МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Дано:

a, b, c - Г.П.

корень $ax^2-2bx+c=0$ явл 4-ым членом Г.П.

Найти: c

Т.к. a, b, c - Г.П. => по св-ву =>

=> $b^2 = ac$, $b = a\cdot q$, $c = a\cdot q^2$

Пусть x_0 - ~~корень~~ 4-ый член прогрессии =>

=> $x_0 = a\cdot q^3$, $q \neq 0$ $q \neq 1$

$ax^2 - 2bx + c = 0$

$\cancel{x_{1,2} = \frac{b^2 \pm \sqrt{}}{}}$ $x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$ =>

$D = b^2 - ac = 0$, т.к. $b^2 = ac$

=> $x = \frac{b}{a}$

Т.к. x_0 - корень $ax^2 - 2bx + c = 0$ => $x_0 = x = \frac{b}{a}$

$a\cdot q^3 = \frac{b}{a}$

$a\cdot q^3 = \frac{a\cdot q}{a}$

$a\cdot q^3 = q$ $/ : q \neq 0$

$\underbrace{a\cdot q^2}_{c} = 1$

$c = 1$

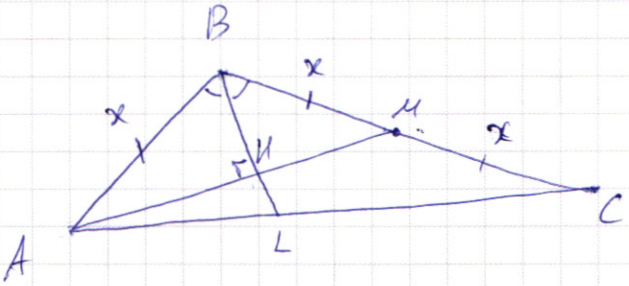
Ответ: 1.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№2 ~~Найти кол-во △-ов~~



1) Пусть в △ABC: P = 900, ~~AB~~ значения AB, BC и AC целые, BL - бис-са, AM - медиана, BL ⊥ AM.

2) В △AB Пусть BM = x ⇒
~~т.к. AM - медиана~~
т.к. M - сер BC (AM - медиана) ⇒ MC = x

3) В △ABM:
BL ∩ AM = H, т.к. BL ⊥ AM ⇒ BH - высота △ABM
но BH - бис-са △ABM (BL - бис-са) ⇒

⇒ △ABM - равностор, AB = BM = x

4) В △ABC: по т. косинусов ⇒

$$\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos\angle B$$

$$AC^2 = x^2 + (2x)^2 - 2x \cdot 2x\cos\angle B$$

$$AC^2 = x^2(5 - 4\cos\angle B)$$

$$AC = \sqrt{x^2(5-4\cos\angle B)} = x\sqrt{5-4\cos\angle B}$$

т.к. $0 < \angle B < 180 \Rightarrow -1 < \cos\angle B < 1 \;/ \cdot(-4)$

$$-4 < -4\cos\angle B < 4 \;/ +5$$

$$1 < 5 - 4\cos\angle B < 9$$

$$\underbrace{AC}_{\in \mathbb{N}} = \underbrace{x}_{\in \mathbb{N}}\sqrt{5-4\cos\angle B} \Rightarrow \sqrt{5-4\cos\angle B} \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{5-4\cos\angle B} = 2$$

$$AC = 2x$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $P_{ABC} = 900$

$AB + BC + AC = 900$

$x + 2x + 2x = 900$

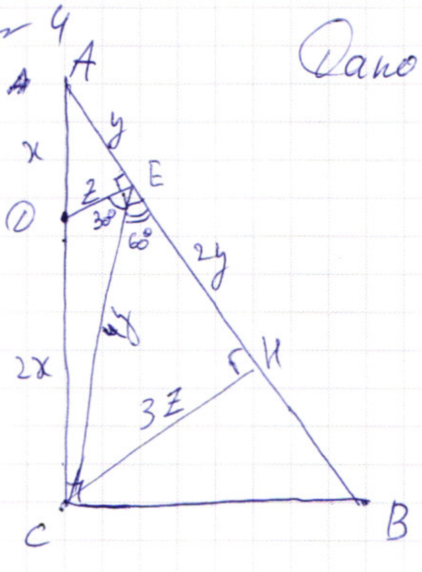
$5x = 900$

$x = 180 \Rightarrow AB = 180,\ BC = 360,\ AC = 360 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists!\ \triangle ABC$.

Ответ: 1.

№ 4



Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, $AD : AC = \frac{1}{3}$, $DE \perp AB$, $\angle CED = 30°$, $AC = \sqrt{7}$

Найти: а) ~~tg∠BAC~~ $tg\angle A$

б) S_{CED}

Решение:

~~4) Проведем $CH \perp AB$ => $CH \parallel DE$~~

~~Т.к. $DE \perp AB$~~

1) Проведем $CK \perp AB \Rightarrow \triangle AKC$ - прямоуг

2) $DE \perp AB$ (по усл) $\Rightarrow \triangle AED$ - прямоуг.

3) Рсм $\triangle AKC$ и $\triangle AED$ (прямоуг):

$\angle A$ - общий $\Rightarrow \triangle AKC \sim \triangle AED$ (по 2ум углам) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AE}{AK} = \underbrace{\frac{AD}{AC}}_{1/3} = \frac{DE}{CK}$ $\quad \frac{AE}{AK} = \frac{1}{3}$, то пусть $AE = y \Rightarrow$

$\Rightarrow EK = AK - AE = 3y - y = 2y$

$\frac{DE}{CK} = \frac{1}{3}$, то пусть $DE = z \Rightarrow CK = 3z$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

4) $DE \perp AB \Rightarrow \angle DEB = 90^\circ = \underbrace{\angle CED}_{30^\circ} + \angle CEB \Rightarrow \angle CEB = 60^\circ$

5) В $\triangle CEK$ - прямоуг:

$tg\angle CEB = \frac{CK}{KE}$

$tg\, 60^\circ = \frac{3z}{2y} \Rightarrow \frac{3z}{2y} = \sqrt{3} \Rightarrow \frac{z}{y} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow z = \frac{2y}{\sqrt{3}}$

$\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3z}{2y}}$ $\cos\angle CEB = \frac{EK}{CE} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2y}{CE} \Rightarrow CE = 4y$

6) В $\triangle AED$ - прямоуг:

$tg\angle A = \frac{ED}{AE} = \frac{z}{y} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

7) Пусть $AD = x$, $DC = 2x$ (т.к $AD : AC = \frac{1}{3}$ и $AC = AD + DC$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AD = \frac{\sqrt{7}}{3} = x$, т.к. $AC = \sqrt{7}$

8) Из $\triangle ADE$ - прямоуг: по т. Пифагора

$AD^2 = AE^2 + DE^2$

$x^2 = y^2 + z^2$

$x^2 = y^2 + \left(\frac{2y}{\sqrt{3}}\right)^2$

$x^2 = y^2 + \frac{4}{3}y^2$

$x^2 = \frac{7}{3}y^2$

$\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 = \frac{7}{3}y^2$

$\frac{7}{9} = \frac{7}{3}y^2 \quad |:7$

$\frac{1}{9} = \frac{1}{3}y^2 \quad |\cdot 3$

$\frac{1}{3} = y^2$

$y = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow z = \frac{2y}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$

9) В $\triangle CED$:

$S_{CED} = \frac{1}{2} DE \cdot EC \sin\angle CED = \frac{1}{2} \cdot z \cdot 4y \cdot \sin 30^\circ = 2 \cdot zy \cdot \frac{1}{2} =$

$= z \cdot y = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$

Ответ: $tg\angle A = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $S_{CED} = \frac{2}{3\sqrt{3}}$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница №4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$$

$x-6y=x-6y+6-6=x-6-6y+6=(x-6)-6(y-1)$

$xy-6y-x+6=y(x-6)-(x-6)=(x-6)(y-1)$

$x^2+2y^2-12x-4y+20=\cancel{x^2}+\underbrace{x^2-12x+36}+\underbrace{2y^2-4y+2}-18=$

$=(x-6)^2+2(y-1)^2-18$

~~Замена: (x-6)~~

$$\begin{cases} (x-6)-6(y-1)=\sqrt{(x-6)(y-1)} \\ (x-6)^2+2(y-1)^2-18=0 \end{cases}$$

Замена: $\begin{cases} x-6=a \\ y-1=b \end{cases}$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \quad (1) \\ a^2+2b^2-18=0 \quad (2) \end{cases}$$

(1): $\begin{cases} a-6b\geq 0 \Rightarrow \underline{\underline{a\geq 6b}} \\ (a-6b)^2=ab \end{cases}$

$a^2-12ab+36b^2=ab$

$a^2-13ab+36b^2=0$

По т. Виета

$\underline{a_1=4b}$, $\underline{a_2=9b}$

~~пик~~

(2): $(4b)^2+2b^2-18=0$

$(9b)^2+2b^2-18=0$

(2): $\cancel{a^2+2b^2-18=0}$

$\cancel{(9b)^2+2b^2}$

$16b^2+2b^2=18$

$18b^2=18$

$b^2=1$

$b=1$ | $b=-1$

$a=4b$ | $a=4b$

$a=4$ | $a=-4$

Проверка:

$a\geq 6b$ | $-4\geq -6$ (в) $\Rightarrow$

$4\geq 6$ (л) $\Rightarrow$ | $\Rightarrow a=-4;\ b=-1$

$\Rightarrow$ н/к

$a=-4;\ b=-1$

$81b^2+2b^2=18$

$83b^2=18$

$b^2=\frac{18}{83}$

$b=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$ | $b=-\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$

$\cancel{a=\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}}$ $a=\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$ | $a=\frac{-27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$

Проверка: $a\geq 6b$

$\cancel{a\geq 9b}$

$\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}\geq\frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$ (в) $\Rightarrow$ | $\frac{-27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}\geq-\frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$ (л)

$\Rightarrow a=\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}=\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$ | н/к

$b=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$

$a=\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$ $b=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$

Замена $\begin{cases} x-6=a \\ y-1=b \end{cases}$

$x-6=-4$ $y-1=-1$

$x=2$ $y=0$

$(2;0)$

$x-6=\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$ $y-1=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$

$x=6+\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$ $y=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}+1$

Ответ: $(2;0)$; $\left(6+\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}};\ 1+\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} b \geq -4x - ax + 6 \\ b \leq -3x^2 + 6x + 7 - ax \end{cases}$$

$-ax - 4x + 6 \leq b \leq -3x^2 + 6x + 7 - ax / +4x$

$\cancel{-ax + 6 \leq b \leq -3x^2 + 10x + 7 - ax / -6}$

$\cancel{-ax \leq b \leq -3x^2 + 10x + 1 - ax}$

$\cancel{ax} - 4x + 6 \leq ax + b \leq -3x^2 + 6x + 7$

$3x - 6 / 2x - 1$

$-\frac{1}{2} \leq x \leq 1/2$

$20x - 6 \leq ax + b \leq -3x^2 + 6x + 7$

$\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

$-4x + 6 \leq ax + b \leq -3x^2 + 6x + 7$

$0 \leq ax + b + 4x - 6 \leq -3x^2 + 10x + 1$

$$\begin{cases} ax + b \geq 4x + 6 \\ ax + b \leq -3x^2 + 6x + 7 \end{cases}$$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Т.к. AB - диаметр Ω

$\frac{AB}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ - радиус Ω

5) $\triangle ACB \sim \triangle ODB$ - (прямоуг-ые, $\angle B$ - общий) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AC}{OD} = \frac{BC}{BD}$

$AC = \underbrace{OD}_{r} \cdot \frac{BC}{BD} = \frac{5}{3} r = \frac{5}{3} \cdot \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{5 \cdot 2\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$

~~6) В окр-ти Ω:~~
~~AE - хорда~~
~~BC - хорда~~
~~$AE \cap BC = D$ $\Rightarrow$ по т. ... $AD \cdot DE = CD \cdot BD$~~

6) В $\triangle ACD$ - прямоуг: $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{4 \cdot 5 + 4} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

7) В окр-ти Ω: AE - хорда, BC - хорда, $AE \cap BC = D$ $\Rightarrow$ по т. о пересек-ся хордах в окр-ти $\Rightarrow$ $AD \cdot DE = CD \cdot BD$

$2\sqrt{6} \cdot DE = 2 \cdot 3$

$DE = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

8) В $\triangle ACD$ - прямоуг: $\sin\angle CDA = \frac{AC}{AD} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$

9) $S_{BACE} = AE \cdot BC \cdot \sin\angle CDA = (AD + DE)(CD + BD)\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} =$

$= \left(2\sqrt{6} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \left(2\tfrac{1}{2}\right) \cdot \sqrt{6} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{5}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{5} =$

$= \frac{25\sqrt{5}}{2} = 12{,}5 \cdot \sqrt{5}$

Ответ: $\frac{6}{\sqrt{5}}$ - радиус ω, $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ - радиус Ω

$S_{BACE} = 12{,}5 \cdot \sqrt{5}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

$3x - 6|2x-1| \le ax+b \le -3x^2+6x+7$

$3x - 6|2x-1| \le -3x^2+6x+7$

$\begin{cases} 2x-1<0 \Rightarrow x<\frac{1}{2} \\ 3x+6(2x-1) \le -3x^2+6x+7 \end{cases}$

$20x - 6 \le -3x^2+6x+7$

$3x^2+14x-13 \le 0$

Нули: $3x^2+14x-13=0$

$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+...}}{3} = \frac{-7 \pm \sqrt{153}}{3}$

$\frac{D}{4} = 7^2 + 3\cdot 13 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~корней~~ нет

$+$

реш нет

$\begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ \text{реш нет} \end{cases}$

реш нет

$\begin{cases} 2x-1 \ge 0 \Rightarrow x \ge \frac{1}{2} \\ 3x - 12x + 6 \le -3x^2+6x+7 \end{cases}$

$-4x+6 \le -3x^2+6x+7$

$3x^2-10x-1 \le 0$

Нули: $x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+3}}{3} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{3}$

$+ \quad - \quad +$

$\frac{5-\sqrt{33}}{3} \qquad \frac{5+\sqrt{33}}{3}$

$\begin{cases} \frac{5-\sqrt{33}}{3} \le x \le \frac{5+\sqrt{33}}{3} \\ x \ge \frac{1}{2} \end{cases}$

$\frac{5-\sqrt{33}}{3} \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{5+\sqrt{33}}{3}$

$\frac{1}{2} \le x \le \frac{5+\sqrt{33}}{3}$ $\Rightarrow$

Но по усл $-\frac{1}{2} \le x \le 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \le x \le 1$

$3x - 6|2x-1| \le ax+b \le -3x^2+6x+7$

$\begin{cases} 3x - 12x + 6 \le ax+b \\ ax+b \le -3x^2+6x+7 \\ \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$ $(2x-1) \ge 0$, т.к. $\frac{1}{2} \le x \le 1$

☒ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

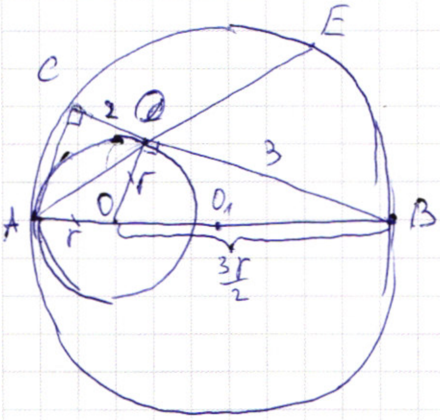
Страница № ~~1~~

(Нумеровать только чистовики)

$$\left\{\begin{array}{l} \cancel{-4x+6 \le ax+b} \\ \cancel{ax+b \le -7x^2+6x+7} \\ \cancel{\frac{1}{2} \le x \le 1} \end{array}\right.$$

Дано: $CD = 2$, $DB = 3$

№ 5



Дано: 1) Пусть O – центр ω, с радиусом r

2) ~~OD~~ OD – радиус ω; BC – касательная $\Rightarrow$

$\Rightarrow OD \perp BC$

2) $\angle C = 90^0$ т. к. вписанный, опирается на AB – диаметр Ω $\Rightarrow$

$\Rightarrow AC \perp BC$

3) $\left.\begin{array}{l} OD \perp BC \\ AC \perp BC \end{array}\right) \Rightarrow OD \parallel AC \Rightarrow$ по т. Фалеса $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{AO}{OD}} = \frac{AO}{OB} = \frac{CD}{DB}$$

AO – радиус ω $\Rightarrow AO = r$

$$\frac{r}{OB} = \frac{2}{3}$$

$$2\,OB = 3r$$

$$OB = \frac{3}{2}r$$

$AB = AO + OB = r + \frac{3r}{2} = 2{,}5r$, ~~т.к. AB-диаметр~~

4) В $\triangle ODB$ – прямоуг: по т. Пифагора $\Rightarrow$

$$\Rightarrow OB^2 = OD^2 + BD^2$$

$$\left(\frac{3r}{2}\right)^2 = r^2 + 3^2$$

$$\frac{9}{4}r^2 - r^2 = 9$$

$$\frac{5}{4}r^2 = 9$$

$$r^2 = \frac{9 \cdot 4}{5} \Rightarrow r = \frac{6}{\sqrt{5}} \qquad AB = 2{,}5r$$

$$\frac{AB}{2} = \frac{5 \cdot 6}{4\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5} \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2x-1\geq 0$

$2x\geq 1$

$x\geq \frac{1}{2}$

$D(f)=\mathbb{R}>0$

$F(ab)=F(a)+F(b)$

$F(p)=[\frac{p}{2}]$ для p-простого

$2\leq x\leq 22$

$2\leq y\leq 22$

$F(2)=[\frac{2}{2}]=1$

$F(3)=[\frac{3}{2}]=1$

$F(5)=2$

$F(7)=3$

$F(11)=5$

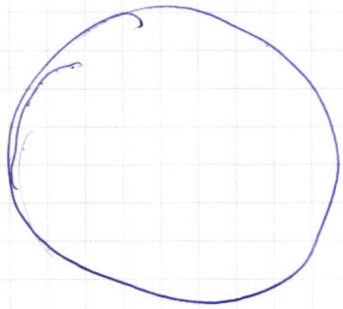
$F(13)=6$

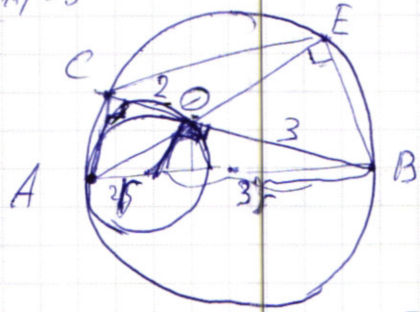
$F(17)=8$

$F(19)=9$

$F(\frac{x}{y})<0$

$F(\frac{x}{y})=F(x)+F(\frac{1}{y})=$





~~$CD\cdot DB=16=AD\cdot DE$~~

$25+a^2=16r^2$

$a=\sqrt{16r^2-25}$

$\frac{AD}{ED}=$

$\frac{2}{AD}=\frac{ED}{3}$ $\frac{CE}{AB}=$

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \ (2) \end{cases}$$

$(2):\ x^2-12x+36+2y^2-4y-16=0$

$(x-6)^2=-2y^2+4y+16$

$x-6=\pm\sqrt{-2y^2+4y+16}$ $x=6\pm\sqrt{-2y^2+4y+16}$

$\sqrt{xy-6y-x+6}=\sqrt{y(x-6)-(x-6)}=\sqrt{(x-6)(y-1)}=$

$=\sqrt{\pm\sqrt{-2y^2+4y+16}\,(y-1)}$

$(x-6y)^2=\pm\sqrt{-2y^2+4y+16}\,(y-1)$

~~$(x-6y)^4=(-2y^2+4y+16)(y-1)^2$~~

$x-6y=6\pm\sqrt{-2y^2+4y+16}-6y$ $(6-6y\pm\sqrt{-2y^2+4y+16})^2$

$36(1-y)\pm12(1-y)\sqrt{-2y^2+4y+16}+(-2y^2+4y+16)=\pm\sqrt{-2y^2+4y+16}\,(y-1)$

$36(1-y) \pm 11(y-1)\sqrt{-2y^2+4y+16} = 2y^2-4y-16$

$+\frac{36}{\frac{16}{42}}$

$\pm 11(y-1)\sqrt{-2y^2+4y+16} = 2y^2+32y-42$

$\pm 11(y-1)\sqrt{-2y^2+4y+16} = 2(y^2+16y-21)$

$y^2+16y-21=0$

$\cancel{y_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{64+21}}{}}$

$11(y^2-2y+1)(-2y^2+4y+16) = 4(y^2+16y-21)^2 \;|:2$

$11(y^2-2y+1)(-y^2+2y+8) = 2(y^4+2y^2(16y-21)+(16y-21)^2)$

$11(-y^4+\cancel{2y^3}-y^2+\cancel{2y^3}-4y^2+2y+8y^2-16y+8) = 2y^4+4y^2(16y-21)$
$+2(16^2y^2-32\cdot21y+21^2)$

$11(-y^4+3y^2-14y+8) = 2(y^4+32y^3-42y^2+16^2y^2-32\cdot21y+21^2)$

$11(-y^4+3y^2-14y+8) = 2(y^4+32y^3+214y^2-672y+441)$

$-11y^4+33y^2-154y+88 = 2y^4+64y^3+428y^2-1344y+881$

$\frac{256 - 42}{214}$

$13y^4+64y^3+395y^2-1190y$

$\frac{32 \times 21}{32\; 64 \;\; 672}$ 21

$x-6y = \sqrt{xy-6y-x+6} =$

$= \sqrt{y(x-6)-(x-6)} = \sqrt{(x-6)(y-1)}$

$\frac{1344 - 154}{1190}$ $\frac{428 - 33}{395}$

$x^2+2y^2-12x-4y+20 =$

$\cancel{(x-6)(y-1) = xy-6y-x+6}$ $(x-6)^2+2(y-1)^2-18=0$ $a^2+2b^2-18=0$

$= x^2-12x+36+2y^2-4y-16 = 0 = (x-6)^2+\sqrt{2}^2y^2-2\cdot\sqrt{2}\sqrt{2}y+2-18=0$

$=(x-6)^2+(\sqrt{2}y-\sqrt{2})^2-18 = (x-6)^2+2(y-1)^2-18 =$

$(x-6)^2+(y-1)^2-2(x-6)(y+1)+2(x-6)(y+1)+(y-1)^2-18 = (x-6-y+1)^2+2(x-6)(y+1)+$
$+(y-1)^2-18 =$

$= \cancel{x-y}-5 \quad (x-6)(y+1) = \frac{18-(y-1)^2-(x-y-5)^2}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a, b, c — Г.П.
$ax^2-2bx+c=0$
корень

$a,\ a\cdot q,\ a\cdot q^2,\ a\cdot q^3$

$b^2=ac$

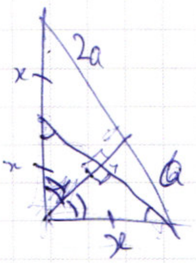
$\cancel{c^2=b^2(ax^2-2bx+c)}$

$b^2=ac$

$a\cdot q^3$ — корень $ax^2-2bx+c=0$

$x_{1,2}=\dfrac{+b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}=\dfrac{b}{a}$

$P=900$



$a=0$
$-2bx+c=0$
$0=0$

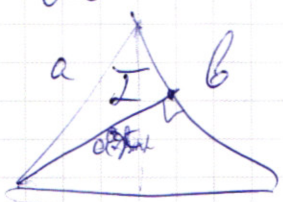
$S=absin\angle$
$\frac{x}{a}=\sin\angle$
$x=a\sin\angle$

$x=\dfrac{b}{a}=a\cdot q^3$

$b=a^2\cdot q^3$

$a\cdot q=a^2\cdot q^3 \quad |:aq\neq 0$

$1=a\cdot q^2=1$



$\dfrac{2x}{a}=\dfrac{x}{b}$

$\cancel{ax=2xb}$

$S=\frac{1}{2}\dfrac{a}{\sin\angle}\cdot b=\dfrac{ab}{2\sin\angle}=\frac{1}{2}ab\sin\angle$

I $a=x$ — невозм

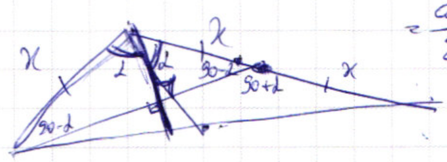
$3x+x=900$

$4x=900$

$x=25\cdot 9$

$a=25\cdot 9$

~~36~~ — 4.8.13
7^2-313



$a^2=x^2+4x^2-4x^2\cos 2\angle$

$a^2=x^2(5-4\cos 2\angle)$
$-1\leq\ \leq 1$
$1\leq\ \leq 9$

$\frac{5+5,\ldots}{3}=$

$a^2 4$ $\quad a=\sqrt{x}$
4
9

$a=1\cdot x$
2
3

$a=2x$

$a=2x$ — единств случай

$x+2x+2x=900$

$5x=900$

$x=180$

$\begin{array}{r} 900 \,|\, 5 \\ 5 \quad 180 \\ 40 \\ 40 \end{array}$

Отв: 1 Δ

$x-6y=\cancel{x-6y+y-y+6-6}=$
$=x-6y+6-6=(x-6)-6(y-1)$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-6y=\sqrt{xy-6y-x+6} \quad (1) \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \quad (2) \end{cases}$$

(2): $x^2-12x+2y^2-4y+20=0$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-(2y^2-4y+20)}}{1}=\frac{6\pm\sqrt{36-2y^2+4y-20}}{1}=$$

$$=6\pm\sqrt{-2y^2+4y+16}=6\pm\sqrt{2(-y^2+2y+8)}$$

(1): $\begin{cases} x-6y\geq 0 \Rightarrow x\geq 6y \\ (x-6y)^2=xy-6y-x+6 \quad (3) \end{cases}$

(3): $x^2-12xy+36y^2=xy-6y-x+6$

$$x^2-13xy+36y^2+6y+x-6=0$$

$$x^2+x(-13y+1)+36y^2+6y-6=0$$

$$x_{1,2}=\frac{13y-1\pm\sqrt{(13y-1)^2-4(36y^2+6y-6)}}{2}=\frac{13y-1\pm\sqrt{169y^2-26y+1-4\cdot 36y^2-4\cdot 6y+4\cdot 6}}{2}$$

$$=\frac{13y-1\pm\sqrt{25y^2-50y+25}}{2}=\frac{13y-1\pm\sqrt{(5y-5)^2}}{2}=\frac{13y-1\pm(5y-5)}{2}$$

$x_1=\dfrac{13y+5y-1-5}{2}$ $\qquad x_2=\dfrac{13y-1-5y+5}{2}$

$x_1=9y-3$ $\qquad b_{1,2}=\dfrac{13b\pm\sqrt{169b^2-4\cdot 36b^2}}{2}=\dfrac{13b\pm\sqrt{25b^2}}{2}$ $\qquad x_2=\dfrac{8y+4}{2}$ $\qquad x_2=4y+2$ $\qquad \dfrac{13b+5b}{2}=9b$

$9y-3=6\pm\sqrt{2(-y^2+2y+8)}$

$9y-9=\pm\sqrt{2(-y^2+2y+8)}$

$(9y-9)^2=-2y^2+4y+16$

$81y^2-162y+81=-2y^2+4y+16$

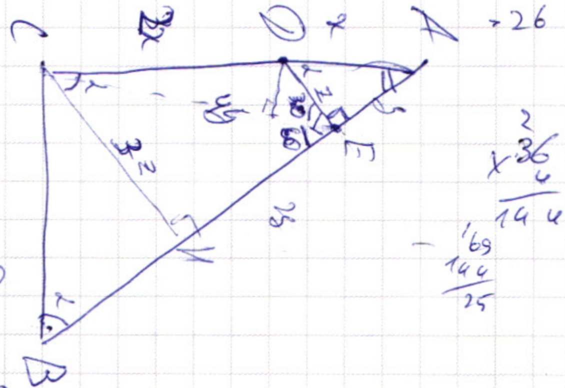
$83y^2-168y+65=0$

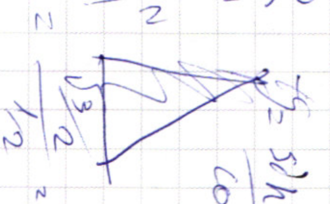
$$y_{1,2}=\frac{84\pm\sqrt{84^2-65\cdot 83}}{83}=\frac{84\pm\sqrt{84^2-(74^2-9^2)}}{83}=$$

$83-65=18$ $\qquad =\dfrac{84\pm\sqrt{84^2-74^2+9^2}}{83}=$

$65+9=74$

$$=\frac{84\pm\sqrt{(84-74)(84+74)+9^2}}{83}=\frac{84\pm\sqrt{7580+81}}{83}$$





$\frac{ED}{CK}=\frac{3}{1}$ $\quad \frac{CK}{ED}=\frac{AC}{AE}$

$9z^2+4y^2=18y^2$

$9z^2=12y^2$

$3z^2=4y^2$

$\frac{ED}{AE}=2$

x^2: 36 · 36 = 144; 169 − 144 = 25

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sin 60°$ $\quad \cos 60°$

$8x-6|2x-1|\leq 8x-8x^2+6x+7$

$x_{1,2}=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{...}$

$8x-6|2x-1|\leq -8x^2+6x+7$

$2x-1<0$

41 · 41 = 1681

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)