МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Пусть q – знаменатель геометрической прогрессии. Тогда $a=a$, $b=a\cdot q$, $c=a\cdot q^2$. Пусть d – 4-й элемент прогрессии. Тогда $d=a\cdot q^3$. Также d является корнем уравнения

$ax^2-2bx+c=0$. Подставим значения b и c, выраженные через a и q:

$ax^2-2\cdot a\cdot qx+a\cdot q^2=0$ (Так как это геометрическая прогрессия, a не может быть 0, следовательно мы можем поделить на a).

$x^2-2qx+q^2=0$

$(x-q)^2=0$

$x=q$. Значит у этого уравнения единственный корень равный q, то есть $d=q$. Мы получили, что $d=q=aq^3$. Так как q тоже не 0, мы можем на него поделить. Следовательно $aq^2=1$. По условию $c=aq^2$, значит, $c=1$.

Ответ: $c=1$.

№3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$$

Пусть $a=x-6$, $b=y-1$. Тогда $x-6y=(x-6)+(6y-6)=a-6b$, т.е.

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-9b)(a-4b)=0 \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=9b \\ 81b^2+2b^2=18 \end{cases} \\ \begin{cases} a=4b \\ 16b^2+2b^2=18 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=9b \\ b^2=18/83 \end{cases} \\ \begin{cases} a=4b \\ b^2=1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Рассмотрим два случая. №3 продолж.

1) $\begin{cases} a = 9b \\ b^2 = \frac{18}{83} \end{cases}$. Заметим, что $a - 6b = \sqrt{ab}$, т.е. $3b = \sqrt{ab}$. Значит, b – неотрицательное число, т.е.

$\begin{cases} a = 9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ b = \sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases}$. Подставим изначальные значения a и b и найдём x и y

$\begin{cases} x - 6 = 9\sqrt{\frac{18}{83}} \\ y - 1 = \sqrt{\frac{18}{83}} \end{cases}$

$\begin{cases} x = 9\sqrt{\frac{18}{83}} + 6 \\ y = \sqrt{\frac{18}{83}} + 1 \end{cases}$ – это первое решение ~~уравнения~~ системы

Проверка:

$\begin{cases} 9\sqrt{\frac{18}{83}} + 6 - 6\sqrt{\frac{18}{83}} - 6 = \sqrt{9\cdot\sqrt{\frac{18}{83}}\cdot\sqrt{\frac{18}{83}}} \\ \left(9\sqrt{\frac{18}{83}}\right)^2 + 2\cdot\left(\sqrt{\frac{18}{83}}\right)^2 = 18 \end{cases}$

$\begin{cases} 3\sqrt{\frac{18}{83}} = 3\sqrt{\frac{18}{83}} \\ 83 \cdot \frac{18}{83} = 18 \end{cases}$ – подходит

2) $\begin{cases} a = 4b \\ b^2 = 1 \end{cases}$ Заметим, что $a - 6b = \sqrt{ab}$, т.е. $-2b = \sqrt{ab}$. Значит, b – неположительное число, т.е.

$\begin{cases} a = -4 \\ b = -1 \end{cases}$ Подставим вместо a и b их изначальные значения и найдём x и y.

$\begin{cases} x - 6 = -4 \\ y - 1 = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$. – это второе решение ~~ура~~ системы

Проверка:

$\begin{cases} 2 - 0 = \sqrt{-2+6} \\ 2^2 - 12\cdot 2 + 20 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2 = \sqrt{4} \\ 24 = 24 \end{cases}$ $\begin{cases} 2 = 2 \\ 24 = 24 \end{cases}$ – подходит.

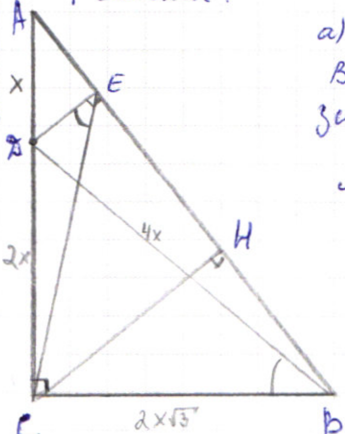
Ответ: $(2; 0)$; $\left(9\sqrt{\frac{18}{83}} + 6; \sqrt{\frac{18}{83}} + 1\right)$

№4

Дано:
$\triangle ABC$ – прямоуг. тр.;
$D \in AC$; $E \in AB$;
$AD : AC = 1:3$, $DE \perp AB$,
$\angle CED = 30°$, $AC = \sqrt{7}$

а) $tg\angle BAC$ – ?
б) S_{CED} – ?

Решение:



а) Пусть $AD = x$. Значит, $AC = 3x$, т.е. $DC = 2x$.
В четырёхугольнике $CDEB$ $\angle C = \angle E = 90°$, значит, $CDEB$ – вписанный, т.е.
$\angle CED = \angle CBD = 30°$, как вписанные и опирающиеся на одну дугу (хорду).
В $\triangle CBD$ $\angle C = 90°$ и $\angle B = 30°$, т.е. $\frac{CD}{BD} = \frac{1}{2}$, значит, $BD = 4x$. По теореме Пифагора мы можем найти BC и AB:
$BC = \sqrt{BD^2 - CD^2} = \sqrt{16x^2 - 4x^2} = 2x\sqrt{3}$
$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{12x^2 + 9x^2} = x\sqrt{21}$.

Проведём высоту CH в $\triangle ABC$. Пусть $AH = y$. Тогда по свойству прямоугольного треугольника $AC^2 = AH \cdot AB$, т.е. $9x^2 = a \cdot x\sqrt{21}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 продолж.

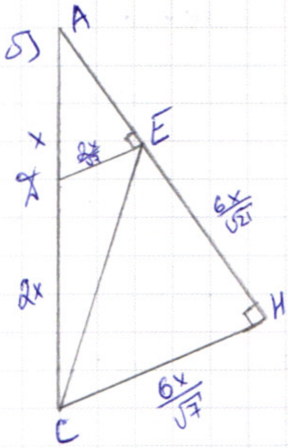
Значит, $a = \frac{9x}{\sqrt{21}}$. Также по свойству прямоугольного треугольника $CH^2 = AH\cdot HB$, т.е. $CH^2 = \frac{9x}{\sqrt{21}}\cdot\left(x\sqrt{21} - \frac{9x}{\sqrt{21}}\right) = \frac{9\cdot 12x^2}{21}$. Значит, $CH = \cancel{\frac{2x\sqrt3}{\sqrt{21}} = \frac{2x}{\sqrt7}}\ \frac{6x}{\sqrt7}$

Теперь мы можем найти тангенс угла $\angle BAC$.

~~$tg\angle BAC = \frac{CH}{AH} = \frac{8x}{\sqrt7} : \frac{9x}{\sqrt{21}} = \frac{8\sqrt{21}}{9\sqrt7} = \frac{2\sqrt3}{9} = \frac{2}{3\sqrt3}$~~

$$tg\angle BAC = \frac{CH}{AH} = \frac{6x}{\sqrt7} : \frac{9x}{\sqrt{21}} = \frac{6x\sqrt{21}}{9x\sqrt7} = \frac{2}{\sqrt3}$$

б)



$\triangle ADE \sim \triangle ACH$, т.к. $\angle AED = \angle AHC = 90°$ и $\angle A$ - общий. Значит, $\frac{DE}{CH} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$, т.е. $DE = \frac13 CH = \frac{2x}{\sqrt7}$, а также $AE : AH = AD : AC$, т.е. $AE = \frac13 AH = \frac{3x}{\sqrt{21}}$. Значит, $EH = AH - AE = \frac23 AH = \frac{6x}{\sqrt{21}}$. По т. Пифагора

$$EC = \sqrt{CH^2 + EH^2} = \sqrt{\frac{36x^2}{7} + \frac{36x^2}{21}} = \sqrt{\frac{4\cdot 36x^2}{21}} = \frac{12x}{\sqrt{21}}$$

$$S_{CDE} = \frac12 DE\cdot CE\cdot \sin\angle CED = \frac12\cdot\frac{12x}{\sqrt{21}}\cdot\frac{2x}{\sqrt7}\cdot\sin 30° = \frac{24x^2}{4\cdot 7\sqrt3} = \frac{6x^2}{7\sqrt3}.$$

Так как $AC = \sqrt7$, $x = \frac{\sqrt7}{3}$, т.е.

$$S_{CDE} = \frac{6\cdot 7}{9\cdot 7\sqrt3} = \frac{2}{3\sqrt3}$$

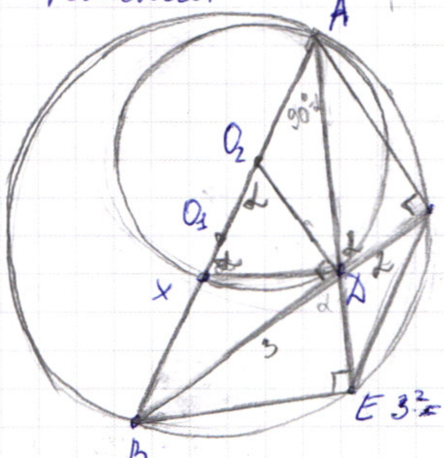
Ответ: а) $tg\angle BAC = \frac{2}{\sqrt3}$

б) $S_{CDE} = \frac{2}{3\sqrt3}$

№5

Дано:
$\Omega \cap \omega = A$;
AB - диаметр Ω;
$C \in \Omega$;
BC кас ω в D;
$AD \cap \Omega = E$;
$CD = 2$; $BD = 3$
R - ?; r - ?;
S_{BACE}

Решение:



Пусть O_1 и O_2 - центры Ω и ω соответственно, а AB и ω пересекаются в точке X. По свойству касательной и секущей $BD^2 = BX\cdot AB$.
Так как AB диаметр и A - точка касания Ω и ω, AX - диаметр ω. Значит, $BX = AB - AX = 2R - 2r$ (R - радиус Ω, r - радиус ω). Значит, $3^2 = BD^2 = (2R - 2r)\cdot 2R = 4(R - r)R$. (1).

Так как AB - диаметр Ω, $\angle BCA = 90°$. Поскольку BC касается ω в D, $O_2D \perp BC$. Значит, $AC \parallel O_2D$, т.е. по теореме Фалеса $\frac{BO_2}{O_2A} = \frac{BD}{CD}$.

№5 продолжение

$\frac{BO_2}{O_2A} = \frac{BD}{CD}$, т.е. $\frac{2R-r}{r} = \frac{BD}{CD} = \frac{3}{2}$ (2).

Запишем (1) и (2) в систему:

$\begin{cases} 9 = 4(R-r)R \\ \frac{2R-r}{r} = \frac{3}{2} \end{cases}$ Найдём R и r:

$\begin{cases} 9 = 4(R-r)R \\ 4R-2r = 3r \end{cases}$ $\begin{cases} 9 = 4(R-r)R \\ 4R = 5r \end{cases}$ $\begin{cases} 9 = (5r-4r)\cdot\frac{5r}{4} \\ 4R = 5r \end{cases}$

$\begin{cases} 9 = \frac{5r^2}{4} \\ 4R = 5r \end{cases}$ $\begin{cases} r = \frac{6}{\sqrt{5}} \\ R = \frac{5\cdot 6}{4\cdot\sqrt{5}} \end{cases}$ $\begin{cases} r = \frac{6}{\sqrt{5}} \\ R = \frac{3}{2}\sqrt{5} \end{cases}$ $\begin{cases} r = 1{,}2\sqrt{5} \\ R = 1{,}5\sqrt{5}. \end{cases}$

Пусть угол между диагоналями четырёхугольника BACE равен α ~~[illegible]~~, ~~[illegible]~~ (допустим, $\angle ACD = \alpha$, другой случай аналогичен). По свойству касательной $\angle ACD = \angle AXD$. $\triangle AXD$ — прямоугольный, т.к. $\angle AXD$ опирается на диаметр и равен $90°$. Значит, XO_2 в этом треугольнике медиана, равная половине гипотенузы, т.е. $\triangle XDO_2$ — равнобедренный. Значит, $\angle XO_2D = \angle O_2XD = \alpha$. $\angle XAD = 90° - \angle AXD = 90° - \alpha$, но при этом он является вписанным углом, т.е. равен половине центрального. $\angle XAD = \frac{1}{2}\angle XO_2D = \frac{\alpha}{2}$. Значит, $90° - \alpha = \frac{\alpha}{2}$, т.е. $\alpha = 60°$.

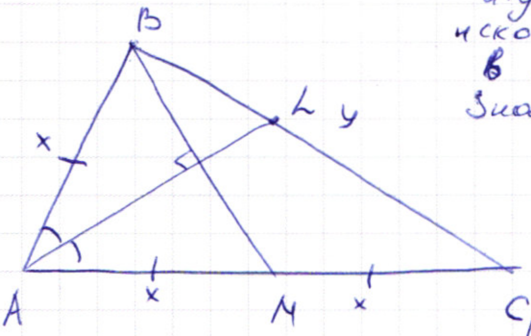
Заметим, что в $\triangle ABE$ $\cos(90° - \alpha) = \frac{AE}{AB}$, т.е. $AE = AB\cos 30° = 2R\cos 30° = 3\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{15}}{2}$. Найдём площадь четырёхугольника.

$S_{BACE} = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot BC\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{15}}{2}\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{45\sqrt{5}}{8}$.

ПРОДОЛЖЕНИЕ НА 6 СТР

Ответ: $R = 1{,}5\sqrt{5}$; $r = 1{,}2\sqrt{5}$; ~~$S_{BACE} = \frac{45\sqrt{5}}{8}$~~.

№2



Пусть AL и BM — биссектриса и высота искомых $\triangle ABC$. Известно, что $AL \perp BM$, т.е. в $\triangle ABM$ AL является биссектрисой и высотой. Значит, $\triangle ABM$ равнобедренный, т.е. $AB = AM$.

Пусть $AB = x$, $BC = y$. Тогда $AC = 2AM = 2AB = 2x$. По условию $AB + BC + AC = 3x + y = 900$. При этом должно выполняться неравенства треугольника, что

$\begin{cases} x + y > 2x \\ 3x > y \\ 2x + y > x. \end{cases}$ Значит, $3x > y > x$.

1. $y + 3x < 3x + 3x$
$y + 3x < 6x$
$900 < 6x$
$150 < x$

2. $y + 3x > x + 3x$
$900 > 4x$
$\frac{900}{4} > x$
$225 > x$

Значит, чтобы треугольник существовал, нужно, чтобы $150 < x < 225$. При этом для каждого x однозначно определён y. Значит,

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 продолж.

~~чтобы~~ треугольников будет столько, сколько различных x. ~~будет~~ (Повторений не будет. Пусть при $x = a$ и $y = b$ и $y = a$ и $x = b$ треугольники совпадают. Тогда $900 - 3a = b$ и $900 - 3b = a$, что возможно только в случае равенства, но $x < y$).

Всего возможно $225 - 150 - 1 = 74$ различных x, т.е. и 74 различных треугольников.

Ответ: 74 треугольника

№7

Заметим, что если $a = 1$, $b = b$, то $f(ab) = f(a) + f(b) = f(1) + f(b)$. Значит, $f(1) = 0$. Значит, в представлении $f(x)$, где x — ~~составное число~~ произведение двух чисел из множества мы можем не учитывать 1 в произведении.

~~Пусть~~ Рассмотрим $f(kx)$, где k и x - числа из множества. Тогда $f(kx) = f(k) + f(x) = f(k) + f(\frac{1}{k} \cdot kx) = f(k) + f(\frac{1}{k}) + f(kx)$. Значит, $f(k) + f(\frac{1}{k}) = 0$. По условию нам нужно рассмотреть $f(\frac{x}{y})$. $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$. Значит, чтобы понять, когда $f(\frac{x}{y}) < 0$, нужно найти такие пары x и y, что $f(x) > f(y)$.

$f(2) = \frac{2}{2} = 1$
$f(3) = [\frac{3}{2}] = 1$
$f(4) = f(2) + f(2) = 2$
$f(5) = [\frac{5}{2}] = 2$
$f(6) = f(3) + f(2) = 2$
$f(7) = [\frac{7}{2}] = 3$
$f(8) = f(4) + f(2) = 3$
$f(9) = f(3) + f(3) = 2$
$f(10) = f(5) + f(2) = 3$
$f(11) = [\frac{11}{2}] = 5$
$f(12) = f(3) + f(4) = 3$
$f(13) = [\frac{13}{2}] = 6$
$f(14) = f(7) + f(2) = 4$
$f(15) = f(3) + f(5) = 3$
$f(16) = f(8) + f(2) = 4$
$f(17) = [\frac{17}{2}] = 8$
$f(18) = f(3) + f(6) = 3$
$f(19) = [\frac{19}{2}] = 9$
$f(20) = f(4) + f(5) = 4$
$f(21) = f(3) + f(7) = 4$
$f(22) = f(11) + f(2) = 6$

Посчитаем значения f для чисел от 2 до 22. Из них $f(a) = 1$ для 2-х значений a, $f(a) = 2$ - для 4, $f(a) = 3$ - для 6, $f(a) = 4$ - для 4, $f(a) = 5$ для 1, $f(a) = 6$ - для 2, $f(a) = 7$ - для 0, $f(a) = 8$ - для 1, $f(a) = 9$ - для 1. Посчитаем число способов выбрать x и y. Пусть $x = a$, Тогда число способов выбрать y для x будет равно произведению $f(a)$ и ~~суммы~~ количества чисел, для которых $f(y) > f(a)$. Значит, всего число способов равно

$2 \cdot 19 + 4 \cdot 15 + 6 \cdot 9 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 38 + 60 + 54 + 20 + 4 + 4 + 1 = 181$

Ответ: 181

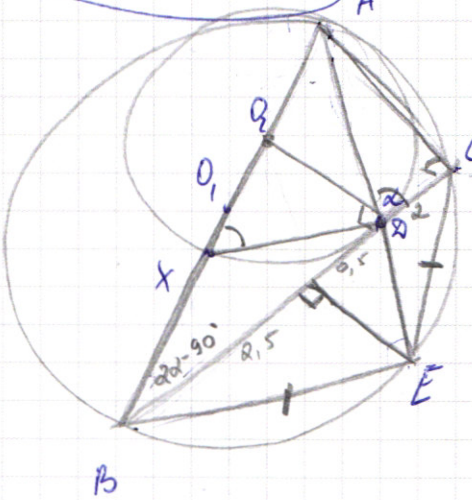
№6

$8x-6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7.$

При $x=0$ $\quad 0-6 \le b \le 7$

$-6 \le b \le 7.$

N5 продолж



Пусть $\angle ADC=\alpha$. Тогда по св-ву касательной $\angle ADC=\angle AXD.=\alpha$.
Тогда $\angle XAD=90°-\alpha=\angle CAD$, т.е. AD - биссектриса $\angle BAC$, ~~т.е. $\triangle BEC$ - равнобедренный~~

$\angle ABC = 90° - (180°-2\alpha) = 2\alpha - 90°$.

Т.к. AD-биссектриса, $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{2}$, т.е.

$AC = \frac{2AB}{3} = \frac{3\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}$. В $\triangle BAC$

$\sin(2\alpha - 90°) = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{3}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 90° - \cos 2\alpha \cdot \sin 90° = \frac{1}{3}$

$-\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$

$\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}$

$1 - 2\sin^2\alpha = -\frac{1}{3}$

$\frac{4}{3} = 2\sin^2\alpha$

$\frac{2}{3} = \sin^2\alpha$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Из $\triangle BAE$:
$AE = AB\sin\alpha$

$S_{BACE} = \frac{1}{2}BC \cdot AE\sin\alpha = \frac{1}{2}BC \cdot AB \cdot \sin^2\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 \cdot 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

Ответ: $S=5\sqrt{5}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a, b, c - геом. пр.

№1

$a \quad aq \quad aq^2 \quad aq^3$

$ax^2 - 2aqx + aq^2 = 0$

$x^2 - 2qx + q^2 = 0$

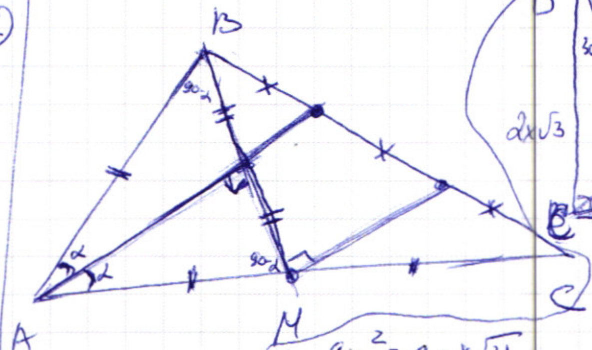
$(x-q)^2 = 0$

$x = q$

$aq^4 = q$

$aq^3 = 1$

№2



$9x^2 = a \cdot x\sqrt{21}$

$CH = x\frac{9}{\sqrt{21}}$

$a = x\sqrt{\frac{3}{7}}$

$x = x\sqrt{\frac{9}{\sqrt{21}} \cdot \frac{12x}{\sqrt{21}}} = 3x\sqrt{\frac{4}{7}}$

$x = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$16x^2 - 4x^2 = 12x^2$

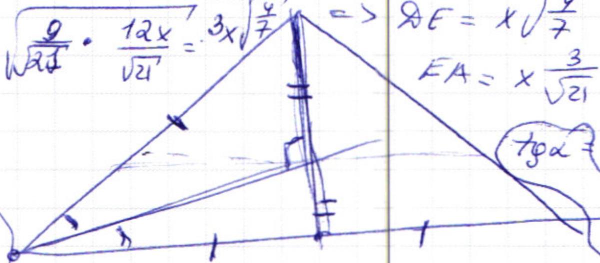
$12x^2 + 9x^2 =$

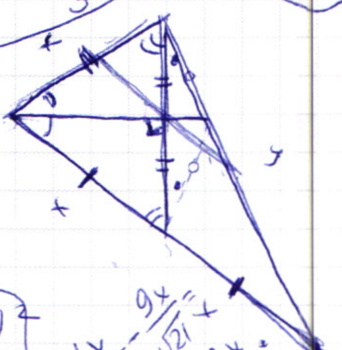
$\Rightarrow DE = x\sqrt{\frac{4}{7}}$

$EA = x\frac{3}{\sqrt{21}} = x\sqrt{\frac{3}{7}}$

$tg\alpha = \sqrt{\frac{4}{7}} \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$S = \frac{3x \cdot 2x\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}x^2 = 3\sqrt{3} \cdot \frac{7}{9} = \frac{7}{\sqrt{3}}$





№3

$$\begin{cases} \cancel{x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}} \\ \cancel{x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0} \end{cases}$$

$\cancel{(x-6y)^2 = xy - 6y - x + 6}$

$\cancel{x^2 - 12xy + 36y^2} = \cancel{(x-6)(y-1)}$

$\cancel{(x-6y)^2}$

$\cancel{(x-6y)^2 = (x-6)(y-1)}$

$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18$

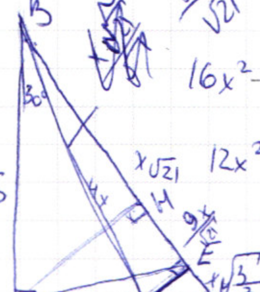
$\cancel{(x-6+y-1)^2 - 2(x-6y)^2 = 18 - (y-1)^2}$

$\cancel{(x+y-7)}$

$2\left(x\frac{9x}{\sqrt{21}}\right) = \frac{12x}{\sqrt{21}}$

$16x^2 - 4x^2$

$12x^2 + 9x^2 =$



$x \cdot 3x = a \cdot x\sqrt{21}$

$a = x\sqrt{\frac{9}{21}} = x\sqrt{\frac{3}{7}}$

$3x > y$

$2x + y > x$

$x + y > 2x$

$$\begin{cases} 3x > y > x \\ 3x + y = 900 \end{cases}$$

$\cancel{5x + 2x + k = 900}$

$3x > y > x$

$\cancel{3x + x + 1 = 900}$

$\cancel{4x = 899}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

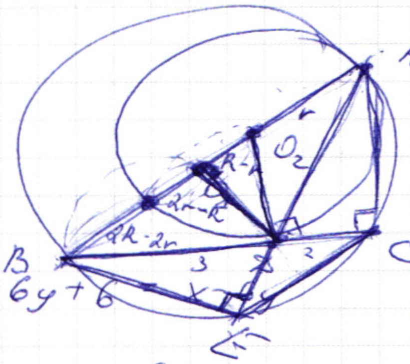
(Нумеровать только чистовики)

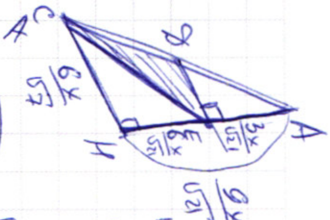
$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$45 \,|\, \frac{8}{5}$

-40

$\quad 50$





$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2=18 \end{cases}$$

$a \qquad b$

$\underbrace{x-6}_{a} - 6\underbrace{(y-1)}_{b} = x-6-6y+6 = x-6y$

$a-6b$

$4R=5r \Rightarrow r=\frac{4}{5}R$

$9=4(R-r)R$

$9=(2R-2r)2R \qquad 9=4\cdot\frac{1}{5}R\cdot R$

$\frac{r}{2R-r}=\frac{2}{3} \Rightarrow 3r=4R-2r$

$R=\sqrt{\frac{9\cdot 5}{4}}=1{,}5\sqrt{5}$

$5r=4R$

$r=\frac{4}{5}R$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$$

$(a+b)^2-2ab$

$\cancel{a^2-12ab+36b^2=ab}$

$\cancel{18+34b^2=13ab}$

$(x-6)^2=x^2-12x+36$

$2(y-1)^2=2y^2-4y+2$

$38-20=18$

$\frac{9}{4}=\frac{1}{5}R^2$

$R=1{,}5\sqrt{5}$

$r=1{,}2\sqrt{5}$

$x-6-(y-1)\cdot 6=x-6-6y+6=x-6y$

$a-6b$

$\cancel{\begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}}$

$a^2-13ab+36b^2=a^2+2b^2-18$

$18-13ab+34b^2=0$

$9=(4R-4r)R$

$9=5r(5r-4r)$

$\cancel{324-17a^2=13ab}$

$\cancel{324=a(17a+13b)}$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$$

$9=5r^2$

$\frac{9}{5}=r^2$

$r=\frac{3}{\sqrt{5}}$

$\cancel{a^2+2\sqrt{2}ab+b^2=18-2\sqrt{2}ab}$

$\cancel{(a+\sqrt{2}b)^2=18-a^2-36b^2}$

13

$\cancel{3a-11b}=2\sqrt{ab}+a+b$

$(a-b)^2$

$$\begin{cases} (a-6b)^2=ab \\ a^2+2b^2-18=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9=4(R-r)R \\ 4R=5r \end{cases}$$

$9=(5r-4r)\cdot 5$

$\frac{18}{83}+2\cdot\frac{9}{4}x$

$(x-6)^2+2(y-1)^2=18$

$9\cdot\frac{9}{83}$

$\frac{18}{83}+2\cdot\frac{18}{83}=18$

$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\cos\alpha}+3\cos\alpha\right)\cdot 5$

$\frac{1}{2}(2\operatorname{tg}\alpha+3\sin\alpha\cos\alpha)\cdot 5$

$81\cdot 83$

$R+R-2r$

$BD^2=BX\cdot AB$

$2R$

$9=4(R-r)R$

$\frac{R-r}{R}=\frac{3}{5}$

$3R=5R-5r$

$5r=2R$

$\frac{3\cdot 4}{5}R^2=9$

$R^2=\frac{3\cdot 5}{4}$

$R=\sqrt{\frac{15}{4}}$

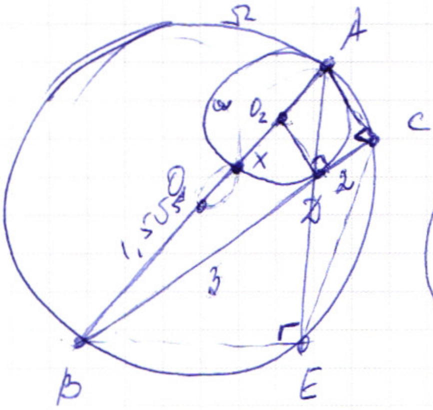
$(R-r)\cdot(2R-r)=$

$=\left(\frac{5}{4}r-r\right)\cdot\left(\frac{5}{2}r-r\right)$

$=\frac{1}{4}r\cdot\frac{3}{2}r=\frac{3}{8}r$

$R=1{,}5\sqrt{5}$

$r=1{,}2\sqrt{5}$



$BD^2=BX\cdot AB$

$$\begin{cases} 9=(2R-2r)\cdot 2R \\ \frac{AB}{BO_2}=\frac{BC}{BD} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{9}{4}=(R-r)R \\ \frac{2R}{2R-r}=\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{9}{4}=(R-r)R \\ 10R-5r=6R \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{9}{4}=\left(R-\frac{4}{5}R\right)R \\ 4R=5r \end{cases}$$

$R^2=\frac{9\cdot 5}{4} \Rightarrow R=1{,}5\sqrt{5} \Rightarrow r=\frac{1{,}5\cdot 4\sqrt{5}}{5}=1{,}2\sqrt{5}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

Пусть $a=x-6$, $b=y-1$. Тогда $a-6b = x-6-6y+6 = x-6y$, $ab = (x-6)(y-1) = xy-6y-x+6$ и

$a^2+2b^2 = (x-6)^2+2(y-1)^2 = x^2-12x+36+2y^2-4y+2 = x^2+2y^2-12x-4y+38.$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$$

$(a-9b)(a-4b)=0$

$$\left[\begin{array}{l} a=9b \\ a=4b \end{array}\right.$$

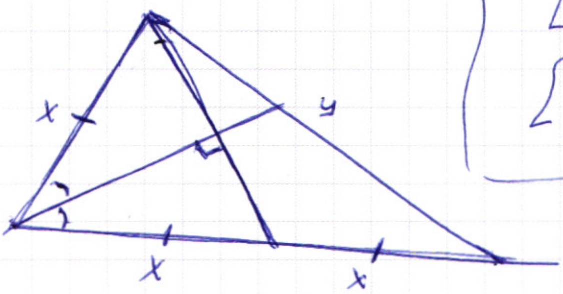
$$\left[\begin{array}{l} 9^2b^2+2b^2=18 \\ 16b^2+2b^2=18 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 83b^2=18 \\ b^2=1 \end{cases}$$

$8x-6|2x-1| \le ax+b \le -8x^2+6x+7$

$0-6|-1| \le a0+b \le 7$

$-6 \le b \le 7$



$3x > y > x$

$y+3x=900$

$y+3x > 4x \Rightarrow x < \frac{900}{4} = 225$

$y+3x < 6x$

$900 < 6x$

$150 = \frac{900}{6} < x$

$150 < x < 225$

$1 < x < 5$

2 3 4

5-1-1

$225-150-1 = 74$

$$\begin{cases} 900-3a=b \\ 900-3b=a \end{cases}$$

$3b-3a=b-a$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/2]$ для любого p

$(x;y)$ $2 \le x \le 22$

$2 \le y \le 22$, $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$a = p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot p_3^{k_3}\cdot\ldots\cdot p_n^{k_n}$

$f(a) = k_1 f(p_1)+k_2 f(p_2)+\ldots+k_n f(p_n) = k_1\cdot\left[\frac{p_1}{2}\right]+k_2\left[\frac{p_2}{2}\right]+\ldots+k_n\left[\frac{p_n}{2}\right]$

$f(2)=1$

$f(3)=1$

$f(4)=f(2)+f(2)$

$f(1\cdot b)=f(1)+f(b)$

$f(1)=0$

$f\left(\frac{x}{y}\right)$

~~если $\frac{x}{y}\in\mathbb{Z}$, то $f\left(\frac{x}{y}\right)\ge 0$, т.к. $\frac{x}{y}=k$ $f(k)=k f(p_i)$ + ...~~

на мн. + $\mathbb{Q}$ чисел, т.к.

$f\left(\frac{2}{3}\right)=f(2)+f\left(\frac{1}{3}\right)= 1+f(1/3)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(\cancel{k}x) = f(\cancel{k}) + f(x)$ ~~= f(1+ f(x))~~ $= f(k) + f(\frac{1}{k} \cdot kx) = f(k) + f(\frac{1}{k}) + f(kx)$

$f(k) + f(\frac{1}{k}) = 0$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$

$f(2) = 1$
$f(3) = 1$
$f(4) = 2$
$f(5) = 2$
$f(6) = 2$
$f(7) = 3$
$f(8) = 3$
$f(9) = 2$
$f(10) = 3$
$f(11) = 5$
$f(12) = 3$
$f(13) = 6$
$f(14) = 4$
$f(15) = 3$
$f(16) = 4$
$f(17) = 8$
$f(18) = 3$
$f(19) = 9$
$f(20) = 4$
$f(21) = 4$
$f(22) = 6$

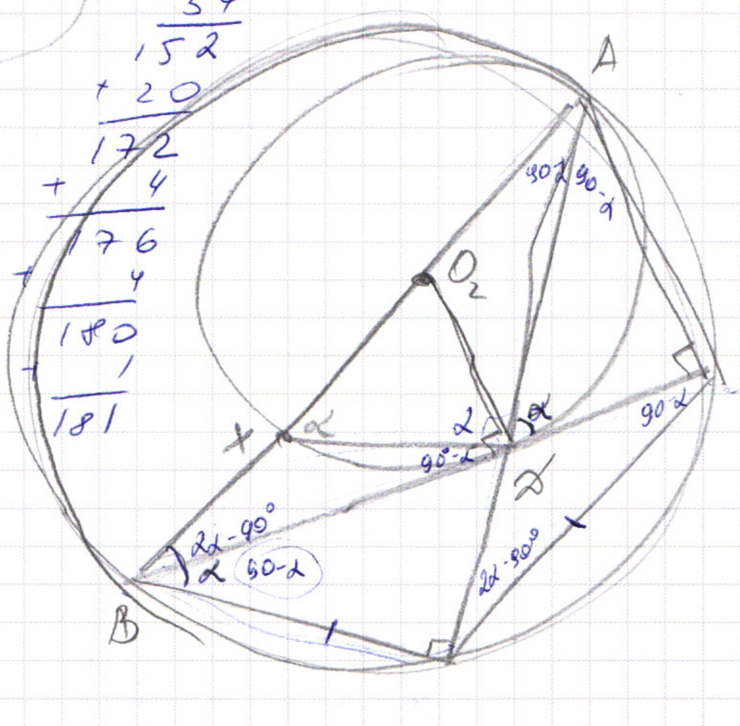
~~от 1 до 9 значения~~

1 : 2
2 : 4
3 : 6
4 : 4
5 : 1
6 : 2
7 : 0
8 : 1
9 : 1

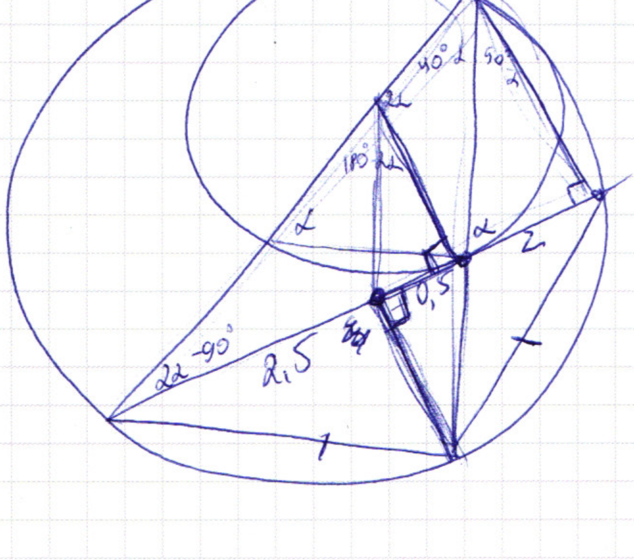
~~$4 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 4 \cdot 6 +$~~

$2 \cdot 19 + 4 \cdot 15 + 6 \cdot 9 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1$

$38 + 60 = 98$
$98 + 54 = 152$
$152 + 20 = 172$
$172 + 4 = 176$
$176 + 4 = 180$
$180 + 1 = 181$



$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

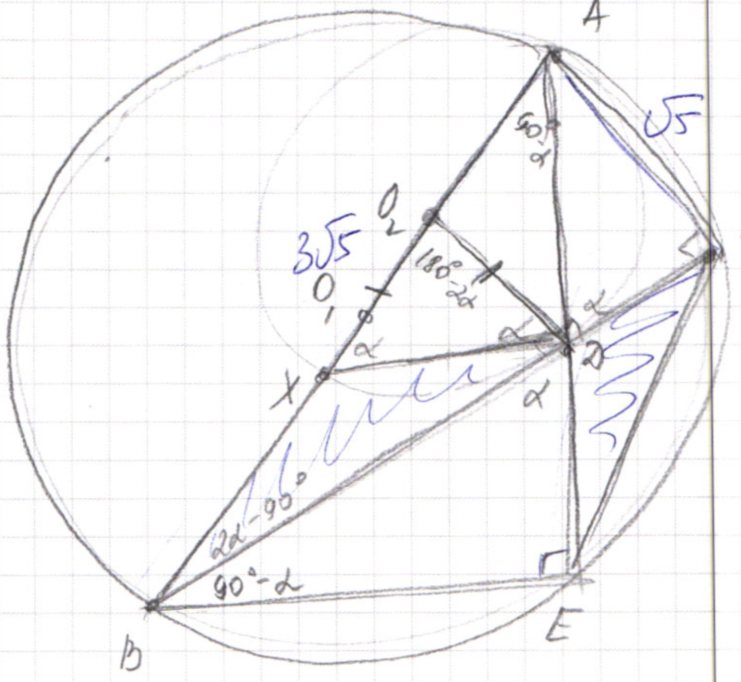
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$S - ?$



$\sin(2\alpha - 90^\circ) = \frac{1}{3}$

$-\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)