36+2=38-20=18$

$\cancel{x^2-12x}\ (x-6)^4+4(x-6)^2(y-1)^2+4(y-1)^4=324$

$\times\begin{array}{r}18\\18\\\hline 144\\18\\\hline 324\end{array}$

$x=p+6$

$x-6=p \quad y-1=q \quad y=q+1 \quad 6y=6q+6$

$x-6y=p+6-6q+6=p-6q$

$p\geq 0 \quad q\geq 0 \quad p-6q=\sqrt{pq} \quad p^2-\cancel{36}12pq+36q^2=pq$

$\times\begin{array}{r}34\\18\\\hline 272\\34\\\hline 612\\4\\\hline 2448\end{array}$

$p^2+2q^2=18 \quad 13pq=p^2+36q^2$

$p>6q$

$(p+2q)^2=p^2+\cancel{2}pq+2q^2$

$\begin{cases} p-6q=\sqrt{pq} \\ p^2+2q^2=18 \end{cases}$

$18-12pq+34q^2=pq$

$34q^2-13pq+18=0$

$D=169p^2-2448$

$q=\frac{13p\pm\sqrt{169p^2-2448}}{68}$

$16q^2+2q^2=18$ 4 и 1

$q=-1$

$p=-4$

$\underline{x=2}$

$\underline{y=0}$

$\underline{x=9\sqrt{\frac{18}{83}}+6}$

$\underline{y=\sqrt{\frac{18}{83}}+1}$

$p^2-12pq+36q^2=pq \quad p \quad \cancel{p=\sqrt{pq}}$

$p^2-13pq+36q^2=0 \qquad p^2-13pq+36q^2=0$

$p^2+2q^2=18 \qquad D=169q^2-144q^2=25q^2$

$18p^2+36q^2=18^2 \qquad p=\frac{13q\pm\sqrt{169q^2-144q^2}}{2}=\frac{13q\pm5q}{2}$

оба отр.

$17p^2+13pq=18^2 \qquad 34q^2-13pq+18=0$

$p_2=4q$

$\cancel{17p^2+}$

$81q^2+2q^2=18 \quad q^2=\frac{18}{83} \quad q=\sqrt{\frac{18}{83}}$

$p_1=9q \qquad \cancel{p_2=4q}$

$p=9\sqrt{\frac{18}{83}}$

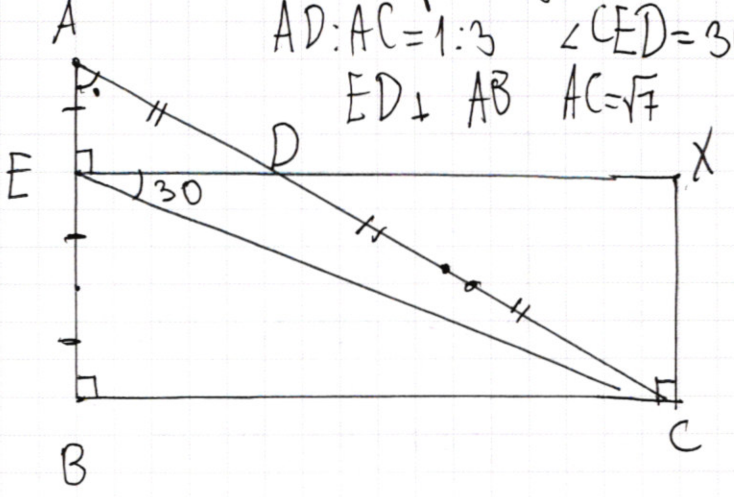
☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№4 Дано: $\triangle ABC$ – прямоуг

$AD:AC=1:3$ $\angle CED=30°$

$ED \perp AB$ $AC=\sqrt{7}$



~~Дан~~ Найти: $\operatorname{tg}\angle BAC$

$S ABC$

Решение:

1) $\triangle ADE \sim \triangle ACB$

по 2 углам (прямой и общий)

значит $AE:AB=AD:AC=1:3$

2) Пусть X такова, что $X \in ED$, $XC \perp BC$,

тогда $EXCB$ – прямоугольник, $XC=EB$, $BC=EX$

3). $\frac{XC}{EX}=\operatorname{tg}30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\operatorname{tg}\angle BAC=\frac{BC}{AB}=\frac{EX}{\frac{3}{2}XC}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\begin{array}{r} 91 \\ \times\ 9 \\ \hline 819 \\ -\ 144 \\ \hline 675 \end{array}$$

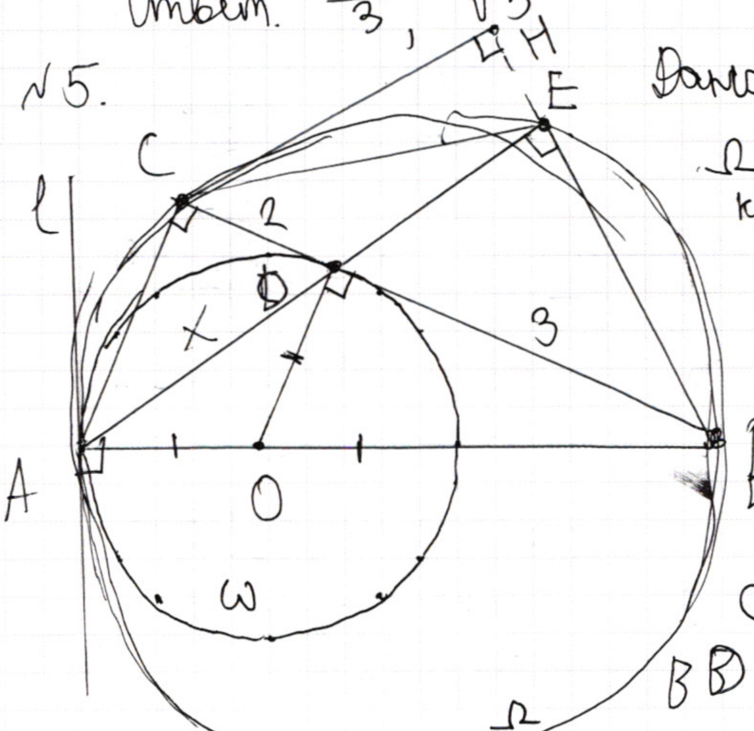
4) $AB=x$, $BC=\frac{2\sqrt{3}}{3}x$, по теореме пифагора

$x^2+\frac{12}{9}x^2=7$ $\quad \frac{21}{9}x^2=7$ $\quad \frac{1}{3}x^2=1$ $\quad x=\sqrt{3}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 2=\sqrt{3}$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\sqrt{3}$

№5.



Дано:

Ω и ω кас. в точке A, AB – диаметр Ω

BC – хорда Ω, кас. ω в D,

луч $AD \cap \Omega = E$

$CD=2$

$BD=3$

Найти: $R_\Omega, r_\omega, S_{ACED}$ – ?

Решение:

1) Пусть l – общая кас., O – центр ω, тогда $OA \perp l$, $AB \perp l$, $O \in AB$

2) Проведем AC и OD.

$AC \perp CD$ (AB – диаметр)

$OD \perp CB$ (CB – кас.)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

$f(x)$ $x \neq 0$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/2]$

$f(3) = 1$

$f(5) = 2$

$f(2) = 1$

$f(7) = 3$

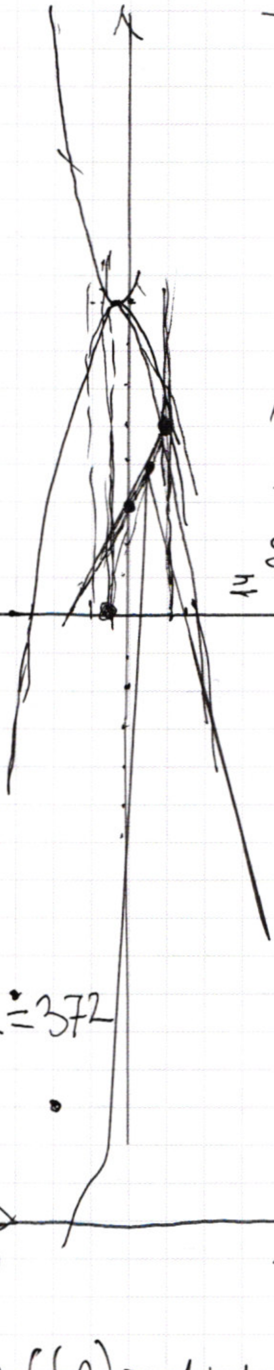
$-8x^2 + 6x + 7 =$

$-8 + 6 + 7 = 5$

$-2 + -3 + 7$

$22-2=20$, $22-4=18$, $22-2=20$

$22-2-3=18$, $22-2=20$, $22-2=20$



$22-4=18$, $22-2=20$, $22-6=16$, $22-2=20$, $22-4=18$, $22-3=19$, $22-4=18$

14, 13, 12, 11, 10, 9, 8

$2 \leq x \leq 22$

$2 \leq y \leq 22$

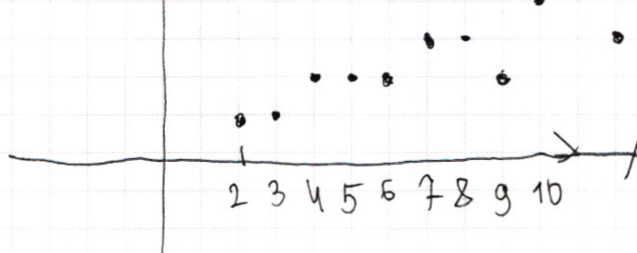
$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

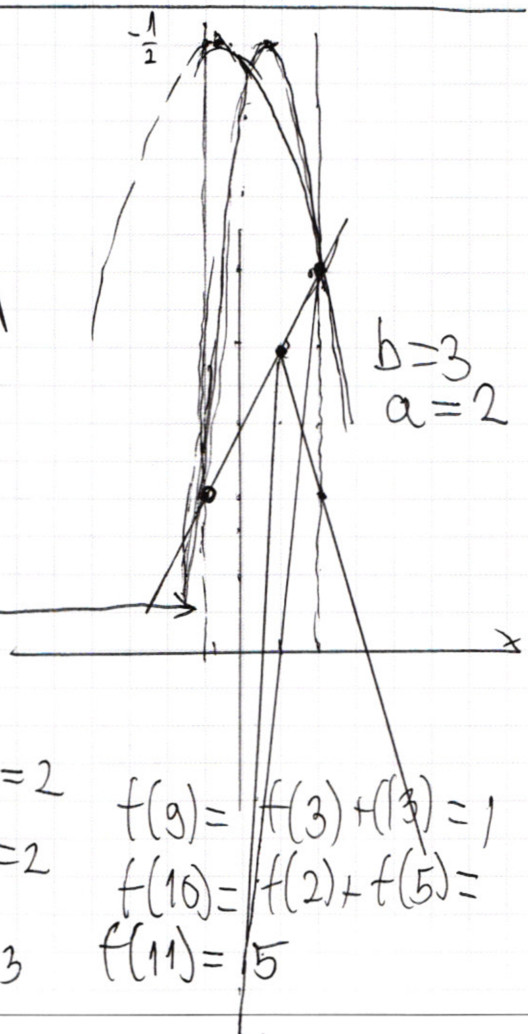
$8 \cdot 18 + 8 \cdot 20 + 2 \cdot 16 + 17 +$

$+ 19 = 180 + 160 + 240 + 32 = 372$

$b = 3$

$a = 2$





$f(12) = f(2) + f(6) =$
$= 1 + 2 = 3$

$f(4) = f(2) + f(2) = 1 + 1 = 2$

$f(6) = f(3) + f(2) = 1 + 1 = 2$

$f(7) = 3$

$f(8) = f(4) + f(2) = 3$

$f(9) = f(3) + f(3) = 1$

$f(10) = f(2) + f(5) =$

$f(11) = 5$

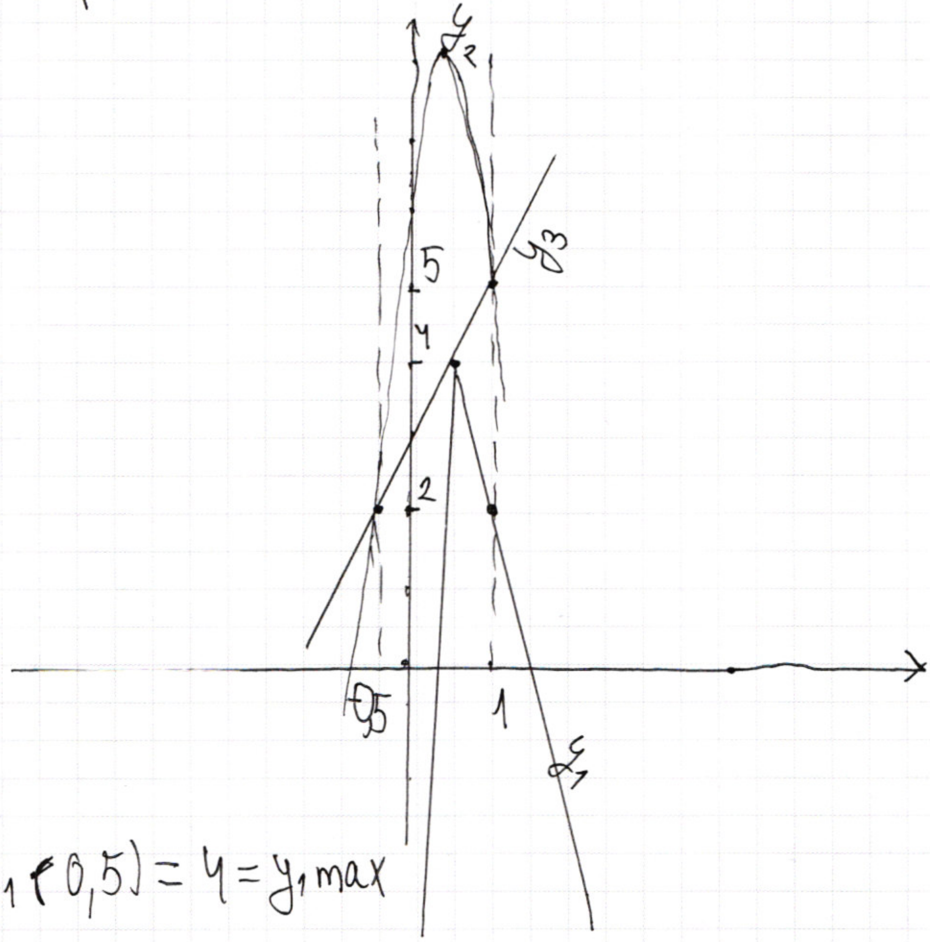
☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

~~Дан~~ №6 $\quad 8x-6|2x-1| \leq ax+b \leq -8x^2+6x+7$

Рассмотрим графики функций $y_1=8x-6|2x-1|$,

$y_2=-8x^2+6x+7$ и $y_3=ax+b$. Если ~~то~~ равенство верно, то множество точек $ax+b$ лежит над „уголком" и под параболой.



~~$y_2($~~ $y_1(0{,}5)=4=y_{1\max}$

$y_2(-0{,}5)=2 \quad y_2(1)=5.$

значит $\quad y_3(0{,}5)\geq 4 \quad y_3(-0{,}5)\leq 2 \quad y_3(1)\leq 5$

но точки $(-0{,}5;2)$, $(0{,}5;4)$, $(1;5)$ лежат на одной прямой $y=2x+3$, а значит

y_3 и y_* совпадают, от сюда $a=2$ и $b=3$

Ответ: $(2;3)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $ax^2+x-2bx+c=0$ $\quad a\ b\ c \quad b^2>ac \quad b^2=ac$

$b-a=c-x_0$, $ax_0^2+x-2bx+c=0$

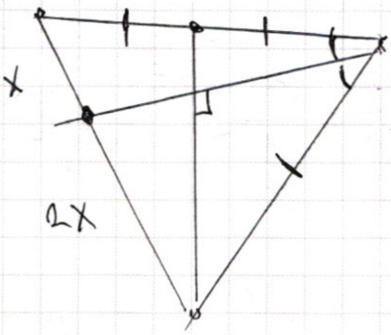
$D=4b^2-4ac \quad x=\frac{2b\pm2\sqrt{b^2-ac}}{2a}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}=\frac{b}{a}$

$a,\ b,\ c,\ \frac{b}{a} \quad c^2=\frac{b^2}{a} \quad c=\frac{b}{\sqrt{a}}$

$\begin{cases} ac=b^2 \\ c^2=\frac{b^2}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \cancel{c^2=\frac{b^2}{a}}$

$\frac{c}{a}=\frac{1}{a} \quad \underline{c=1}$

№2. $P=900$



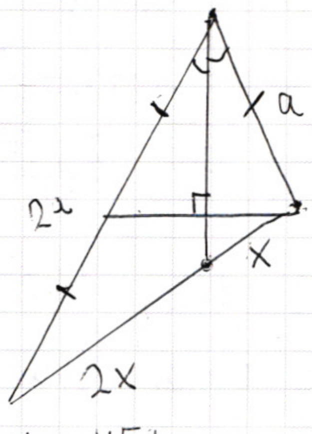
~~P:3~~

$c \vdots 3$

$c \le a+b$

$2c \le P$

$c<450 \qquad c \vdots 3$



$a=\frac{P-c}{3} \qquad 447 \quad a=\frac{453}{3}=151$

$a+c \ge 2a \qquad 444 \quad a=\frac{456}{3}=152$

$c>a \qquad \ldots$

$c=3 \quad a=\frac{897}{3}=299$

$226-151+1=76 \qquad a=\frac{P-c}{3} \quad a_{min} \ge \frac{P-a}{3}$

$a+2a+c=P \qquad 3a=P-a$

$c=(P-3a):3 \qquad 4a=P \quad a\ge\frac{900}{4}=225$

$\underline{a_{min}=226}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

3) $\triangle ACD \sim \triangle ODB$, по 2м углам $\Rightarrow$ $\cancel{\frac{AO}{}}$ $\cancel{AO}$ $\frac{AB-AO}{3} = \frac{AB}{5}$ $AB = \frac{5}{2}AO$

$OD = AO$ (радиусы). По теореме Пифагора в $\triangle ODB$:

$$OD^2 + 9 = (AB-AO)^2 \quad r_\omega^2 + 9 = \frac{9}{4}r_\omega^2$$

$$\frac{5}{4}r_\omega^2 = 9 \quad r_\omega^2 = \frac{36}{5} \quad r_\omega = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

$$R_\Omega = \frac{AB}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

4) из подобия $AC = r_\omega \cdot \frac{5}{3} = 2\sqrt{5}$. по т. Пифагора

$AD = 2\sqrt{6}$

5). По степени точки имеем $AD \cdot DE = 2 \cdot 3 = 6$

$$DE = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

6). Пусть CH – высота $\triangle CEB$, $\angle AEB = 90°$ (AB – диам.)

$\triangle CBH \sim \triangle DBE$, отсюда $CH = \frac{5\sqrt{6}}{6}$

7) По теореме Пифагора

8) $S_{ACEB} = S_{ACB} + S_{CEB} = 5\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{4} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

Ответ: $\frac{6\sqrt{5}}{5}$, $\frac{3\sqrt{5}}{2}$, $\frac{25\sqrt{5}}{4}$

№ 7. $f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad f(p) = [p/2]$, p – простое.

Если у нас есть составное число $W = p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \ldots p_h^{n_h}$, где p_k – простые

то $f(W) = n_1[p_1/2] + n_2[p_2/2] + \ldots + n_h[p_h/2] > 0$, $n_k \in N$

то есть функция от любого натурального числа больше нуля. Значит $f(\frac{x}{y}) < 0$ если $x \not\vdots y$

~~Для~~ Для 22 – 18 чисел взаимно простые, для 21 – 18 чисел... для 2 – 20 чисел. Сложим все эти значения, получим $8 \cdot 18 + 8 \cdot 20 + 2 \cdot 16 + 17 + 19 = 372$, значит таких пар $(x; y)$ не больше, чем 372

Ответ: не больше 372.