МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

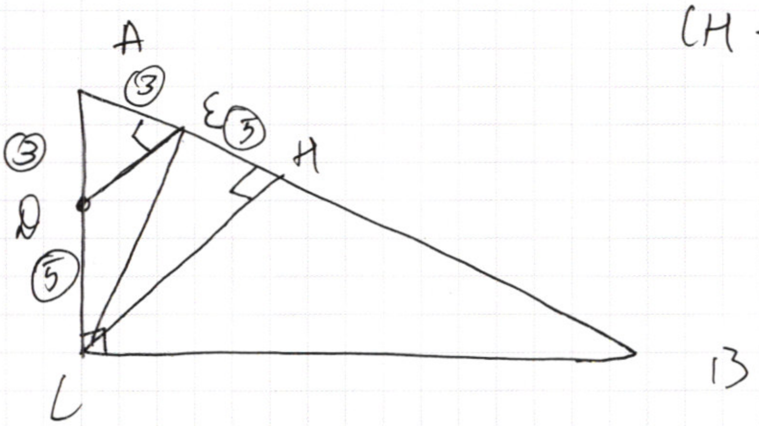
нок=2.

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



CH – высота к гипотенузе

1) $\triangle ADE \parallel \triangle CAH$, т.к. прямоугольные и угол A общий $\to$ $\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{EH} = \frac{3}{5}$.

2) $\triangle ECH$: (прямоугольный) $\angle CEH = 180 - 90 - \underset{45}{\angle CED} = 45$ $\to$ Прямоугольный треугольник с углом 45° $\to$

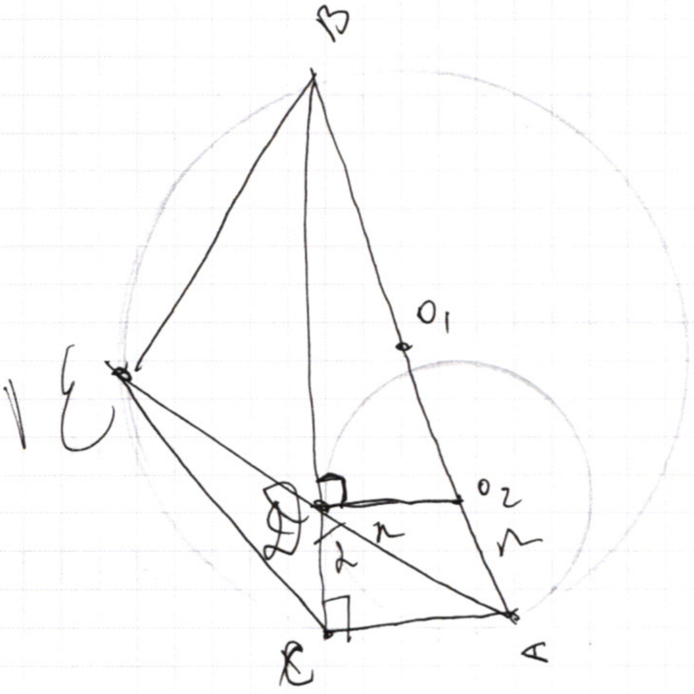
$\to$ он равнобедренный $\to EH = CH$.

3) $tg\angle BAC = tg\angle HAC = \frac{CH}{AH} = \frac{5}{8}$.

Ответ: $\frac{5}{8}$.

4) S_1 – площадь $\triangle CED$, тогда т.к. у них общая высота с $\triangle DAE \to S_{DAE} = \frac{3}{5}S_1$.

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)



O_1 – цент первой

O_2 – цент второй

A, B, O_1, O_2 – одна прямая.
т.к. при гомотетии с ц. т. A, переводящей Ω в ω, т. $O_2 \to O_1$
$\to$ они лежат на прямой O_1O_2A. и т.к. AO_1 – диаметр и B
~~в т. пересечения BC с большой окр.~~
лежит на этой прямой

Пусть r – радиус меньшей, R – радиус большей
$BO_2 = 2R - r$.

$\to$ в $\triangle BDO_2$ ($\angle D = 90^\circ$ т.к. касательная BC перпендикулярна DO_2, т.к. (ц. O_2))

$\to$ по Th. Пифагора $(2R-r)^2 = 9 + r^2$

И еще ~~из подобия~~ по Th Фалеса для $\angle CBA$: $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{BO_2}{O_2A} =$
(т.к. $AC \parallel DO_2$, т.к. $\angle ACB = 90^\circ$) $\to$ опирается на диаметр

$= \dfrac{3}{1} = \dfrac{2R-r}{r} \to 2R = 4r \to \underline{R = 2r}$.

$(2R-r)^2 - r^2 = 9$

$(3r)^2 - r^2 = 9 \Rightarrow r^2 = \dfrac{9}{8} \Rightarrow r = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$, а $R = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, что по нер-ву треугольника:

$3x > 1200 - 3x > x$

сумма x и $2x$; разность $2x$ и x

Так же ясно, что если неравенство верно, то такой треугольник есть, т.к. $2x + a > x$, $(a > 0)$, (a - третья сторона.)

$300 > x > 200$ ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~. ~~[illegible]~~. Таких чисел 99.

Ответ: 99

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) т. к. $tg\angle BAC = \frac{5}{8}$ и $AC = \sqrt{29} \Rightarrow BC = \frac{5\sqrt{29}}{8}$.

$S_{\Delta ACB} = \frac{1}{2}\sqrt{29} \cdot \frac{5\sqrt{29}}{8} = \frac{5 \cdot 29}{16}$.

6) $\left.\begin{array}{l} S_{\Delta DAE} = \frac{1}{2} \cdot \sin\angle A \cdot DA \cdot AE \\ S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \sin\angle A \cdot AC \cdot AB \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{S_{DAE}}{S_{\Delta ABC}} =$

$= \frac{DA \cdot AE}{AC \cdot AB}$. $\frac{DA}{AC} = \frac{3}{8}$, найдём $\frac{AE}{AB}$.

7) ΔCHB: $tg\angle B = ctg\angle A = \frac{8}{5} \Rightarrow \frac{CH}{HB} = \frac{8}{5}$.

$\Rightarrow HB = \frac{5}{8} \cdot CH = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{3} AE \Rightarrow HB = \frac{25}{24} AE$.

Итого: $\frac{AE}{AB} = 1 + \frac{5}{3} + \frac{25}{24} = \frac{24+40+25}{24} = \frac{89}{24}$

8) $\frac{S_{\Delta DAE}}{S_{\Delta BC}} = \frac{3}{8} \cdot \frac{89}{24} \Rightarrow S_{DAE} = \frac{5\sqrt{29}}{16} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{89}{24}$

и тогда $S_{DEC} = \frac{5}{3} \cdot S_{DAE} = \frac{5}{3} \cdot \frac{5 \cdot 29}{16} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{89}{24}$

$= \frac{25 \cdot 29 \cdot 89}{16 \cdot 8 \cdot 24}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$DO_2 = r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$.

$\frac{DO_2}{AC} = \frac{3}{4}$ (из подобия BDO_2 и BAC)

$\Rightarrow AC = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

$\triangle CDA$: по Th. Пифагора $CD^2 + AC^2 = AD^2 \Rightarrow AD = \sqrt{3}$.

Тогда т.к. AE и BC – хорды, то $ED \cdot DA = CD \cdot DB$

$\Rightarrow ED \cdot DA = 3$

$\Rightarrow DA = \sqrt{3}$..

Итак в $ACEB$: диагонали равны 4 и $2\sqrt{3}$,
а $\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ACEB} = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}}{2} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AE}{AE + \frac{5}{3}AE + \frac{25}{24}AE} = \frac{\cancel{AE}}{\frac{24+40+25}{24}\cancel{AE}} =$$

$$= \frac{24}{89}.$$

$$\frac{S_{\Delta DAE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3}{8} \cdot \frac{24}{89} = \frac{9}{89} \cdot S_{\Delta ABC}.$$

Тогда $S_{\Delta DEC} = \frac{5}{3} \cdot S_{\Delta DAE} = \frac{5}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{9}\,3}{89} = \frac{15}{89} \cdot S_{\Delta ABC} =$

$$= \frac{15}{89} \cdot \frac{5 \cdot 29}{16} = \frac{15 \cdot 5 \cdot 29}{89 \cdot 16}.$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

Заметим, что $f(1)=0$, т.к. $f(b)=f(1)+f(b)$.

2) $\underbrace{f(a\cdot\frac{1}{a})}_{0}=f(a)+f(\frac{1}{a}) \to f(a)=-f(\frac{1}{a})$

Откуда $f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)$.

Выпишем значения $f(x)$ для чисел от 1 до 21)
n

$\cancel{f(1)=0}$

$\cancel{f(2)=1}$

$\cancel{f(3)=1}$

$\cancel{f(4)=2=2f(2)}$

$\cancel{f(5)=2}$

$\cancel{f(6)=2=f(3)+f(2)}$

$\cancel{f(7)=3}$

$\cancel{f(8)=3=3f(2)}$

Докажем лемму: $f(p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\dots p_n^{\alpha_n})=$

$=\alpha_1 f(p_1)+\alpha_2 f(2)+\dots+\alpha_n f(p_n)$

~~Будем доказывать по индукции по кол-ву~~

~~База $f(a\cdot b)=f(a)+f(b)$~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\begin{cases} x-1=1 \\ y-2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ но $y-2x \geq 0$ $3-4<0$ $\rightarrow$ не подходит.

2) $\begin{cases} x-1=-1 \\ y-2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-1=\sqrt{\frac{1}{6}} \\ y-2=4\sqrt{\frac{1}{6}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+\sqrt{\frac{1}{6}} \\ y=2+4\sqrt{\frac{1}{6}} \end{cases}$

4) $\begin{cases} x-1=-\sqrt{\frac{1}{6}} \\ y-2=-4\sqrt{\frac{1}{6}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-\sqrt{\frac{1}{6}} \\ y=2-4\sqrt{\frac{1}{6}} \end{cases}$ $y-2x=2-4\sqrt{\frac{1}{6}}-2+2\sqrt{\frac{1}{6}}=-2\sqrt{\frac{1}{6}}$.

$\rightarrow$ не подходит под условие $y-2x>0$

Ответ: $(0;1)$; $\left(1+\sqrt{\frac{1}{6}}; 2+4\sqrt{\frac{1}{6}}\right)$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

~~По условию $f(a\cdot b) = f(a)+f(b)$ База индукции~~ ~~Вывод~~

Будем доказывать индукцией по кол-ву простых делителей:

$f(a\cdot b) = f(a)+f(b)$ – база.

Переход пусть верно для n, докажем для $n+1$:

$$f(p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}\cdot p_{n+1}^{\alpha_{n+1}}) = \underbrace{f(p_1^{\alpha_1}\ldots p_n^{\alpha_n})}_{\text{предположения}} + f(p_{n+1}^{\alpha_{n+1}}) =$$

$$= \alpha_1\cdot f(p_1)+\ldots+\alpha_n\cdot f(p_n) + f(p_{n+1}^{\alpha_{n+1}})$$

А $f(p_{n+1}^{\alpha_{n+1}}) = \alpha_{n+1} f(p_{n+1})$ и того получим требуемое.

Заметим, что если взять числа $\frac{x}{y}$ и $\frac{y}{x}$, то результаты будут разного знака, т. к. $f(\frac{x}{y})+f(\frac{y}{x}) = 0$. Это означает что для чисел $\{x; y\}$, будет либо $f(\frac{x}{y})<0$ либо $f(\frac{y}{x})<0$.

То есть. можно выбрать любые числа (кроме равных т. к $f(1)=0$) и одна из расстановок ~~f~~ $(x;y)$ или $(y;x)$ будет подходить.

$\rightarrow$ всего способов $\frac{21\cdot 20}{2} = 210$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 9
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ОДЗ: $(x-1)(y-2)\geq 0$ ~~ОДЗ~~: $y-2x\geq 0$

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-2x=\sqrt{x(y-2)-(y-2)} \\ 2x^2-4x+2+y^2-4y+4=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y-2x=\sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2(x^2-2x+1)+(y-2)^2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-2x=\sqrt{(y-2)(x-1)} \\ 2(x-1)^2+(y-2)^2=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Пусть $x-1=a$, $y-2=b$, тогда $y-2x=b-2a$, $(y-2)(x-1)=a\cdot b$,

имеем:

$$\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2-4ab+4a^2=ab \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b^2-5ab+4a^2=0 \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a(a-b)+b(b-a)=0 \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a-b)(4a-b)=0 \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=b \\ b=4a \end{array}\right. \\ 2a^2+b^2=3 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ 3b^2=3 \end{cases} \\ \begin{cases} b=4a \\ 2a^2+16a^2=3 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ b^2=1 \end{cases} \\ \begin{cases} b=4a \\ a^2=\frac{1}{6} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=-1 \\ a=b=1 \\ a=\sqrt{\frac{1}{6}},\ b=4\sqrt{\frac{1}{6}} \\ a=-\sqrt{\frac{1}{6}},\ b=-4\sqrt{\frac{1}{6}} \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6. Т.к. $2x^2-x-1$ и $x+|2x-1|$ выпуклы вверх, то:

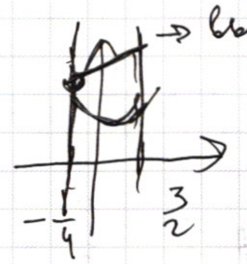
То, что $\underbrace{2x^2-x-1}_{G(x)} \le \underbrace{ax+b}_{f(x)}$, т.к. $2 \ge 0$

равносильно тому, что $f(\frac{3}{2}) \ge G(\frac{3}{2})$ и $f(-\frac{1}{4}) \ge G(-\frac{1}{4})$

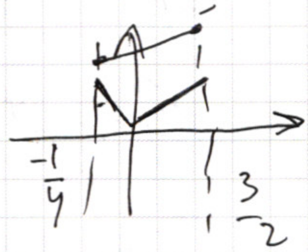
А то, что $f(x) \le \overbrace{x+|2x-1|}^{K(x)}$

равносильно тому, что $f(-\frac{1}{4}) \le K(-\frac{1}{4})$ и $f(\frac{3}{2}) \le K(\frac{3}{2})$

$2x^2-x-1 \le ax+1$



и



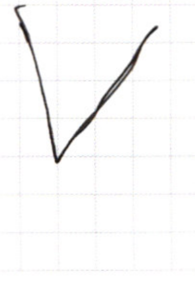
т.к. $x+|2x-1|$ — выпуклые вверх

итого:

$$\begin{cases} f(\frac{3}{2}) \ge 2 \\ \cancel{f(\frac{3}{2})} \; f(-\frac{1}{4}) \ge -1\frac{1}{8} \\ f(-\frac{1}{4}) \le \frac{5}{4} \\ f(\frac{3}{2}) \le 4,5 \end{cases}$$

Итого: $\begin{cases} 4,5 \ge f(\frac{3}{2}) \ge 2 \\ \frac{5}{4} \ge f(-\frac{1}{4}) \ge -1\frac{1}{8} \end{cases}$

$$\begin{cases} 4,5 \ge \frac{3}{2}a+b \ge 2 \\ \frac{5}{4} \ge -\frac{1}{4}a+b \ge -1\frac{1}{8} \end{cases}$$



1)
$$+\begin{cases} 3{,}5 \geq \frac{3}{2}a + b \geq 2 \\ 1\frac{1}{8} \geq \frac{1}{4}a - b \geq -\frac{5}{8} \end{cases}$$

$$3{,}5 + 1\frac{1}{8} \geq \frac{3}{2}a + \frac{1}{4}a \geq \frac{11}{8} \quad | \cdot 8$$

$$28 + 9 \geq 12a + 2a \geq 11$$

$$37 \geq 14a \geq 11$$

$$\frac{37}{14} \geq a \geq \frac{11}{14}$$

2)
$$\begin{cases} 3{,}5 \geq \frac{3}{2}a + b \geq 2 \\ \frac{5}{8} \geq -\frac{1}{4}a + b \geq -1\frac{1}{8} \quad | \cdot 6 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 3{,}5 \geq \frac{3}{2}a + b \geq 2 \\ \frac{15}{4} \geq -\frac{3}{2}a + 6b \geq -\frac{27}{4} \end{cases}$$

$$\cancel{12 \geq 7b \geq -\frac{19}{4}}$$

$$\cancel{\frac{12}{7} \geq b \geq -\frac{19}{28}}$$

$$\frac{7}{2} + \frac{15}{4} \geq 7b \geq 2 - \frac{27}{4}$$

$$\frac{29}{28} \geq b \geq -\frac{19}{28}$$

Ответ: $a \in \left[\frac{11}{14}; \frac{37}{14}\right]$; $b \in \left[-\frac{19}{28}; \frac{29}{28}\right]$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\boxed{\begin{array}{cccc} a & b & c & x_1 \\ a & ak & ak^2 & ak^3 \end{array}}$$ → корень.

$ax^2+2bx+c=0$

$a\neq 0,\ k\neq 0$

$D=4b^2-4ac=4(b^2-ac)=$

$=4((ak)^2-a\cdot ak^2)=0.$

$x_1=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}.=-\frac{ak}{a}=-k.$

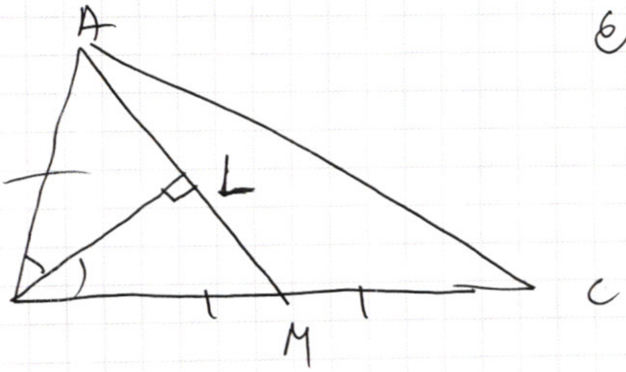
Если $x_1=-k$, то $c=-\frac{k}{k}=-1$.

Ответ: -1.

Если $a=0$, то $a=b=c=x_1=0$ и $c=0$, если считать, что $0x^2+0x+0=0$, 0-корень, то $c=0$.

Если $k=0$, то a, $b=0$, $c=0$, $x_1=0$ $ax^2=0$, $x=0$ - корень, то и $c=0$.

№2.



Если биссектрисса, перпендикулярна медиане, то $\triangle ABM$ - равнобедренный и $BM=LM$ (медиана)

$\Rightarrow BC=2AB$, пусть $AB=x \Rightarrow BC=2x$ и

и $AC=1200-3x$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4{,}5$

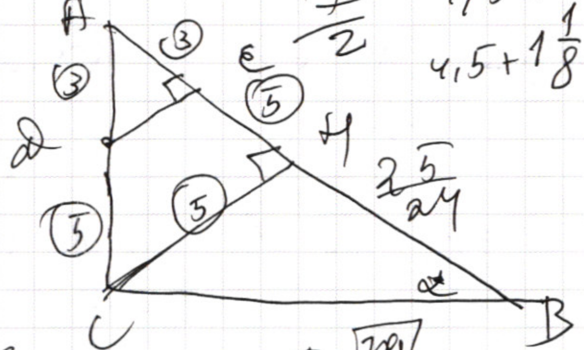
$\frac{7}{2}$ $4{,}5 \geq$

$4{,}5+1\frac{1}{8} \geq \frac{3}{2}a + \frac{1}{4}a$

$\frac{9}{4}+\frac{9}{8}$

$\frac{27}{8}$

$ctg\,\alpha = \frac{5}{8}$



ctg

$HB = CH \cdot \frac{8}{5}$

$\frac{5\sqrt{89}}{8}$

$\frac{8}{4}$ $\frac{9}{4}$

8 $\frac{27}{8}$

$\frac{3}{2}+2$

6 $\frac{1}{4}\cdot 4$ $1{,}5+$

$\frac{CH}{HB}$

$\frac{3}{5}\cdot$ $\frac{3x}{8x+\frac{25}{24}x}$

$HB = \frac{5}{8}\cdot CH$

$\frac{25}{24}$

$\frac{3}{5}$

$-\frac{1}{4}+\left|\frac{3}{2}\right| =$

$\frac{72}{192+25} =$

$=3$ $= \frac{6}{4}-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

$= \frac{72}{217}$

$4{,}5 \geq \frac{3}{2}a + b \geq 2$

$\frac{5}{4} \geq -\frac{1}{4}a + b \geq -1\frac{1}{8}$

$-\frac{9}{8}\cdot 6 =$

$= -\frac{27}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

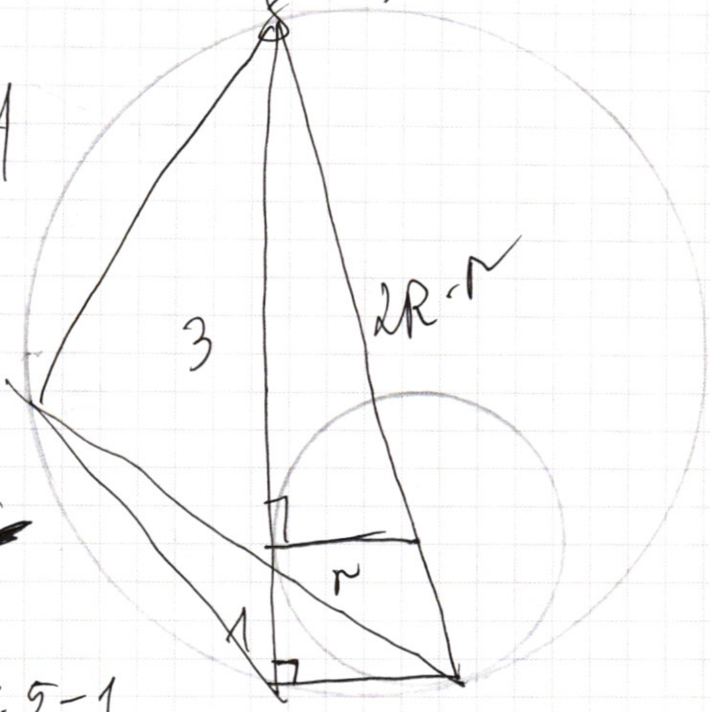
(Нумеровать только чистовики)

$-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=\frac{5}{4}.$

$\frac{3}{8}-1$ $\qquad \frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1$ $\qquad -\frac{5}{6}$

$4r^2-2r^2=\frac{9}{4}$ $\qquad \frac{3}{8}-1$ $\qquad r^2+9=4R^2-4Rr+r^2$

$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}$ $\qquad r^2=\frac{5}{8} \Rightarrow r=\frac{3}{2\sqrt{2}}$ $\qquad R^2-Rr=\frac{9}{4}.$



$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1$

$\frac{2R-r}{r}=\frac{3}{1}$

$\frac{1}{8}-1$ $\qquad \frac{2R}{r}=4$

$\frac{R}{r}=2$

$-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\ \frac{5}{4}$

$4{,}5-1{,}5-1$

$=2$ $\qquad \sqrt{\frac{2}{3}}$ $\qquad 3{,}5+7{,}5$

$\frac{11}{7}$

$1+\sqrt{\frac{1}{6}}\ ;\ 2+4\sqrt{\frac{1}{6}}.$

$x \qquad y$

$y-2x=2+4\sqrt{\frac{1}{6}}-2-2\sqrt{\frac{1}{6}}=2\sqrt{\frac{1}{6}}.$

$\sqrt{(x-1)(y-2)}=\sqrt{4\sqrt{\frac{1}{6}}}.$

$2\left(1+\sqrt{\frac{1}{6}}\right)^2+\left(2+4\sqrt{\frac{1}{6}}\right)^2-4\left(1+\sqrt{\frac{1}{6}}\right)-4\left(2+4\sqrt{\frac{1}{6}}\right)+3$

$2+\cancel{4\sqrt{\frac{1}{6}}}+\frac{1}{6}+4+\frac{16}{6}+\cancel{16\sqrt{\frac{1}{6}}}-4-\cancel{4\sqrt{\frac{1}{6}}}-8-\cancel{16\sqrt{\frac{1}{6}}}+3=0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$2x^2-x-1$

$(2x+1)(x-1)$

$2\cdot\frac{1}{16}-\frac{1}{4}-1$

$\frac{1}{8}-\frac{1}{4}-1=-1\frac{1}{8}$

$-\frac{b}{2a}=-\frac{-1}{4}$

$\frac{1}{4}$

$-\frac{1}{8}$

$(2x+1)(x-1)\le ax+b\le x+|2x-1|$

$-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}$

$\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-1$

$a \le 4$

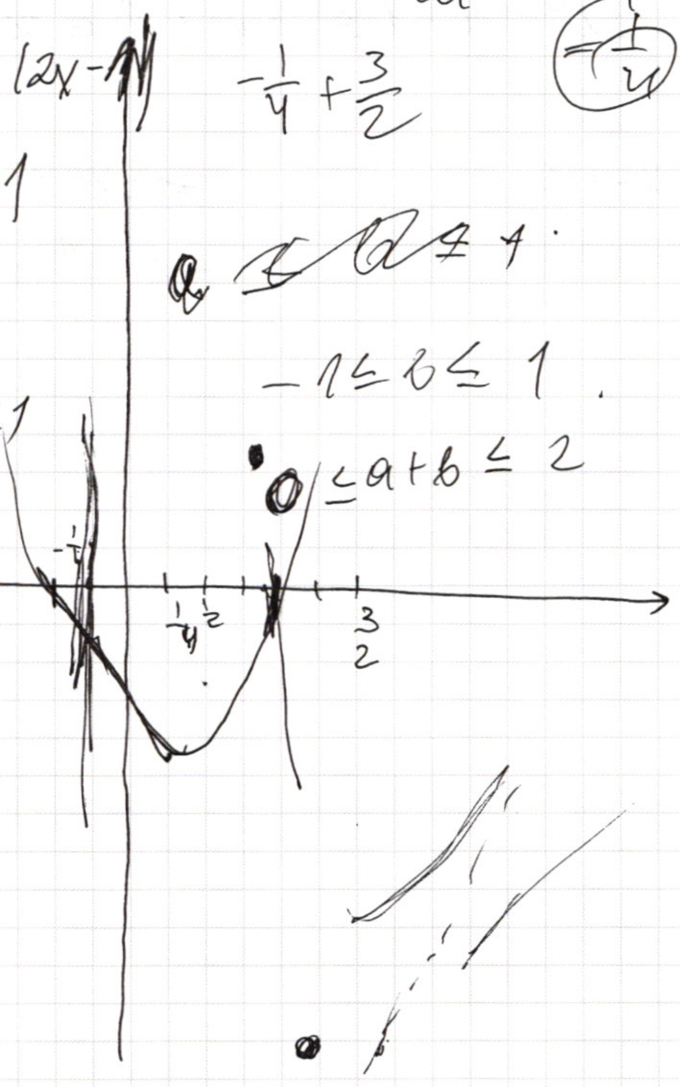
$-1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$

$-1\le b\le 1$

$-1\le a\le 1$

$0\le a+b\le 2$

$\underline{1\le a\le 3}$



$2x^2-x-1$

$2\cdot\frac{9}{4}-\frac{3}{2}-1=2$

$2x^2-x-1=x+|2x-1|$

$2x^2-2x-1=|2x-1|$

1) $x>\frac{1}{2}$: $2x^2-2x-\cancel{1}=2x-\cancel{1} \to 2x^2-4x=0$

$x^2-2x=0$

2) $x\le\frac{1}{2}$ $\quad 2x^2-\cancel{2x}-1=-\cancel{2x}+1$ $\quad -1\frac{1}{8}\le-\frac{1}{4}a+b$

$x=-1.$

$\le-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}$

$=\frac{5}{4}.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|$

$2x^2 - x - 1 \le$

$x + 2x + 1$

$-x + 1$

$x \in [-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}]$

$2x^2 - x - 1 = -x + 1$

$2x^2 - 2 = 0$

$x = 1$

$x = -1.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

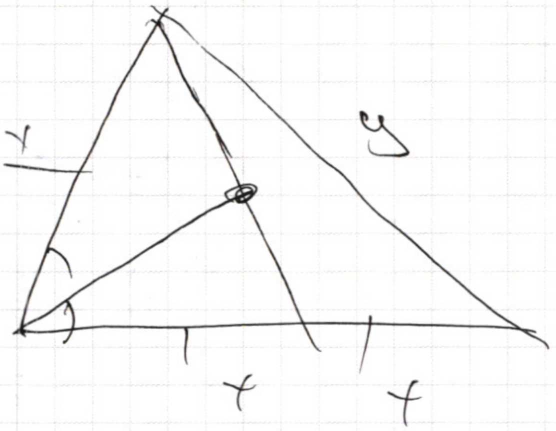
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$3x > y > x$

$3x + y = 1200$

$6x > 3x + y > 4x$

$6x > 1200 > 4x$

$3x > 1200 - 3x > x$

$300 > x > 200$

$4x$

$y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}$

201 299

99

$y > 2x$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - (2x+y) + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - (2x+y) + 2 \\ 2x^2 + y^2 - 4(x+y) + 3 = 0 . \end{cases}$$

$k =$

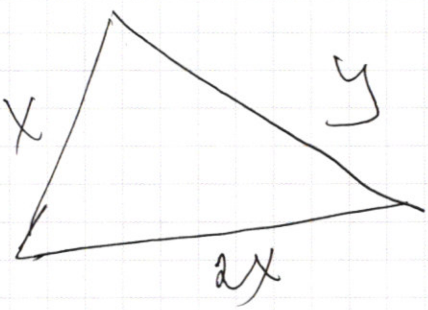
$f\left(\frac{21}{2}\right) = f(21) + f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(1) = 0$

1200

$f(2) = 1$



$f(3) = 1$

$f(4) = 2$

$f(5) = 2$

$f(6) = 2$

$x < y < 3x$

$f(7) = 3$

$f(20) = f(2) + f(2) + f(1)$

$f(8) = 3$

$f(17) = 8$

$f(18) = 3$

$f(19) = 9$

$f(20) = 4$

$f(21) = 4$.

$\cancel{x} < 1200 3x < 3x$

300.

$\cancel{300} > x > \cancel{2}00$

$f(9) = 2$

$f(10) = 3$

$f(11) = 5$

$f(12) = 3$

$f(13) = 6$

$f(14) = 4$

$f(15) = 3$

$f(16) = 4$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$2x^2 - x - 1 = \quad x + |2x - 1|$

$2x^2 - x - 1 = -x + 1$

$x = \pm 1$

$2x^2 - x - 1 = 3x - 1$

$-\cancel{1} \; b \le 1$

$2x^2 - 4x = 0$

$2x(x-2) = 0$

$0.$

$f(b) = f(1) + f(b)$

$f(1) = 0.$

$f(b) = f(a) + f(b)$

$f(2p) = f(2) + f$

$(2x+1)(x-1) \le ax + b \le x + |2x - 1|$

$-x + |2x - 1|$

$-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}$

$-\frac{1}{4}; 1.$

$-\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{2}.$

$3x - 1$

$-1 \le b \le 1$

$1 \le b \le \cancel{1}$

$x \le \frac{1}{3}$

$0 \le a + b \le 2$

$a \ge -b \quad 1 \ge a \ge -1$

$-\frac{1}{4}; \frac{1}{3}.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

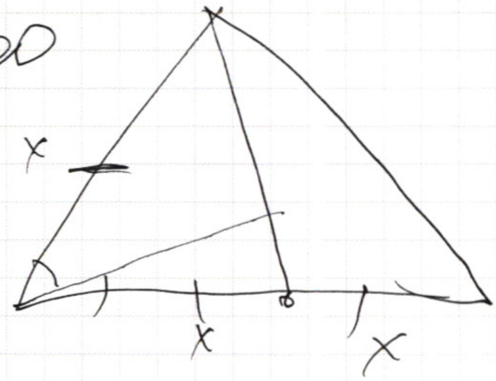
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a \quad b \quad c \quad x$ $\qquad 3x+y=1200$

$a \quad ak \quad ak^2 \quad ak^3$

$2x<x+y$

$3x>y>x$



$ax^2+2bx+c=0$

$D=4b^2-4ac$

0

$$x_{1,2}=\frac{-2b\pm2\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$$ak^3=-\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$2a^2k^3=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$$

$b^2>4ac.$

$(ak)^2>4a^2k^2$

$1>4$

$a,\ k=0$

$4b^2-4ac>b^2>ac$ $\quad -1$

$a^2k^2>a^2k^2$

$k^3=-\frac{k}{a}$

$\frac{-b}{a}=ak^3$ $\qquad k=\sqrt[3]{\frac{b}{a^2}}$

$-\frac{b}{a}\cdot ak=-\frac{1}{k^2}$

$ax^2+2bx+c$ $\qquad k=\sqrt[3]{\frac{k}{a}}$

$x_{1,2}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$

$D=4b^2-4ac=0.$

$ak^3=-\frac{b}{a} \qquad a^2k^3=-b \qquad k=\sqrt[3]{\frac{-b}{a^2}}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

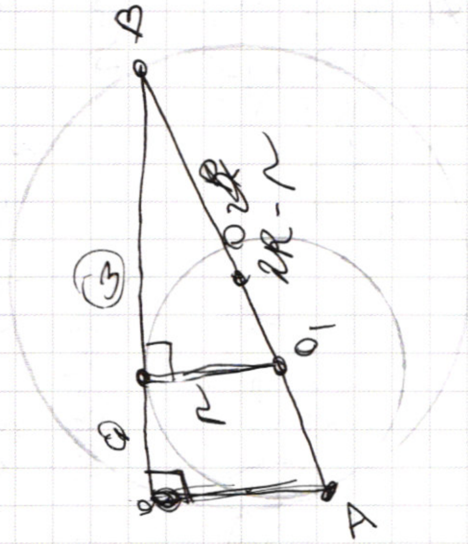
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{2R-r}{2R} = \frac{3}{4}$

$9 + r^2 = (2R-r)^2$

$9 + R^2 = 4R^2 - 4Rr + r^2$

$\frac{9}{4} = R^2 - Rr$

$R(R-r) = \frac{9}{4}$

$1 = 1$

$9 - 4 + 3 = 0$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{2}\right]$.

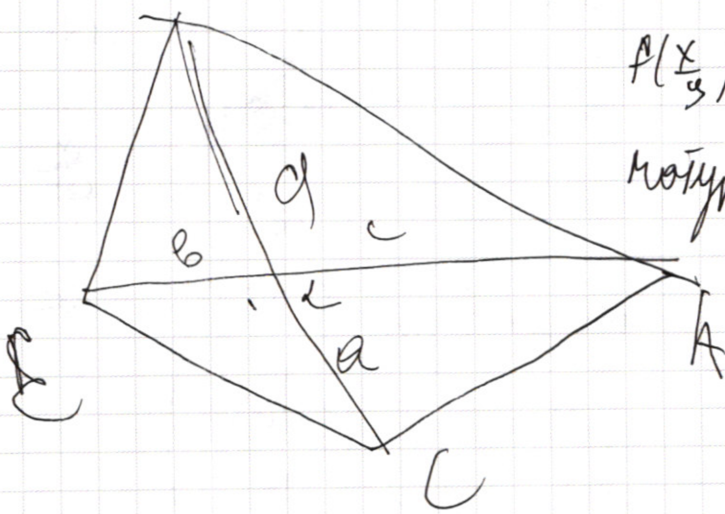
$1 \le x \le 21$

$1 \le y \le 21$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

натуральные

$\begin{cases} R(R-r) = \frac{9}{4} \\ \frac{r}{2R} = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R(R-r) = \frac{9}{4} \\ 1 - \frac{r}{2R} = \frac{3}{4} \end{cases}$



$\frac{1}{2}\sin\alpha \cdot ac + \frac{1}{2}\sin\alpha\, a \cdot b =$

$= \frac{1}{2}\sin\alpha\, a(b+c)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\frac{2R}{r} = 4$

$\frac{R}{r} = 2$

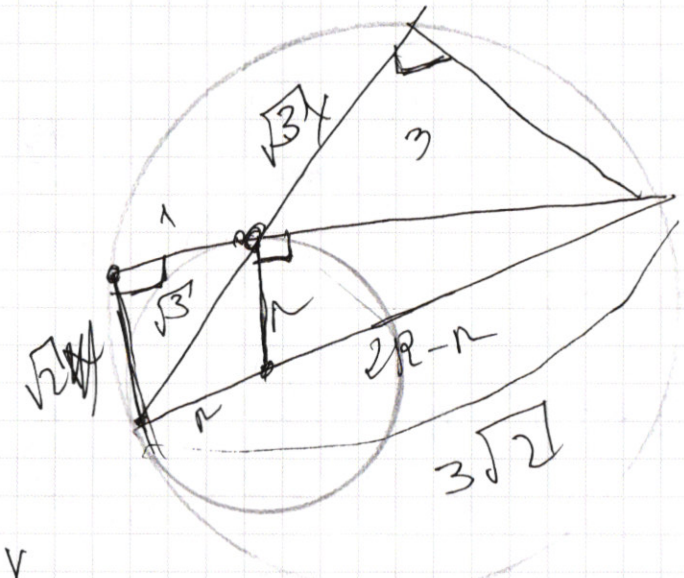
$\frac{2R-r}{r} = \frac{4}{3}$

$2\frac{R}{r} = \frac{7}{3}$

$\frac{R}{r} = \frac{2}{3} \to R = \frac{2}{3}r$

$R^2 - Rr = \frac{9}{4}$

$\sqrt{3} \cdot x$



$4 \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

$3\sqrt{2}$

$\cancel{r^2 + (2R-r)^2 = 9}$

$9 + r^2 = (2R-r)^2$

$9 + r^2 = 4R^2 - 4Rr + r^2$

$\frac{3}{4}$ $\frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{3}$

$\cancel{2R-r}$

$\sqrt{2}$

$\frac{2R}{r} = \frac{3}{4}$

$\cancel{\frac{2R}{2R-}}$

$\cancel{\frac{2R-r}{2R}}$

$r = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

$\cancel{\frac{4}{3}r^2 - \frac{2}{3}r^2 = \frac{9}{4}}$

$4r^2 - 2r^2 = \frac{9}{4}$

$2r^2 = \frac{9}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases} \to 2(x^2-4x+1)+y^2-4x+4=3$$

$$2(x-1)^2+(y-2)^2=3.$$

$a=x-1$

$b=y-2$

$y-2x=b-2a$

$$2a^2+b^2=3$$

$xy-2x-y+2$

$=a\cdot b$

$$\begin{cases} 2a^2+b^2=3 \\ b-2a=\sqrt{ab} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^2+b^2=3 \\ b^2+4a^2=5ab \end{cases} \Rightarrow$$

$b^2+4a^2-5ab=0$

$1+4k^2-5k=0 \qquad a=\pm 1$

$(4k-1)(k-1)=0$

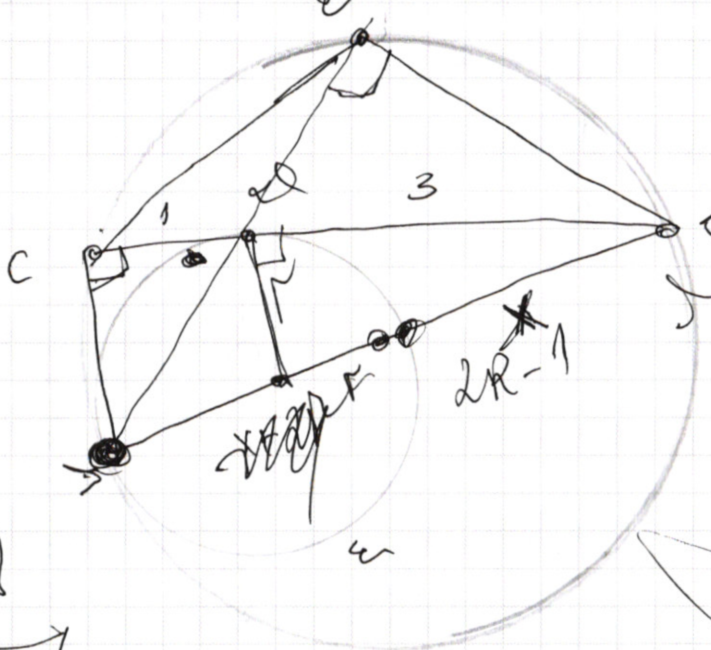
$$\left[\begin{array}{l} k=\frac{1}{4} \\ k=1 \end{array}\right.$$

$x = R - r$

$x(x+2r) = 9$

$2x + 2r = 2R$

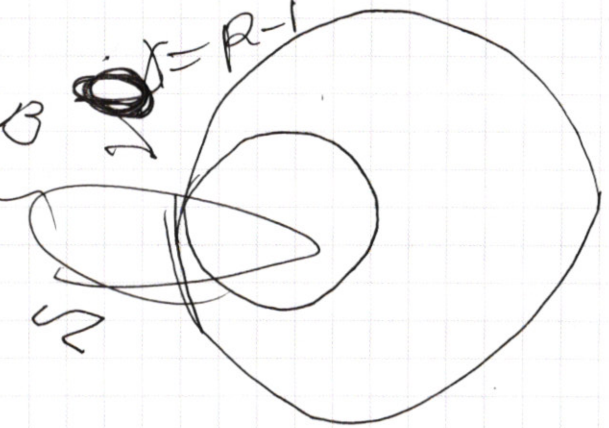
$x^2 + 2rx = 9$

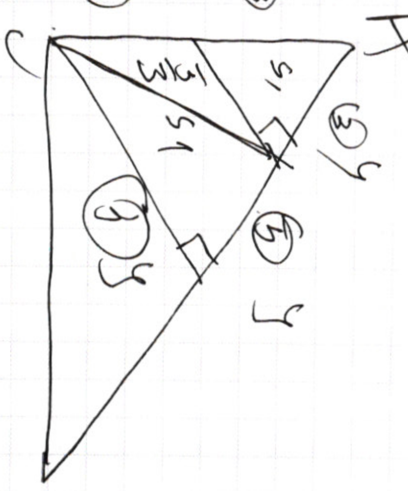


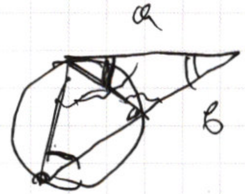
$\frac{5-\sqrt{29}}{8}$

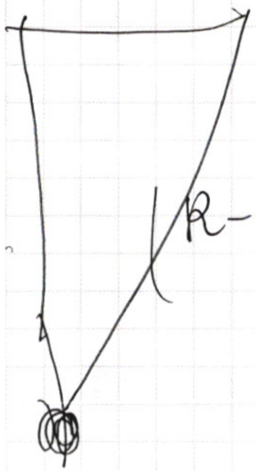
$\sqrt{29}$

$x = R - r$









$(R-r)(R+r) = 9$

$R^2 - r^2 = 9.$

$(2R-r)^2 + \cancel{R^2} = 9 + r^2$

$CB = \frac{\sqrt{29}\,5}{8}$

$\frac{CB}{AC} = \frac{5}{8}$

$\frac{a}{b} = \boxed{\frac{29 \cdot 89}{64}}$

$29y + \frac{29 \cdot 25}{64}$

$y = \sqrt{\frac{29}{89}}$

$89y^2 = 29$

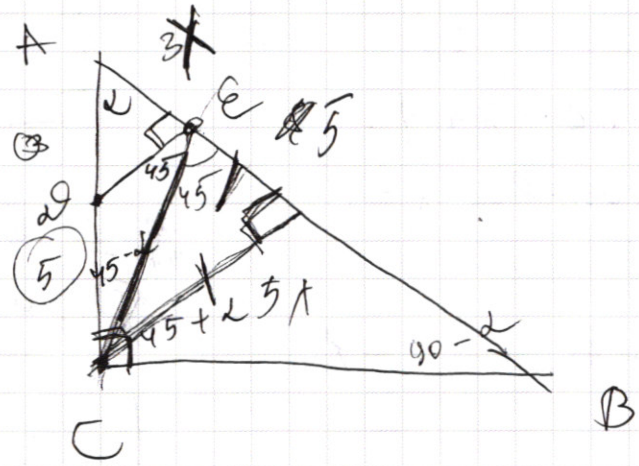
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\sqrt{29}$

$ax+b$

$tg\,\alpha = \frac{BC}{AC}$

$tg\,\alpha = \frac{DE}{AD}$

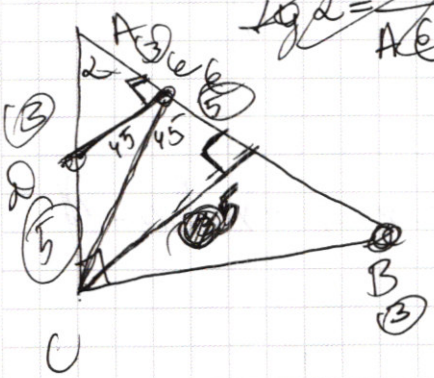
$\sin\alpha = \frac{DE}{AD}$

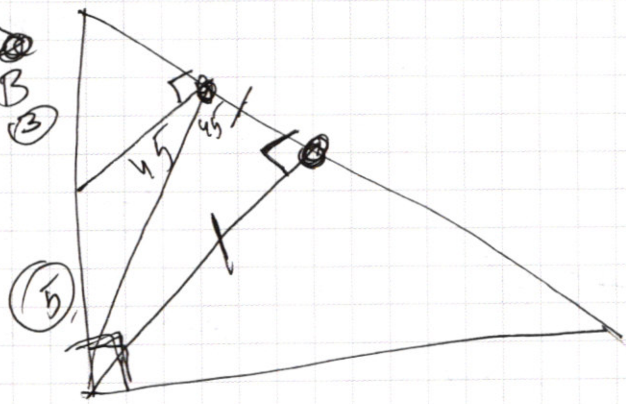
$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$

$\cancel{tg\,\alpha = \frac{DE}{AE}}$

$tg\,\alpha = \frac{BC}{8x} = \frac{DE}{3x}$

$\rightarrow \frac{BC}{DE} = \frac{8}{3}$





$\frac{AC}{AE} = \frac{8}{3}$

$\frac{8x}{AC} = \frac{8}{3}$

$AC = 3x$

$\frac{5}{8}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(x) = \alpha \cdot [\frac{B}{2}$

$- f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$2x^2-x-1 \le ax+b \le x+|2x-1|$

$2x^2-x-1 \le ax+b \le x-2x+1$ $\quad x < \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ $\quad \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$

$2x^2-x-1 \le ax+b \le -x+1$.

$(2x+1)(\cancel{x+1}) \le ax+b \le -x+1$.

$\cancel{-1} \le b \le 1$

$0 \le a+b \le 1$

$=\frac{1}{2}; 1 \quad ax+b \le -x+1$

$(a+1)x+b-1 \le 0$

$\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$

$2x^2-x-1 \le ax+b$

$2x^2-x(a+1)-1-b \le 0$.

$2x^2-x-1 = x+|2x-1|$

$x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$

$2x^2-x-1 = x-2x+1$

$2x^2-2=0 \rightarrow x=\pm 1$

$x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$

$2x^2-x-1 = 3x-1$

$2x^2-4x=0$

$2x(x-2)=0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)