МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

a, b, c, d ← четвёртый член прогрессии

Пусть q – знаменатель прогрессии.

$b = aq$, $c = aq^2$, $d = aq^3$

d является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$

$ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$

Подставим d: $a \cdot (aq^3)^2 - 2aq \cdot (aq^3) + aq^2 = 0$

$a \cdot a^2 \cdot q^6 - 2a^2q^4 + aq^2 = 0$

$(aq^2)^3 - 2(aq^2)^2 + aq^2 = 0$

Замена: $t = aq^2$, $t \neq 0$ (первый член прогрессии и знаменатель не равны 0)

$t^3 - 2t^2 + t = 0 \quad | : t \neq 0$

$t^2 - 2t + 1 = 0$

$(t-1)^2 = 0$

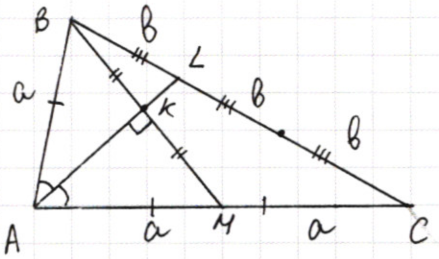
$t = 1$

Обратная замена: $aq^2 = 1$. Заметим, что $aq^2 = 1$ и есть третий член прогрессии, который нужно найти, поэтому ответ 1.

Ответ: 1.

Задача 2.

$P=900$, длины сторон треугольника являются целыми числами => натуральные (длины>0)



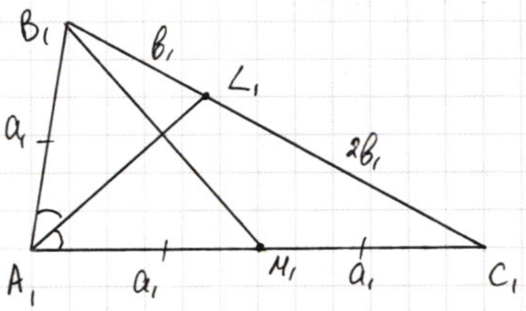
Пусть без ограничения общности в $\triangle ABC$ биссектриса ~~BL~~ AL и медиана BM – перпендикулярны (биссектриса и медиана из одной вершины не могут быть перпендикулярны, так как это означало бы, что угол, из вершины которого проведены такие медиана и биссектриса, $\geq 180°$).

Пусть $AL \cap BM = K$. в $\triangle ABM$: AK – высота и биссектриса => $\triangle ABM$ – равнобедренный => $AB=AM$

По свойству биссектрисы: $\frac{BL}{LC}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2}$. Пусть $AB=a$, $BL=в$, тогда $AC=2a$, $BC=3в$

При этом в треугольнике не может быть более одной пары медианы и биссектрисы, которые перпендикулярны (иначе получится, что одна из биссектрис параллельна одной из медиан, выходящей из другой вершины, чего быть не может (или параллельны 2 биссектрисы или 2 медианы, чего тоже быть не может)).

Рассмотрим треугольник, с произвольными длинами сторон, у которого одна из сторон в 2 раза больше другой:



Пусть это $\triangle A_1B_1C_1$, $A_1B_1=\frac{1}{2}A_1C_1$

M_1 – середина A_1C_1

$L_1 \in B_1C_1$, $\frac{B_1L_1}{C_1L_1}=\frac{1}{2}$

$A_1B_1=A_1M_1=C_1M_1=a_1$

$B_1L_1=в_1$, $L_1C_1=2в_1$

B_1M_1 – медиана

A_1L_1 – биссектриса (так как $\frac{B_1L_1}{L_1C_1}=\frac{A_1B_1}{A_1C_1}$)

$\triangle A_1B_1M_1$ – равнобедренный, A_1L_1 – биссектриса => она также и высота => $A_1L_1 \perp B_1M_1$

Таким образом, треугольники, описанные в условии задачи, – это треугольники, стороны которых равны a, $2a$, $3в$, где $a, 3в \in \mathbb{N}$, $3a+3в=900$

$a+в=300$

~~$a=300-в$~~ $в=300-a>0$ => $a \in \{1;2;3;\dots;299\}$, то есть есть 299 вариантов для a.

Значение $в$ определяется однозначно, поэтому всего есть 299 подходящих пар чисел a и $в$.

Значит, всего таких треугольников 299.

Ответ: 299

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3.

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+36y^2-12xy=xy-6y-x+6 \ (1) \\ x-6y\geq 0 \ (4) \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \ (3) \end{cases}$$

$(1)-(2)$: $34y^2-13xy+13x+10y-26=0$

$13x(1-y)+34y^2+10y-26=0$ | $y=1$ не корень, проверяется подстановкой

$$x=\frac{34y^2+10y-26}{13(y-1)} \ (5)$$

из (5) и (4): $\frac{34y^2+10y-26}{13(y-1)}-6y\geq 0 \Leftrightarrow \frac{34y^2+10y-26-78y^2+78y}{\cancel{13}(y-1)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{44y^2-88y+26}{y-1}\leq 0$

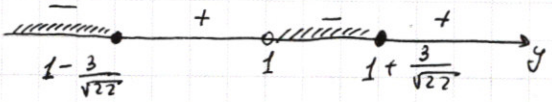
$$\frac{22y^2-44y+13}{y-1}\leq 0 \ (6)$$

Решим $22y^2-44y+13=0$

$D=44^2-4\cdot 22\cdot 13=44(44-26)=88(22-13)=88\cdot 9$

$$\left[\begin{array}{l} y_1=\frac{44-6\sqrt{22}}{44}=\frac{22-3\sqrt{22}}{22}=\frac{\sqrt{22}-3}{\sqrt{22}}=1-\frac{3}{\sqrt{22}} \\ y_2=1+\frac{3}{\sqrt{22}} \end{array}\right.$$

Вернёмся к (6): $\frac{\left(y-\left(1-\frac{3}{\sqrt{22}}\right)\right)\left(y-\left(1+\frac{3}{\sqrt{22}}\right)\right)}{y-1}\leq 0$



$$y\in\left(-\infty; 1-\frac{3}{\sqrt{22}}\right]\cup\left(1; 1+\frac{3}{\sqrt{22}}\right]. \ (7)$$

Подставим (5) в (3) и решим на (7):

$$\left(\frac{34y^2+10y-26}{13(y-1)}-6\right)^2+2(y-1)^2=18 \ \Big| \cdot (13(y-1))^2$$

$$(34y^2-68y+52)^2+2\cdot 169(y-1)^4=18\cdot 169(y-1)^2$$

№1

Задача 3 [продолжение].

$2(17(y^2-2y+1)+9)^2+169(y-1)^4=9\cdot169(y-1)^2$

$2(17(y-1)^2+9)^2+169(y-1)^4=9\cdot169(y-1)^2$

Замена: $t=(y-1)^2$; $t>0$ (так как $y\neq1$)

$2(17t+9)^2+169t^2=9\cdot169t$

$2\cdot289t^2+81\cdot2+2\cdot34\cdot9t+169t^2=9\cdot169t$

$747t^2-9\cdot101t+2\cdot81=0 \;|:9$

$83t^2-101t+18=0$

$\left[\begin{array}{l} t=1 \quad (83-101+18=0) \\ t=\frac{18}{83} \quad \text{(по теореме Виета)} \end{array}\right.$

Обратная замена: $\left[\begin{array}{l}(y-1)^2=1\\(y-1)^2=\frac{18}{83}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \quad >1+\frac{3}{\sqrt{22}} \Rightarrow \text{не подходит} \\ y=0 \quad \in(7) \\ y=\sqrt{\frac{18}{83}}+1 \quad \in(7) \\ y=1-\sqrt{\frac{18}{83}} \quad \notin(7)\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ \cancel{y=\ldots} \\ y=1+\sqrt{\frac{18}{83}}\end{array}\right.$

Сравнение чисел:

$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{83}}+\cancel{1} < \cancel{1}+\frac{3}{\sqrt{22}}$ $\qquad$ $\cancel{1}-\sqrt{\frac{18}{83}} > \cancel{1}-\frac{3}{\sqrt{22}}$

$\frac{18}{83} < \frac{9}{22}$ $\qquad$ $\frac{3}{\sqrt{22}} > \sqrt{\frac{18}{83}}$

$44<83$

Из (5): $x=\frac{34y^2+10y-26}{13(y-1)}$

если $y=0$, то $x=\frac{-26}{-13}=2$

если $y=1+\sqrt{\frac{18}{83}}$, то $x=\left(34\cdot\left(1+\frac{18}{83}+2\sqrt{\frac{18}{83}}\right)+10+10\sqrt{\frac{18}{83}}-26\right):\left(13\sqrt{\frac{18}{83}}\right)=$

$=\left(18+\frac{18\cdot34}{83}+58\sqrt{\frac{18}{83}}\right):13\sqrt{\frac{18}{83}}=\frac{18\sqrt{83}+\frac{18\cdot34}{\sqrt{83}}+58\sqrt{18}}{13\sqrt{18}}=\frac{\sqrt{18\cdot83}+34\sqrt{\frac{18}{83}}+58}{13}=$

$=\frac{83\sqrt{18}+34\sqrt{18}+58\sqrt{83}}{13\sqrt{83}}=\frac{117\sqrt{18}+58\sqrt{83}}{13\sqrt{83}}$

Ответ: $x=2, y=0$; $x=\frac{117\sqrt{18}+58\sqrt{83}}{13\sqrt{83}}$, $y=1+\sqrt{\frac{18}{83}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

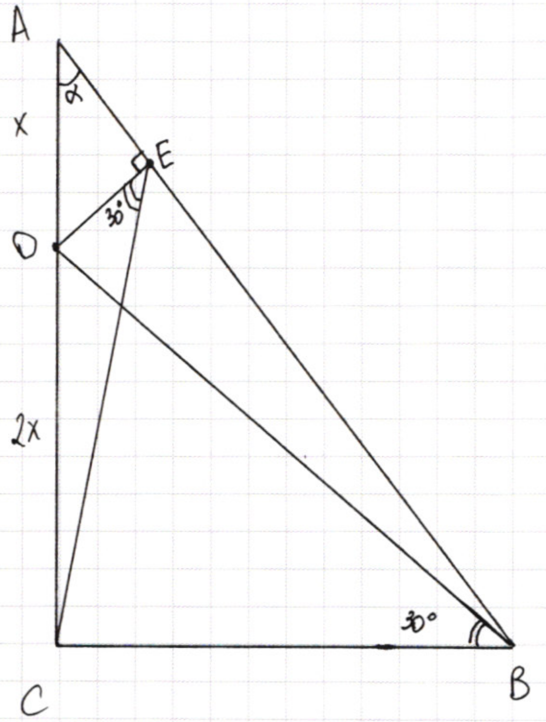
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4.



Дано: ΔABC – прямоугольный, $\angle C = 90°$

$D \in AC$, $AD : AC = 1 : 3$

$E \in AB$, $DE \perp AB$

$\angle CED = 30°$

а) Найти: $tg\angle BAC$ – ?

б) $AC = \sqrt{7}$

Найти: S_{CED} – ?

Решение:

а) 1. Пусть $AD = x$, $\angle BAC = \alpha$, тогда $CD = 2x$, $AE = x\cos\alpha$, $DE = x\sin\alpha$, $AB = \frac{3x}{\cos\alpha}$,

$BE = AB - AE = \frac{3x}{\cos\alpha} - x\cos\alpha = x \cdot \frac{3-\cos^2\alpha}{\cos\alpha}$, $\angle CDE = \angle AED + \angle DAE = 90° + \alpha$.

2. $\angle BCD + \angle BED = 180° \Rightarrow CDEB$ – вписанный $\Rightarrow \angle DBC = \angle DEC = 30°$ (опираются на одну дугу)

3. Из ΔBCD: $BD = 2CD = 4x$

4. по теореме Пифагора в ΔDEB: $BD^2 = DE^2 + BE^2$

$$16x^2 = x^2\sin^2\alpha + x^2 \cdot \frac{(3-\cos^2\alpha)^2}{\cos^2\alpha} \quad | : x^2 \neq 0, \cdot \cos^2\alpha$$

$$16\cos^2\alpha = (1-\cos^2\alpha)\cos^2\alpha + 9 + \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha$$
$$22\cos^2\alpha = \cos^2\alpha - \cancel{\cos^4\alpha} + 9 + \cancel{\cos^4\alpha}$$
$$21\cos^2\alpha = 9$$
$$\cos^2\alpha = \frac{3}{7}$$

$$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{7}{3} \Rightarrow tg^2\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{tg\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}} \ (\alpha - \text{острый})$$

Задача 4 [продолжение].

б) $S_{CED} = \frac{1}{2} CD \cdot DE \cdot \sin\angle EDC = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot x\sin\alpha \cdot \sin(90°+\alpha) = x^2 \sin\alpha \cos\alpha$

$AC = 3x = \sqrt{7} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$\cos^2\alpha = \frac{3}{7} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{3}{7}}$ (α-острый)

$\sin^2\alpha = \frac{4}{7} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$

$S_{CED} = x^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{\cancel{7}}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{7}}} \cdot \frac{2}{\cancel{\sqrt{7}}} = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{9}}$

Ответ: а) $tg\angle BAC = \frac{2}{\sqrt{3}}$

б) $S_{CED} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

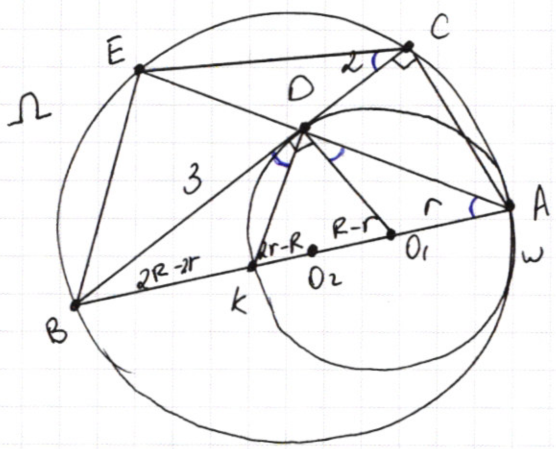
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5.

Дано: Ω – большая окружность, ω – маленькая окр.
Ω и ω – касаются внутренним образом в A.
AB – диаметр Ω, $C \in \Omega$, BC касается ω в D
$AD \cap \Omega = E$
$CD = 2$, $BD = 3$

Найти: радиусы Ω и ω – ?
S_{BACE} – ?



Решение:

1. AB – диаметр Ω $\Rightarrow$ O_2 – центр Ω – середина AB.
O_1 лежит на AO_2, пусть $AO_1 \cap \omega = k$, Ak – диаметр ω, $O_1k = O_1A$.
↑
центр ω

2. Пусть $AO_1 = O_1D = O_1k$ (как радиусы) $= r$, $O_2A = O_2B = O_2C = R$.
Тогда $O_1O_2 = R - r$, $kO_2 = 2r - R$, $Bk = 2R - 2r$

3. $\angle BCA$ опирается на диаметр AB $\Rightarrow \angle BCA = 90°$
4. BD – касательная к ω $\Rightarrow BD \perp O_1D$

5. $\Delta O_1BD \sim \Delta ABC$ по 2 углам ($\angle B$ – общий, $\angle BDO_1 = \angle BDA = 90°$) $\Rightarrow \frac{BO_1}{BA} = \frac{O_1D}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{5}$

$\frac{BO_1}{BA} = \frac{2R-r}{2R} = 1 - \frac{r}{2R} = \frac{3}{5} \Rightarrow r = \frac{4}{5}R$

6. Запишем степень точки ~~k~~ B относительно ω: $Bk \cdot AB = BD^2 \Rightarrow 2(R-r)\cdot 2R = 9$

$R \cdot 4(R - \frac{4}{5}R) = 9 \Rightarrow 4 \cdot \frac{R^2}{5} = 9 \Rightarrow \boxed{R = \frac{3\sqrt{5}}{2}} \Rightarrow \boxed{r = \frac{6}{\sqrt{5}}}$

7. $\angle ADk$ опирается на $\overset{\text{диаметр}}{Ak} \Rightarrow \angle ADk = 90°$

8. $\angle BDk = \angle ADO_1 = \angle DAO_1 = \angle ECB = \alpha$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 5 [продолжение].

~~9. $\sin DAK = \sin\alpha = \frac{DK}{AK}$~~

10. $\angle DO_1B = 2\alpha$, $\cos 2\alpha = \frac{O_1D}{O_1B} = \frac{r}{2R-r}$

$= \frac{r}{2\cdot\frac{5}{4}r - r} = \frac{r}{2{,}5r - r} = \frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = -2\sin^2\alpha + 1 = \frac{2}{3}$

$\frac{1}{3} = 2\sin^2\alpha \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{6} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$ (α - острый)

11. по теореме косинусов в $\triangle ADO_1$: $AD^2 = 2r^2 - 2r^2\cos(180° - 2\alpha) =$
$= 2r^2 + 2r^2\cos\alpha = 2r^2(1+\cos\alpha) = 2r^2(1+\frac{2}{3}) = 2r^2\cdot\frac{5}{3} = \frac{10r^2}{3} = \frac{10\cdot 6^2}{3\cdot 5} = \frac{72}{3} = 24$

$AD = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

12. Из степени точки D относительно Ω: $BD\cdot CD = ED\cdot AD$

$3\cdot 2 = ED\cdot 2\sqrt{6} \Rightarrow ED = \frac{3}{\sqrt{6}}$

13. $AE = AD + ED = \frac{3}{\sqrt{6}} + 2\sqrt{6} = \frac{3+12}{\sqrt{6}} = \frac{15}{\sqrt{6}}$

14. $\angle ADB = 90° + \alpha \Rightarrow \sin ADB = \sin(90°+\alpha) = \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$

15. $S_{BACE} = \frac{1}{2}\sin ADB\cdot CB\cdot AE = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{5}{6}}\cdot 5\cdot\frac{15}{\sqrt{6}} = \frac{15\cdot 5\cdot\sqrt{5}}{2\cdot 6} = \frac{5\cdot 5\sqrt{5}}{4} = \boxed{\frac{25\sqrt{5}}{4}}$

Ответ: $r = \frac{6}{\sqrt{5}}$, $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, $S_{BACE} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① a, b, c, d

$a, aq, aq^2, \cancel{aq} aq^3$

$ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$

aq^3 — корень

$a\cdot(aq^3)^2 - 2aq\cdot aq^3 + aq^2 = 0$

$a\cdot a^2\cdot q^6 - 2a^2q^4 + aq^2 = 0$

$a^3\cdot q^6 - 2a^2q^4 + aq^2 = 0 \quad \cancel{|:a\neq 0}$

$\cancel{a^2q^6 - 2aq^4 + q^2 = 0}$

Замена: $t = aq^2$

$t^3 - 2t^2 + t = 0 \quad |:t\neq 0$ (первый член прогрессии не равен 0, знаменатель прогрессии не равен 0)

~~$t = 1$ корень~~

$\cancel{t^3 - 2t^2 + t \mid t-1}$

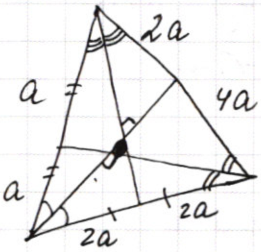
$t^2 - 2t + 1 = 0$

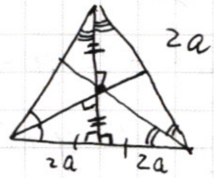
$(t-1)^2 = 0$

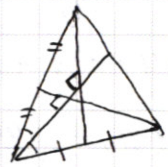
$t = 1$

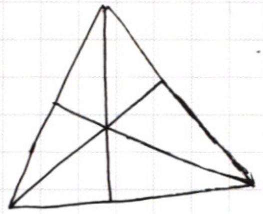
$aq^2 = 1$

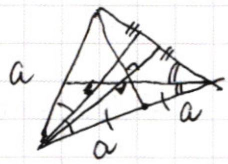
Ответ: 1.



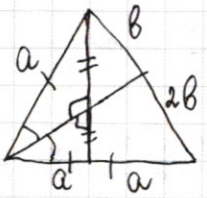








② $P = 900$, стороны являются целыми числами => натуральные (длины > 0)
одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан



$\cancel{a+b+c=900}$

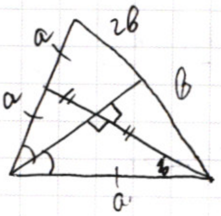
$3a + 3b = 900$

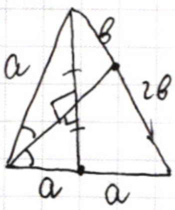
$a + b = 300$

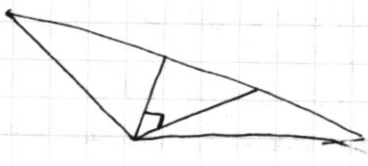
количество решений уравнения $a+b=300$ в $\mathbb{N}$ − ?

$a = 300 - b > 0$

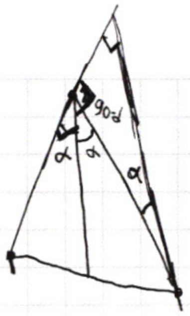
вариатов $b = 299$ (от 1 до 299), a определяется однозначно => 299







$-26+78=52$ $\qquad$ $44-26=18$



③ $\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$

если $y=1$, то $x-6=\sqrt{\cancel{x-6-x+6}} \Rightarrow x=6$

$36+2-12\cdot6-4+20=-36+18\neq0$

$\Downarrow$

$y\neq1$

$x-6y\geq0$

$x^2+36y^2-12xy=xy-6y-x+6$

$\begin{cases} x^2+36y^2-13xy+6y+x-6=0 \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$

$34y^2-13xy+13x+10y-26=0$

$\cancel{13(x}$ $13x(1-y)+34y^2+10y-26=0$

$x=\frac{34y^2+10y-26}{13(y-1)}$

$17\cdot17=289$; $289\cdot2=578$; $578+169=747$; $747:9=83$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$

$\left(\frac{34y^2+10y-26}{13(y-1)}-6\right)^2+2(y-1)^2=18$

$\left(\frac{34y^2+10y-26-60y-18y+78}{13(y-1)}\right)^2+2(y-1)^2=18 \quad |\cdot13^2(y-1)^2$

$(34y^2-50y-18y+52)^2+2\cdot169(y-1)^4=18\cdot169\cdot(y-1)^2$

$(34y^2-68y+52)^2+2\cdot169\cdot(y-1)^4=18\cdot169(y-1)^2$

$4(17y^2-34y+26)^2+2\cdot169\cdot(y-1)^4=18\cdot169(y-1)^2$

$2(17(y^2-2y+1)+9)^2+169(y-1)^4=9\cdot169(y-1)^2$

$2(17(y-1)^2+9)^2+169(y-1)^4=9\cdot169(y-1)^2$

Замена: $t=(y-1)^2$, $t>0$ $(y\neq1)$

$2(17t+9)^2+169t^2=9\cdot169t$

$2\cdot289t^2+2\cdot81+2\cdot34t\cdot9+169t^2=9\cdot169t$

$t^2(578+169)+9t(68-169)+2\cdot81=0$

$747t^2-9\cdot101t+2\cdot81=0 \quad |:9$

$83t^2-101t+18=0$

$t=1$ – корень $(83+18-101=0)$

$t=\frac{18}{83}$ – второй корень по теореме Виета

$\left[\begin{array}{l}(y-1)^2=1\\(y-1)^2=\frac{18}{83}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=2\\y=0\\y=\sqrt{\frac{18}{83}}+1\\y=\sqrt{\frac{18}{83}}-1\end{array}\right.$

$\frac{34y^2+10y-26}{13(y-1)}>6y$

$\frac{34y^2+10y-26-13\cdot6y^2+13\cdot6y}{13(y-1)}>0$

$\frac{34y^2-78y^2+88y-26}{13(y-1)}>0$

$\frac{-44y^2+88y-26}{13(y-1)}>0$

$\frac{11y^2-22y+\frac{13}{2}}{13(y-1)}<0$

☑ черновик ☐ чистовик $\qquad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$22y^2-44y+13 = 0$

$D = 44^2-4\cdot 22\cdot 13 = 44(44-2\cdot 13) = 44\cdot(44-26) = 88(22-13) = 88\cdot 9$

$y_1 = \frac{44-6\sqrt{22}}{44} = \frac{22-3\sqrt{22}}{22} = \frac{\sqrt{22}-3}{\sqrt{22}} = 1-\frac{3}{\sqrt{22}}$

$y_2 = \frac{44+6\sqrt{22}}{44} = 1+\frac{3}{\sqrt{22}}$

$\frac{22y^2-44y+13}{y-1} < 0$

$1-\frac{3}{\sqrt{22}}$ $\quad$ 1 $\quad$ $1+\frac{3}{\sqrt{22}}$ $\quad$ + $\quad$ +

$2 > 1+\frac{3}{\sqrt{22}} \Rightarrow$ не подходит

$0 < 1-\frac{3}{\sqrt{22}} \Rightarrow$ подходит

$\sqrt{\frac{18}{89}}-1 < 1-\frac{3}{\sqrt{22}}$

$\cancel{1}+\sqrt{\frac{18}{89}} \overset{<}{\vee} \cancel{1}+\frac{3}{\sqrt{22}}$

$\frac{18}{89} \overset{<}{\vee} \frac{9}{22}$

$\frac{2}{89} \overset{<}{\vee} \frac{1}{22}$

$44 < 89$

$y=2, \left[\begin{array}{l} x = 2 \text{ не подходит} \\ x = 8 \text{ не подходит} \end{array}\right.$

$\frac{9\sqrt{18}}{\sqrt{83}} + \frac{58}{13} - 6 - 6\sqrt{\frac{18}{83}} = \frac{3\sqrt{18}}{\sqrt{83}} + \frac{58-78}{13} = \frac{3\sqrt{18}}{\sqrt{83}} - \frac{20}{13}$

$\frac{3\sqrt{18}}{\sqrt{83}} \vee \frac{20}{13}$ $\qquad$ $\frac{9\cdot 18}{83} \overset{<}{\vee} \frac{400}{169}$

$9\cdot 18\cdot 13^2 \vee 20^2\cdot 83$

$9\cdot 9\cdot 13^2 \vee 2\cdot 20\cdot 10\cdot 83$

$9\cdot 18\cdot 169 \overset{<}{\vee} 400\cdot 83$

$9\cdot 9\cdot 169 \overset{<}{\vee} 200\cdot 83$

$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{89}} \overset{<}{\vee} \frac{3}{\sqrt{22}}$

$18\cdot 22 \overset{<}{\vee} 9\cdot 89$

$2\cdot 22 < 89$

☑ черновик ☐ чистовик

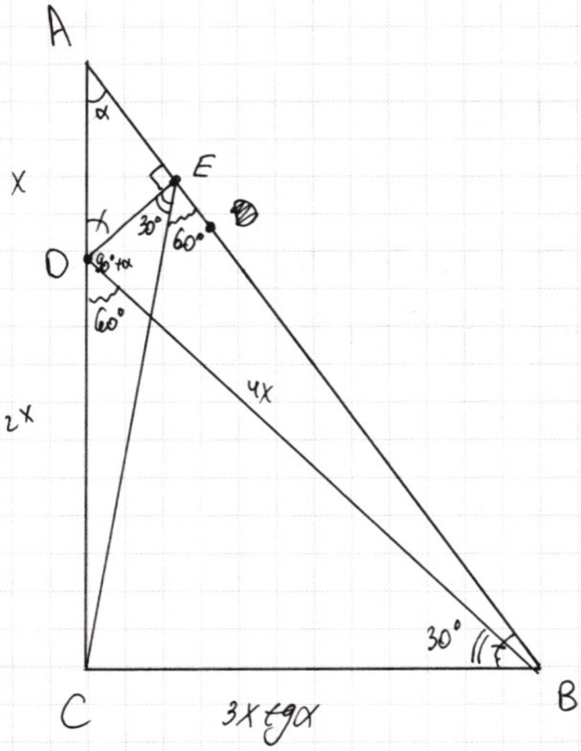
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

④

$x=\sqrt{7}/3$



~~AETE~~ $AE = x\cos\alpha$

$DE = x\sin\alpha$

$\frac{BC}{AC} = tg\alpha \Rightarrow BC = AC\, tg\alpha = 3x\, tg\alpha$

Δ ADE ~ Δ ABC по 2 углам =>

$\Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{\cos\alpha}{3}$

$\cancel{\frac{x\cos\alpha}{3x} = \frac{x\sin\alpha}{3x\, tg\alpha}}$ $\frac{x}{AB} = \frac{\cos\alpha}{3}$

$AB = \frac{3x}{\cos\alpha}$

$BE = AB - AE = \frac{3x}{\cos\alpha} - x\cos\alpha =$

$= x\left(\frac{3-\cos^2\alpha}{\cos\alpha}\right)$

$\cancel{BD^2 = DE^2 + BE^2} \Rightarrow$

$BD^2 = DE^2 + BE^2$

$16x^2 = x^2\sin^2\alpha + x^2\left(\frac{3-\cos^2\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 \;\Big|\, : x^2 \neq 0$

$16 = \sin^2\alpha + \frac{9+\cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

$16\cos^2\alpha = \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha + 9 + \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha$

$22\cos^2\alpha = (1-\cos^2\alpha)\cos^2\alpha + 9 + \cos^4\alpha$

$22\cos^2\alpha = \cos^2\alpha - \cancel{\cos^4\alpha} + 9 + \cancel{\cos^4\alpha}$

$21\cos^2\alpha = 9$ $\quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{3}{7}}$

$7\cos^2\alpha = 3$

$\cos^2\alpha = \frac{3}{7} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{4}{7} \rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$

$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{7}{3} \Rightarrow tg^2\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow tg\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (α - острый)

$S_{CED} = \frac{1}{2} CD\cdot DE\cdot \sin\angle EDC = \frac{1}{2}\cdot 2x\cdot x\sin\alpha\cdot\sin(90^\circ+\alpha) =$

$= x^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = x^2\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \cancel{7}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{\cancel{7}} = 2\sqrt{3}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

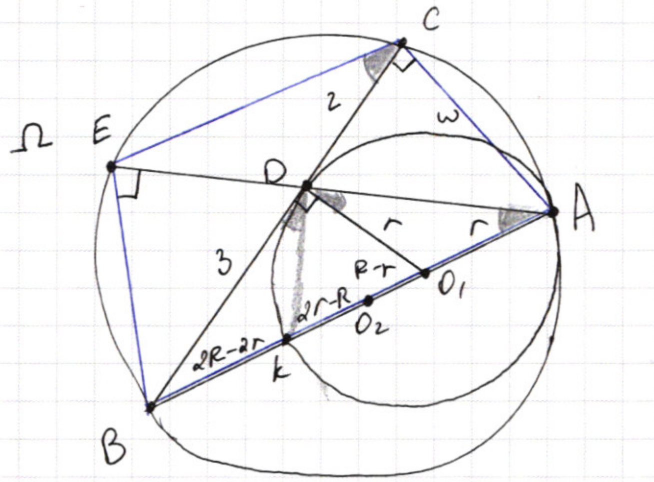
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5



AB - диаметр

Пусть O_1, O_2 - центры маленькой и большой окружности соответственно. O_1, O_2 и A лежат на одной прямой, которая является диаметром большой и маленькой окружности =>

=> B лежит на O_1O_2

Пусть $AO_1 \cap \omega = k$, Ak - диаметр ω

$AO_1 = O_1k$

$BO_2 = AO_2$

BC - касательная к ω => $O_1D \perp BC$

$\angle BCA$ опирается на диаметр AB =>

=> $\angle BCA = 90°$

$\triangle BDO_1 \sim \triangle BCA$ по 2 углам =>

=> $\frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{BA} = \frac{O_1D}{AC} = \frac{3}{5}$

Пусть $AO_1 = O_1k = r$

$AO_2 = BO_2 = R$

Тогда $O_1O_2 = R-r$, $kO_2 = 2r-R$, $Bk = 2R-2r$

$BO_1 = \cancel{2R} R+R-r = 2R-r$

$\cancel{BO_1}\ AB = 2R$

$\frac{BO_1}{AB} = \frac{2R-r}{2R} = 1 - \frac{r}{2R} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{r}{2R} = \frac{2}{5} \Rightarrow r = \frac{4}{5}R$

$Bk \cdot AB = BD^2 = 9$

$2(R-r) \cdot 2R = 9$

$4R(R - \frac{4}{5}R) = 9$

$4R \cdot \frac{R}{5} = 9$

$4R^2 = 45$

$R^2 = \frac{45}{4}$

$R = \frac{3}{2}\sqrt{5} \Rightarrow r = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{5} = \frac{6}{\sqrt{5}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)