МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1.

Дано: h_n - геом пр. $h_0 = a$, $h_1 = b$, $h_2 = c$ $\quad \frac{h_{i+1}}{h_i} = d$.

$ax^2 + 2bx + c = 0.$

$ax^2 + 2\sqrt{ac}\,x + c = 0.$

$(x\sqrt{a} + \sqrt{c})^2 = 0.$

$x\sqrt{a} + \sqrt{c} = 0.$

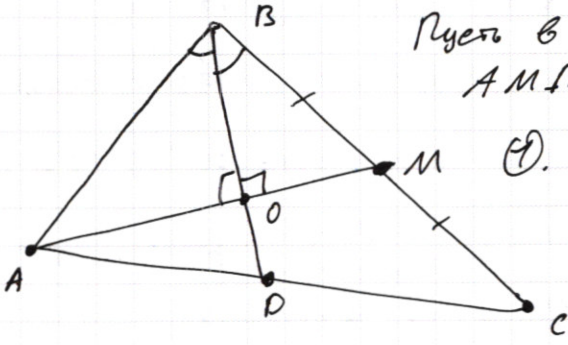
$x = -\sqrt{\frac{c}{a}} = -\sqrt{d^2} = -d = h_3.$

$c = h_2 = \frac{h_3}{d} = \frac{-d}{d} = -1.$

Ответ: -1.

Задача 2

1 допустим, что медиана и биссектриса выходят из одной вершины и угол между ними $= 90°$. Такое невозможно, т.к. угол между биссектрисой и стороной < 90, а медиана лежит между сторонами. Значит, они выходят из различных углов.



Пусть в $\triangle ABC$: AM - медиана; BD - бис; $AM \cap BD = O$; $\angle BOA = 90°$.

(1). $\underbrace{\angle ABO = \angle MBO}_{BO - бис}$; $\angle AOB = \angle MOB = 90°$; $OB = OB \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = BM = MC = a.$

(2) По св. бис; $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow$

$\Rightarrow AD = b;\ DC = 2b.$ $\Rightarrow AB = a;\ BC = 2a;\ AC = 3b$

Это условие является необходимым и достаточным (доказывается аналогично), поэтому.

Остается проверить, удовлетворяют стороны нерав. треугольника.

Задача 2. Продолжение.

Итого: мы ищем количество троек $(a, 2a, 3b)$ таких, что $a, b \in \mathbb{N}$; $3a+3b=1200 \Leftrightarrow a+b=400 \Leftrightarrow b=400-a$;

$$\begin{cases} a+2a>3b \\ 3b+2a>a \\ 3b+a>2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>b \\ b>-\frac{a}{3} \\ b>\frac{a}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a>b \\ 3b>a \end{cases}} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{a>400-a} \\ \cancel{1200-3a>a} \end{cases}$$

$$\cancel{\Rightarrow \begin{cases} a>300 \\ a<400 \end{cases}} \Rightarrow \begin{cases} a>400-a \\ a<1200-3a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>200 \\ a<300 \end{cases}$$

Всего существует 99 таких a, ~~которые~~, из которых восстанавливаются $2a$; $3b$, удовлетворяющие условие.

Далее я считаю, что условие сформулировано нечетко: неясно, что считать различными ~~треугольниками~~ треугольниками. ~~Если нас интересует~~

Если мы считаем треугольники, у которых различны <u>все</u> стороны, то ~~их 99~~ мы считаем их так: Всего троек не больше 99, но возможно, что некоторые из них задаются разными значениями a. Если в выделенной системе выразить a через b и подставить, то оказывается, что $\begin{cases} b<400-b \\ 3b>400-b \end{cases}$; $b \in (100; 200)$. Значит, ни при каких значениях a, b не может повторить сторону.

Ответ: 99.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

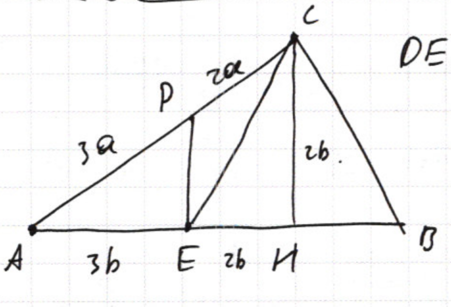
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4



Дано: $\triangle ABC$: $\angle C = 90°$; $D \in AC$; $AD = 3a$; $AC = 5a$. $DE \perp AB$; $E \in AB$; $tg \angle CAB$ - ?

б): $AC = \sqrt{29}$ S_{DCEP} - ?

Решение:

1. Д.п. CE; $CH \perp AB$; $H \in AB$.

2. $\triangle ACH \sim \triangle ADE$ ($\angle A = \angle A$; $\angle DEA = \angle CHA = 90°$) $\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AH}$; $AE = 3b$

$AH = 5b \Rightarrow EH = AH - AE = 2b$.

3. $CH \parallel DE$ ($\angle DEA = \angle CHA = 90°$ - соотв при DE; CH; EH - сек) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DEC = \angle ECH = 45°$ (накр леж при $DE \parallel CH$; EC - сек).

4. $\triangle ECH$: $EH = 2b$; $\angle H = 90$; $\angle C = 45°$ $\Rightarrow \angle E = 45° = \angle C \Rightarrow CH = EH =$
$= 2b$.

5. $\triangle ACH$: $AH = 5b$; $CH = 2b$; $\angle H = 90° \Rightarrow tg \angle CAH = \frac{CH}{AH} = \underline{0,4}$.

6. $\triangle ACH$: $\angle H = 90$; $AH = 5b$; $CH = 2b$; $AC = 5a = \sqrt{29}$.

По т. Пифагора: $AH^2 + CH^2 = 25b^2 + 4b^2 = 29 = AC^2 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$.

7. $\triangle ADE$: $tg \angle DAE = 0,4$; $AE = 3b$; $\angle E = 90 \Rightarrow \frac{DE}{AE} = tg \angle A = 0,4$.

$DE = 0,4\, AE = 0,4 \cdot 3b = 1,2\, b. = 1,2$.

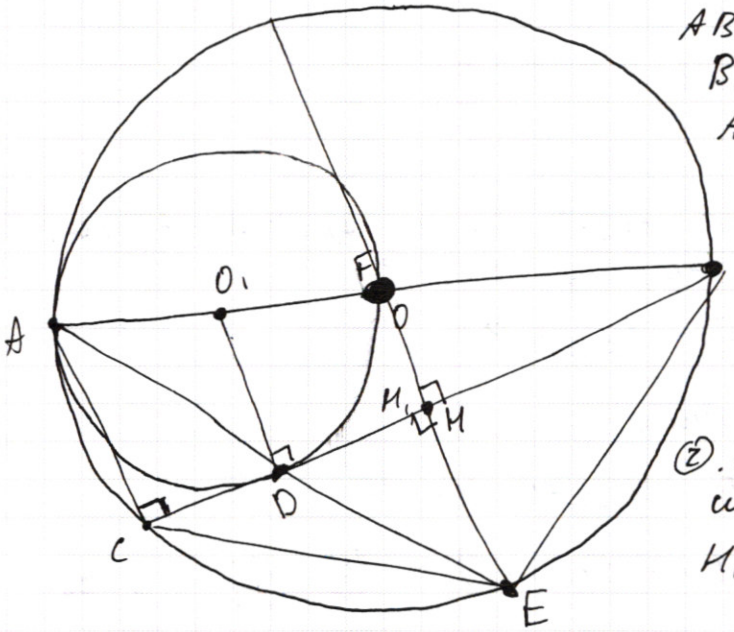
8. $S_{\triangle DCE} = \frac{DE \cdot EH}{2} = \frac{1,2 \cdot 2}{2} = 1,2$. т.к. $DE \perp EH$; $EH \perp CH$.

Ответ: 0,4; 1,2.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 5

Дано: окр $\Omega(O;R)$; окр $\omega(O_1;r)$ касаются внутр. обр. в A.
AB - диаметр Ω.
BD - касательная к ω. $BD \cap \Omega = C$.
$AD \cap \Omega = E$; $CD = 1$; $BD = 3$.
Найти: R; r; S_{BACE}.



① По лемме Архимеда $\cup CE = \cup BE \Rightarrow CE = EB \Rightarrow$ E лежит на сер. перп. к CB.

② Д.П. OH - сер. пер. к CB; $\omega \cap AB = F$; $O_1D \perp BC$; $FH_1 \perp BC$; $H_1 \in BC$;

③. $CA \perp CB$; $DO_1 \perp CB$; $H_1F \perp CB$; $AO_1 = O_1F \Rightarrow CD = DH_1 = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ ~~...~~. $CH_1 = 2$.

④. HO - сер. пер. $\Rightarrow CH = HB = \frac{CD + HB}{2} = 2 = CH_1 \Rightarrow H_1 \equiv H$.

⑤. $H_1F \perp BC$; $F \in AB$; $HO \perp CB$; $O \in AB$; $H \equiv H_1 \Rightarrow F \equiv O \Rightarrow R = 2r$.

⑥. $AO = OB = AO_1 + O_1O = 2r. \Rightarrow BO_1 = 3r$.

$\triangle BDO_1$: $\angle BDO_1 = 90°$; $BD = 3$; $O_1D = r$; $BO_1 = 3r$.

По т. Пифагора: ~~...~~ $BD^2 + O_1D^2 = 9 + r^2 = 9r^2 = O_1B^2 \Rightarrow r^2 = \frac{9}{8}$.

$r = \frac{3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow R = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

⑦. $\triangle BDO_1 \sim \triangle BHO$ ($\angle B = \angle B$; $\angle O_1DB = \angle OHB = 90°$) $\Rightarrow \frac{O_1D}{OH} = \frac{O_1B}{OB} = \frac{3}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow OH = \frac{2}{3}O_1D = \frac{2}{3}r = \frac{1}{\sqrt{2}}$

⑧ $\triangle BOH \sim \triangle BAC$ ($\angle B = \angle B$; $\angle ACB = \angle OHB = 90°$) $\Rightarrow \frac{AC}{OH} = \frac{AB}{OB} = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow AC = 2OH = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

⑨ $S_{BACE} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle CBE} = \frac{AC \cdot CB + CB \cdot HE}{2} = \frac{CB}{2} \cdot (AC + HE) =$
$= 2(\sqrt{2} + OE - OH) = 2(\sqrt{2} + R - \frac{1}{\sqrt{2}}) = 2(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}) = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$.

Ответ: $\frac{3}{2\sqrt{2}}$; $\frac{3}{\sqrt{2}}$; $4\sqrt{2}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7: 1: $f(1)=f(1)+f(1)=2f(1) \Rightarrow f(1)=0$.

2: $\forall x$-простое число: $f(x) \in \mathbb{N}$ т.к. $f(2)=1$, а дальше простые числа увеличиваются, так что $[\frac{x}{2}]$ не уменьшается; $\cancel{[\frac{x}{2}]}$

$\cancel{\forall x \in \mathbb{N}}$: $\left[\frac{x}{2}\right] \in \mathbb{Z}$

3: $\forall x \in \mathbb{N}$, $x>1$: $f(x) \in \mathbb{N}$ т.к. x либо простой, тогда все доказано

либо x раскладывается в произведение простых, значит, $f(x)$ является суммой натуральных.

4: $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) = f(x \cdot x \cdot \frac{1}{x}) = f(x \cdot x) + f(\frac{1}{x}) = 2f(x) + f(\frac{1}{x})$

$f(x) = 2f(x) + f(\frac{1}{x}) \Rightarrow f(\frac{1}{x}) = f(x) \cdot (-1)$

5: $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$.

Составим таблицу значений $f(x)$ при $x \in \mathbb{N}$, $x \le 21$, исходя из простоты x или разложения на простые.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$f(x)$	0	1	1	2	2	2	3	3	2	3	5	3	6	4	3	4	8

x	18	19	20	21
$f(x)$	3	9	4	4

~~Для каждого из этих чисел посчитаем A(x) — количество~~

Для каждого встреченного $f(x)$ посчитаем сколько раз оно встретилось при $x \in \mathbb{N}$; $x \le 21$.

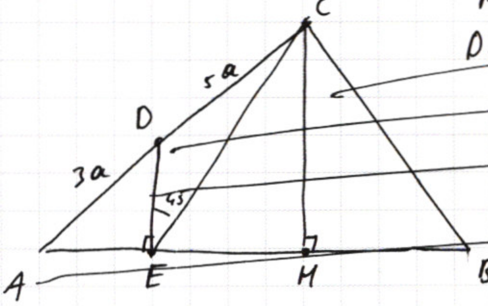
0: 1 раз
1: 2 раза.
2: 4 раза
3: 6 раз
4: 4 раза
5: 1 раз
6: 1 раз
8: 1 раз
9: 1 раз.

Т.к. $f(\frac{x}{y})<0 \Leftrightarrow f(x)-f(y)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(y)$, для каждого встреченного $f(x)$ посчитаем количество встреченных $f(x)$ меньше и просуммируем. Это и будет ответом.

$1+3+7+13+17+18+19+20 = 20+20+18+20+20 = 98$.

Ответ: 98 пар.

Задача 4.



Дано: $\triangle ABC$: $\angle C = 90^\circ$; $D \in AC$; $AD = 3a$; $DC = 5a$; $DE \perp AB$; $E \in AB$; $tg \angle CAB$ - ?

б): $AC = \sqrt{29}$ $S_{\triangle CED}$ - ?

Решение:

1. Д.п. $CH \perp AB$; $H \in AB$.

2. $\triangle ACH \sim \triangle ADE$ ($\angle A = \angle A$; $\angle DEA = \angle CHA = 90^\circ$) $\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AH}$

$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AC}{}$ $AE = 3b$; $AH = 8b \Rightarrow$ $EH = 5b$.

3. $CH \parallel DE$ ($\angle DEA = \angle CHA = 90^\circ$ - соотв при DE; CH; EH - сек)

$\Rightarrow \angle DEC = \angle ECH = 45^\circ$ (накр леж при $DE \parallel CH$; EC - сек).

4. $\triangle ECH$: $EH = 5b$; $\angle H = 90^\circ$; $\angle C = 45^\circ \Rightarrow \angle E = 45^\circ = \angle C \Rightarrow CH = EH = 5b$.

5. $\triangle ACH$: $AH = 8b$; $CH = 5b \Rightarrow tg \angle CAH = \frac{5b}{8b} = \frac{5}{8} = 0{,}625$.

6: $\triangle ACH$: $\angle H = 90^\circ$; $AH = 8b$; $CH = 5b$; $AC = 8a = \sqrt{29}$

По Т Пифагора: $AH^2 + CH^2 = 64b^2 + 25b^2 = 89b^2 = 29 \Rightarrow$

$\Rightarrow b = \sqrt{\frac{29}{89}}$

7. $\triangle ADE$: $tg \angle DAE = \frac{5}{8}$; $AE = 3b$; $\angle E = 90^\circ \Rightarrow \frac{DE}{AE} = tg \angle A = \frac{5}{8}$.

$DE = \frac{5}{8} \cdot 3b = \frac{15}{8} b$.

7. $S_{DCE} = \frac{DE \cdot EH}{2} = \frac{75 \cdot 5 b^2}{2 \cdot 8} = \frac{75}{16} \cdot \frac{29}{89} =$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

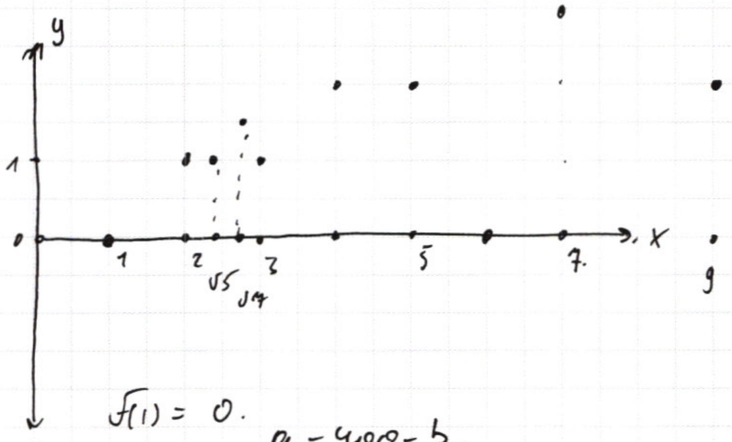
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab) = f(a) + f(b) \Rightarrow f(x) = 2f(\sqrt{x})$. $\Rightarrow f(1) = 0$.

$f(2) = 1$.



$f\left(\frac{2}{3}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{f\left(\frac{4}{9}\right)}{2}$.

$f(1) = 0$.

$f(2) = 1$ $\quad a = 400 - b$.

$f(3) = 1$ $\quad 400 - b > b$.

$f(4) = 2$ $\quad b > 200$.

$f(5) = 2$ $\quad 3b > 400 - b$.

$f(6) = 2$

$f(7) = 3$ $\quad 4b$.

$f(8) = 3$ $\quad \cancel{4b > 400}$

$f(9) = 2$ $\quad b > 100$.

$f(10) = 3$

$f(11) = 5$

$f(9) = \cancel{\ }$

$f(3) = f\left(9 \cdot \frac{1}{3}\right) = f(9) + f\left(\frac{1}{3}\right)$

$f(x) = f\left(x^2 \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x^2) + f\left(\frac{1}{x}\right) =$

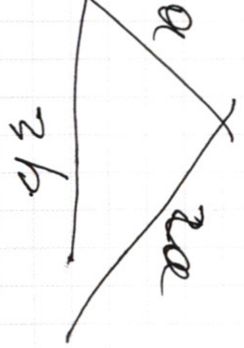
$= 2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$.

$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

1 $\quad$ ~~(...) все ок~~.

$x | y$: все ок

$y | x$: не работает.



$f\left(\frac{n}{m}\right) = f(n) + f\left(\frac{1}{m}\right)$

$f(x/y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y). < 0$.

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$2a = 1200 - 3a. \quad 5a = 1200.$

$a = 300.$ $\quad a = 12 \cdot 20 = 240.$

№1 $b = \sqrt{ac}.$ $\quad d.$ $\quad d = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \sqrt{\frac{c}{a}}$

$ax^2 + 2bx + c = 0.$

$ax^2 + 2\sqrt{ac}\,x + c = 0$

$(\sqrt{a}x + \sqrt{c})^2 = 0.$

$\sqrt{a}x + \sqrt{c} = 0.$

$\sqrt{a}x = -\sqrt{c}. \quad x < 0.$

$ax^2 = c.$

$x = \sqrt{\frac{c}{a}} = d.$

$2a.$

89

$\beta \; 7 \ldots 11.$

$\frac{5}{8} \cdot 3 \quad b.$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$

$\frac{a-c}{b-d}.$

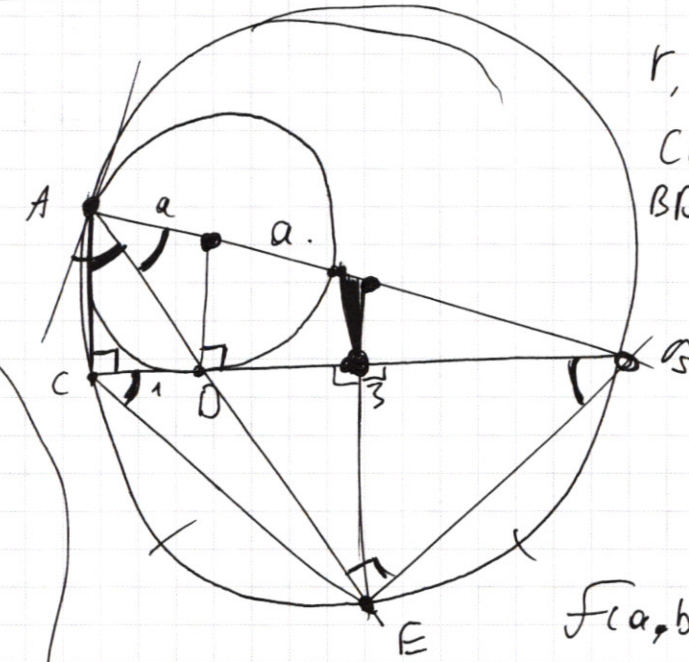
2 $\sqrt{1}$
4 $\sqrt{2}$
3
5 $\sqrt{}$
5 ~~3~~ $4\sqrt{2}.$
6
5

16 / 31.

$3 + 8 + 2 + 7$

$125 \cdot 5 = 625.$

$r, R - ?$
$CD = 1$
$BD = 3.$



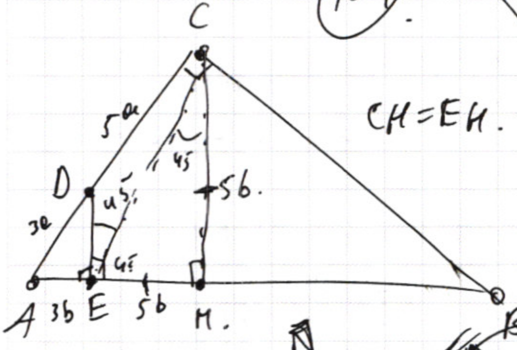
$f(a, b) = 2f(\sqrt{ab})$

$f(x) = 2f(\sqrt{x}).$

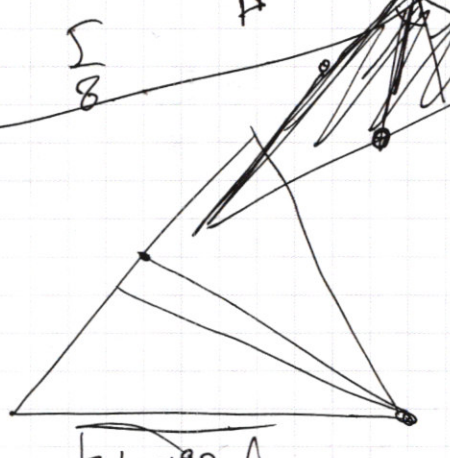
$f(1) = 0.$

№4.

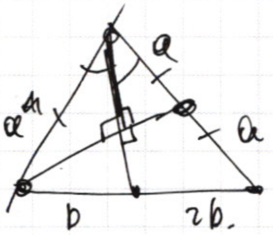
$CH = EH.$



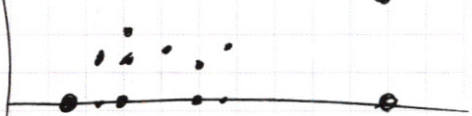
$\frac{5}{8}$



№2.



$\boxed{2\alpha < 180}$



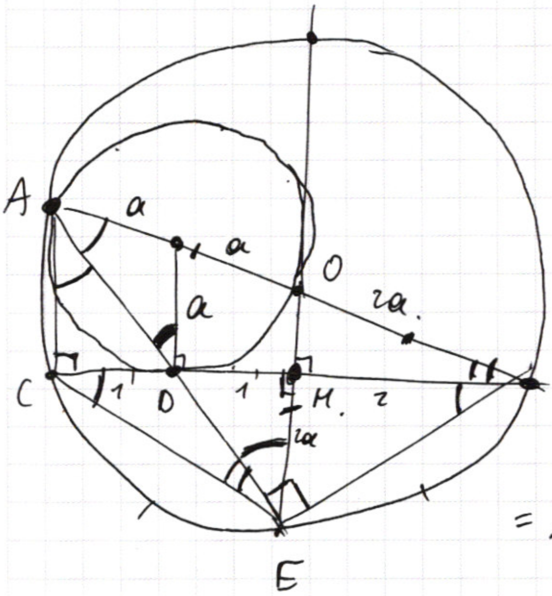
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$9a^2 = a^2 + 9$

$8a^2 = 9$

$$\boxed{a = \frac{3}{2\sqrt2} = r \qquad 2a = \frac{3}{\sqrt2} = R}$$

$AC = \frac{4}{2\sqrt2} = \sqrt2$

$HE = OE - OH = \frac{3}{\sqrt2} - \frac{1}{\sqrt2} = \sqrt2$

№1 стр.

$S_{BACE} = S_{ABC} + S_{CBE} =$

$= \frac{AC \cdot CB}{2} + \frac{CB \cdot EH}{2} = \frac{CB(AC + EH)}{2} = \frac{4 \cdot 2\sqrt2}{2} =$

$4\sqrt2$.

$2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + (2x-1)$.

$\{ \cancel{2x^2 - x - 1 - ax - b \le 0}$.

$\cancel{y - 2x \ge 0}$. ОДЗ: $y - 2x \ge 0$.

$xy - 2x - y + 2 \ge 0$.

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} & (1) \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x + y + 2$

$\cancel{y^2 + 4x^2 = 5xy}$

y^2

(1): $y - 2x = \sqrt{y(x-1) - 2(x-1)} = \sqrt{(y-2)(x-1)}$

$(y-2x)^2 = (y-2)(x-1)$.

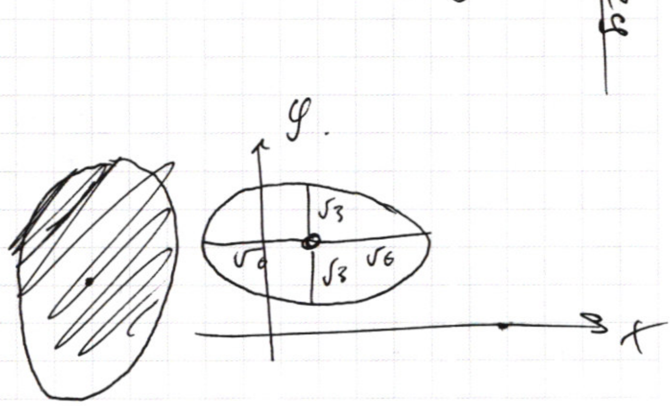
(2) = $2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$.

$\cancel{4x^2 + ... - 2x + 1 + y^2}$

$2x^2 - 4x + 2 + y^2 - 4y + 4 - 3 = 0$.

$2(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$.

эллипс.



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)