МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

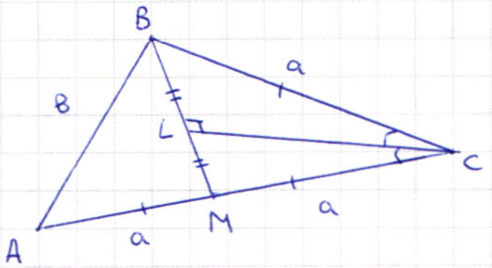
$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 2



Пусть $\triangle ABC$ - иск., BM - медиана $\triangle ABC$, CL - бис-са $\triangle BCM$, $CL \perp BM$. Тогда в $\triangle BCM$ CL - бис-са и высота $\Rightarrow$

$\Rightarrow BC = CM = AM$. Пусть $BC = CM = AM = a$, $AB = в$. Тогда:

$$\begin{cases} 3a + в = 1200 \\ \cancel{a+в<2a} \\ 2a < a + в \\ a < 2a + в \text{, верно } \forall a, в \in \mathbb{N} \\ в < 3a \end{cases} \qquad \begin{cases} 3a + в = 1200 \\ a < в \\ в < 3a \end{cases}$$

$$\begin{cases} в < 3a \\ 3a + в = 1200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} в < 600 \\ 3a > 600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} в < 600 \\ a > 200 \end{cases} \Rightarrow$$

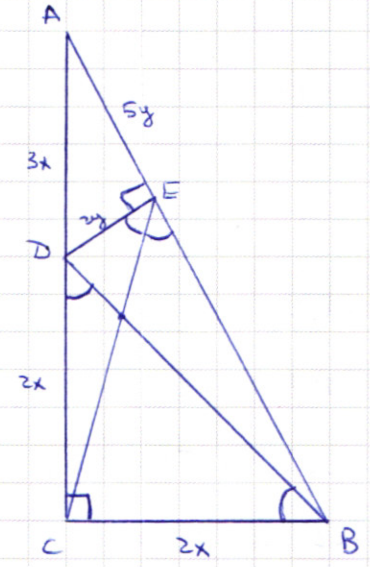
$$\begin{cases} a < в \\ 3a + в = 1200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a < 1200 \\ 4в > 1200 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 300 \\ в > 300 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \in (200; 300) \\ в \in (300; 600) \end{cases} \qquad в = 1200 - 3a, \ a \in (200; 300) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ кол-во целых чисел в промежутке $(200; 300)$ и есть кол-во искомых треуг-ников (при $a \in \mathbb{N}$ $в \in \mathbb{N}$, а при $в \in \mathbb{N}$ a не всегда нат. число). Получаем, что кол-во треуг-ников - $300 - 200 - 1 = 99$ (не включительно)

Ответ: 99

N4



Пусть $AD = 3x$. Тогда $CD = 2x$.

$\angle CEB = 180^\circ - \angle DEA - \angle CED =$

$= 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

В $CDEB$ $\angle DEB + \angle DCB = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EDC + \angle EBC = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow CDEB$ вписан $\Rightarrow \angle CEB = \angle BDC = 45^\circ$

как впис., опир. на одну дугу.

в $\triangle DCB$ $\angle C = 90^\circ$, $\angle D = \angle B = 45^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow CD = CB = 2x$

а) $tg\angle BAC = \cancel{\frac{AC}{BC} = \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}} = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$

б) $5x = \sqrt{29} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{29}}{5}$

$\triangle ADE$: $tg\angle BAC = \frac{DE}{AE} = \frac{2}{5}$. Пусть $DE = 2y$ и $AE = 5y$

Тогда $\triangle AED$, $\angle E = 90^\circ$, т. Пифагора:

$AE^2 + DE^2 = AD^2$

$25y^2 + 4y^2 = 9x^2 = 9 \cdot \frac{29}{25}$

$29y^2 = 9 \cdot \frac{29}{5} \Rightarrow y^2 = \frac{9}{25}$, $\underline{y = \frac{3}{5}}$

в $\triangle AEC$ $\frac{S_{AED}}{S_{CED}} = \frac{AD}{CD} = \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2} \Rightarrow S_{CED} = \frac{2S_{AED}}{3} =$

$= \frac{AE \cdot DE}{3} = \frac{5y \cdot 2y}{3} = \frac{10y^2}{3} = \frac{10 \cdot \frac{9}{25}}{3} = \cancel{\frac{2,9}{3}} = \cancel{6}$

$= \frac{18}{15} = \frac{6}{5}$

Ответ: а) $\frac{2}{5}$; б) $\frac{6}{5}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

a, b, c – $\overbrace{\text{члены}}^{\text{последов.}}$ геом. прогрессии $\Rightarrow$ $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = q \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{b^2 = ac}$

$\underline{c - ?}$

$cq = c \cdot \frac{b}{a}$ – четвертый член прогрессии

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$D/4 = b^2 - ac = 0 \quad (b^2 = ac)$

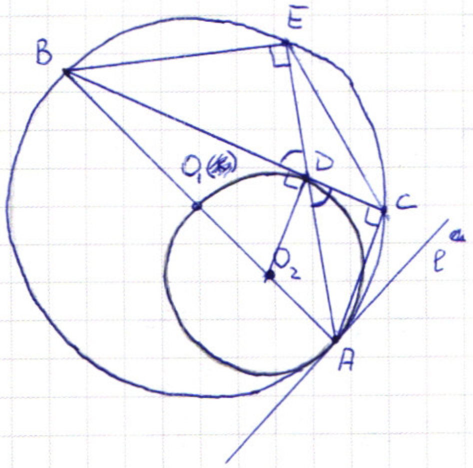
$x = \frac{-b}{a} = c \cdot \frac{b}{a} \Rightarrow \underline{c = -1}$

Ответ: -1

N 5

Пусть $\omega(O_2; r)$

$\Omega(O_1; R)$, ℓ – общ. касательная.



$$\left.\begin{array}{l} AB \cap \ell = A \\ AB \perp \ell \\ O_2A \cap \ell = A \\ O_2A \perp \ell \end{array}\right\} \Rightarrow O_2 \in AB$$

$$\left.\begin{array}{l} O_2D \perp BC \text{ (радиус к касат.)} \\ AC \perp BC \ (\angle BCA \text{ опир. на } AB \text{– диаметр } \Omega) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow O_2D \parallel AC \Rightarrow \triangle O_2BD \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{BO_2}{O_2A} = \frac{BD}{DC} = \frac{3}{1}$

$BO_2 = AB - O_2A = 2R - r, \quad O_2A = r$

$\frac{2R - r}{r} = \frac{3}{1} \Rightarrow 3r = 2R - r \Rightarrow 4r = 2R \Rightarrow \boxed{R = 2r} \Rightarrow$

$\Rightarrow O_1 \in \omega.$

По св-ву отрезка касательной и отрезков секущей:

$BD^2 = BO_1 \cdot BA$

$9 = R \cdot 2R = 2R^2 \Rightarrow R = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$\frac{O_2D}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AC = \frac{4 \cdot O_2D}{3} = \frac{4r}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$

$\triangle ADC$, $\angle C = 90^\circ$, т. Пифагора:

$AD^2 = CD^2 + AC^2 = \cancel{1 + \frac{3}{9} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow AD = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$

$= 1 + 2 = 3 \Rightarrow AD = \sqrt{3}$

$\triangle ADC \sim \triangle BDE$ ($\angle BE\cancel{A}^{D} = \angle ACD = 90^\circ$, опир. на диаметр Ω; $\angle BDE = \angle ADC$ как вертикальные) $\Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{ED} = \frac{AC}{BE}$

$\cancel{\frac{\sqrt{3}}{BD}}$ $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{ED} = \frac{\sqrt{2}}{BE} \Rightarrow ED = \sqrt{3}$, $BE = \sqrt{6}$

$S_{BACE} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AE \cdot \sin\angle CDA = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (DE + AD) \cdot \frac{AC}{AD} =$

$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \underline{4\sqrt{2}}$

Ответ: $r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$; $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$; $S_{BACE} = 4\sqrt{2}$

N3

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

ОДЗ: $y - 2x \geq 0$
$xy - 2x - y + 2 \geq 0$

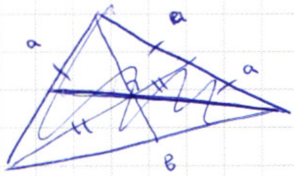
$$\begin{cases} (y-2x)^2 = xy - 2x - y + 2 = x(y-2) - (y-2) = (y-2)(x-1) \\ (x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 - 4y + 4) - 4 + x^2 + 3 = (x-2)^2 + (y-2)^2 - 4 + x^2 - \\ - 1 = (x-2)^2 + (x-2)(x+2) + (y-2-1)(y-2+1) = (x-2)(x-2+x+2) + \\ + (y-3)(y-1) = 2x(x-2) + (y-3)(y-1) = 0 \end{cases}$$

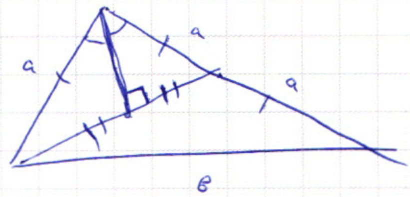
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





Предельные случаи:

$a = b$

$b = 3a$

$3a + b = 1200$

$\begin{cases} 2a < a+b \\ b < 3a \\ a < 2a+b \end{cases}$ $\begin{cases} a < b \\ b < 3a \end{cases}$

~~вдать~~

При $b = 3a$: $900 + 300$

$300, 600, 300$

$2b = 1200$

$b = 600 \Rightarrow a = 200$,

$b < 3a < 3b$, $b < 3b$

треуг-ника со сторонами 200, 400, 600 не существ.

600 600

603 597 201 ~~201~~ 402 597

$a > 200 \Rightarrow b < 600$

$a = b$ 201 420 597

При $a = b$

$4a = 1200$

$a = 300 \Rightarrow b = 300$

$4a = 1200$

$a = 300$ $900 + 300 = 1200$

300 600 300

Треуг-ника со сторонами 300, 300, 600 не сущ.

$a < 300$, $b > 900 \Rightarrow a \in (200; 300)$, ~~$b \in (600; 900)$~~,

$a, b \in \mathbb{Z}$

$a = 201 \Rightarrow b = 1200 - 3a = 1200 - 603 = 597$

$2a < a + b$

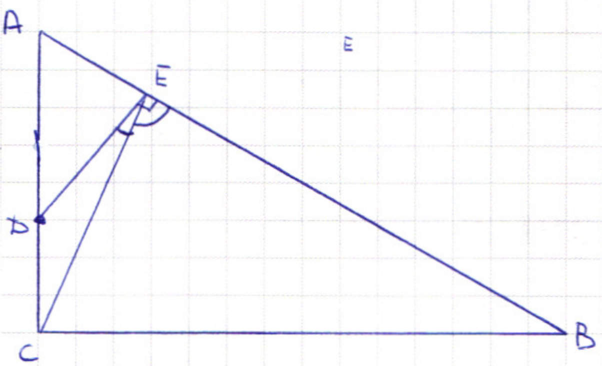
При $a \leq 200$:

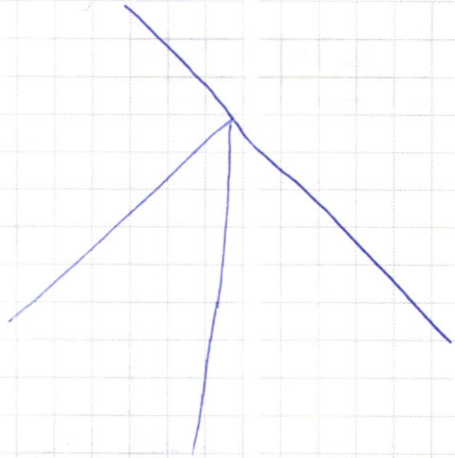
$a < b$

$3a \leq 600 \Rightarrow b \geq$

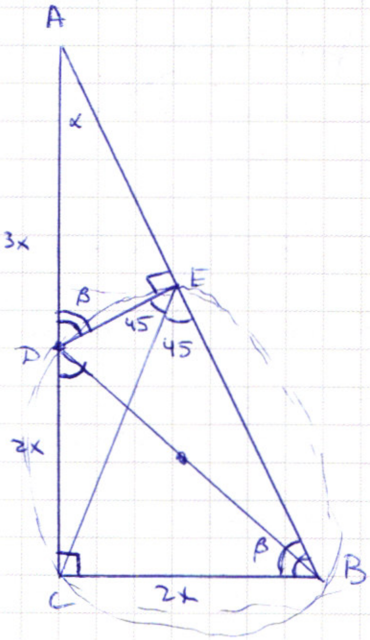
☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)





$\frac{3\sqrt{29}}{5}$



$tg\angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{DE}{AE}$

$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{CB}$

$\frac{3x}{AB} = \frac{AE}{5x} = \frac{DE}{\cancel{CB}\ 2x}$

$AB \cdot AE = 3x \cdot 5x$

$\frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$

$5x = \sqrt{29}$

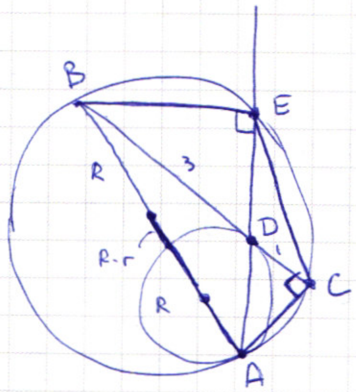
$x = \frac{\sqrt{29}}{5}$

~~AD~~

$\frac{AE}{5x} = \frac{DE}{2x}$

$2AE = 5DE$

$\frac{AE}{DE} = \frac{5}{2}$



$4^2 = (R+R-2r)(R+R) =$

$= (2R-2r)\cdot 2R =$

$= 4R(R-r)$

$R(R-r) = 4$

$R^2 - Rr = 4$

$r = \frac{R^2-4}{R}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(y) + f(\frac{1}{x})$

$f(a \cdot 1) = f(a) + f(1) = f(a) \Rightarrow \underline{f(1) = 0}$

$2x^2 - x - 1 \leq ax + b \leq x + |2x-1|$

$x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$

$2x^2 - x - 1 \leq ax + b$

$\cancel{2x^2 - x - ax \leq b+1}$ $\quad 2x^2 - x - 1 - ax - b \leq 0$

$2x^2 - x(a+1) - (1+b) \leq 0$

$D = (a+1)^2 + 4(1+b) \cdot 2 =$

$= a^2 + 2a + 1 + 8 + 8b = a^2 + 2a + 8b + 9$

$ax + b \leq x + |2x-1|$ $\quad$ при $x \geq \frac{1}{2}$:

$ax + b \leq 3x - 1$

$x(3-a) \geq b+1$

$x \geq \frac{b+1}{3a}$ $\cancel{\geq \frac{1}{2}}$

$x \geq \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy - 2x - y + 2$

$2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$

$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) - 4 - 1 + x^2 = 0$

$\cancel{x^2}$ $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (x-2)(x+2) - 1 =$

$= (x-2)(x-2+x+2) + (y-2-1)(y-2+1) =$

$= 2x(x-2) + (y-3)(y-1) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} b^2+4a^2-5ab = b^2+2a^2-3 \\ b^2+4a^2-5ab=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a^2-5ab+3=0 \\ b^2+4a^2-5ab=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a^2-5ab+3=0 \\ b^2+4a^2\cancel{-5ab}=2a^2\cancel{-5ab}+3 \end{cases}$$

$$\cancel{2a^2+b^2-3}$$

$$(y-2x)^2=(y-2)(x-1)$$

$$y^2-4xy+4x^2=xy-y-2x+2$$

$$y^2-5xy+4x^2+y+2x-2=0$$

$a,\ b=qa,\ c=q^2a,\ d=q^3a$

?

$$D/4=b^2-ac$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a} \qquad \frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{a}=qc=\frac{c\cdot b}{a}$$

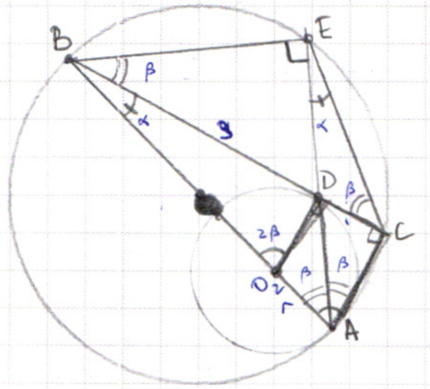
$$\cancel{b^2-ac=b^2c^2}$$

$$-b+\sqrt{b^2-ac}=bc$$

$$b^2c^2+2b^2c+\cancel{b^2}=\cancel{b^2}-ac$$

$$b^2c+2b^2=-a$$

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c} \Rightarrow b^2=ac$$



$$1+\frac{3}{9}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{-b}{a}=\frac{bc}{a} \Rightarrow c=-1$$

$$\frac{1}{2}d_1d_2\sin\angle\alpha \qquad \frac{2R-r}{r}=\frac{3}{1}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \quad k=\frac{3}{4} \qquad 2R-r=3r$$

$$16=(2R-2r)$$

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad 2R=4r \Rightarrow R=2r$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$

$\cancel{y^2-4xy+}$

$\cancel{x^2+y^2-4(x+y)+3=0}$

$$\begin{cases} (y-2x)^2=(y-2)(x-1) \\ (y-3)(y-1)+2x(x-2)=0 \end{cases}$$

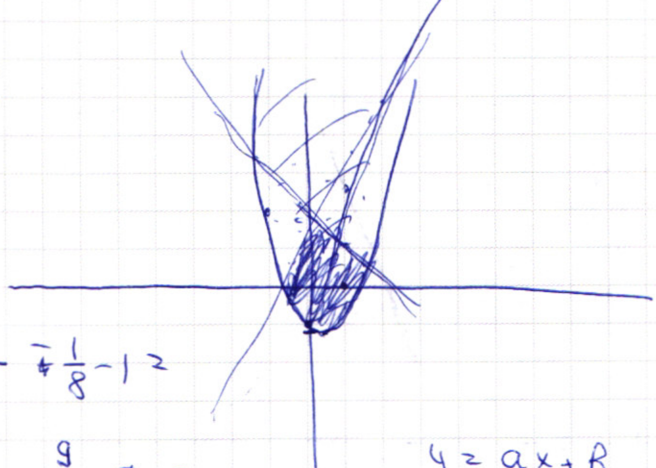
$$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$\cancel{y^2}-4xy+\underline{4x^2}-\underline{2x^2}-\cancel{y^2}+4x+4y-3=2x^2-4xy+4x+4y-3=0$

$y(4-4x)=3-4x-2x^2$

$y=\dfrac{2x^2+4x-3}{4x-4}=\cancel{\dfrac{2x(x+2)-3}{}}\quad \dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{4x-4}$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2+4x-3 & 4x-4 \\ \underline{2x^2-2x} & \frac{1}{2}x+\frac{6}{4} \\ 6x-3 & \\ \underline{6x-6} & \\ 3 & \end{array}$$



$2x^2-x-1=$

$=2x^2-2\cdot\sqrt{2}x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{8}-1=$

$=\left(2x^2-2\sqrt{2}x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{8}\right)-\dfrac{9}{8}=0=$

$=\left(\sqrt{2}x-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2-\dfrac{9}{8}$

$\underline{y=ax+b}$

$x\geq\dfrac{1}{2}\qquad 3x-1$

$x-2x+1=-x+1$

$2\cdot\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{4}-1=$

$=\dfrac{1}{8}+\dfrac{2}{8}-\dfrac{8}{8}=-\dfrac{5}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$f(3) = 1$

$f(5) = 2$

$f(7) = 3$

$f(11) = 5$

$f(13) = 6$

$f(17) = 8$

$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(1/y) =$

$\frac{y}{\frac{1}{y}} = y^2$

$4x - 1$

$x = \frac{1}{4}$

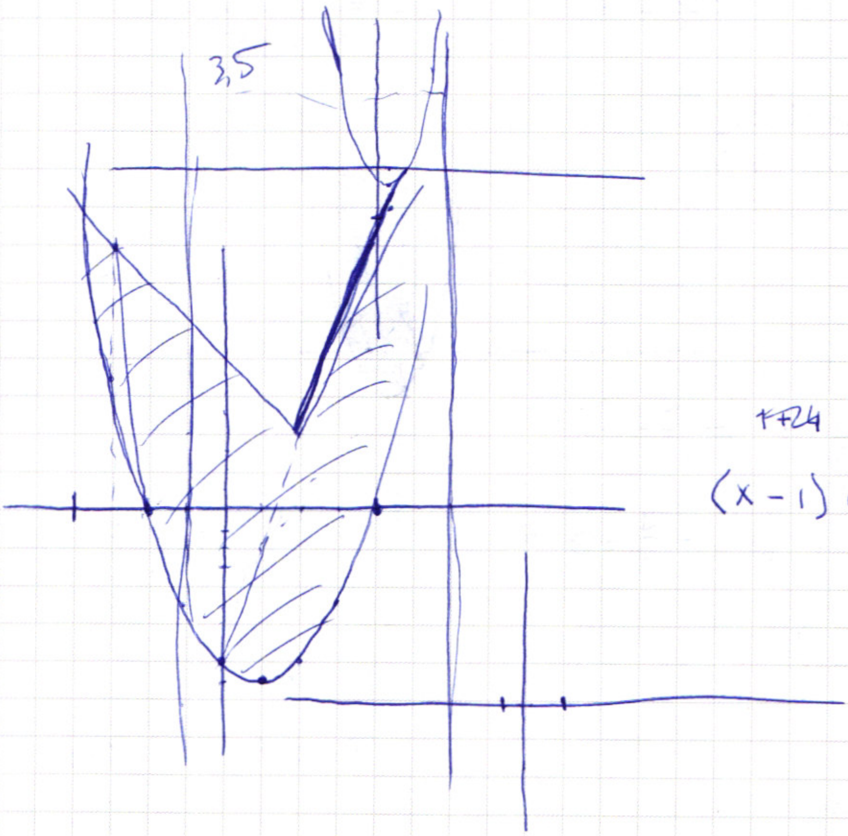
$y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}$

$x(2x-1) - 1$

$(x\sqrt{2})^2 - 2 \cdot x\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{8} - 1 =$

$2\left(x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) = 2\left(x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} - \frac{1}{2}\right) =$

$= 2\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} - 1 = 2\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$



$2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 1 =$

$= \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 = \frac{2-1-4}{8} =$

$= -\frac{3}{8}$

$\frac{1-2-8}{8}$

$1 + 4 \cdot 2 = 9$

$(x-1)(x+\frac{1}{2})$

$\frac{9}{8}$

$x + 2x - 1 =$

$= 3x - 1$

$2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 =$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - 1 = -1$

$2 \cdot \frac{9}{16} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{9}{8} + \frac{6}{8} - \frac{8}{8} = \frac{7}{8}$

$2 \cdot \frac{9}{16} - \frac{3}{4} - 1 = \frac{9}{8} - \frac{6}{8} - \frac{8}{8} = -\frac{5}{8}$

$y = 3x - 1$ $x = \frac{3}{2}$ $\frac{9}{2} - 1 = 3,5$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

ОДЗ: $y-2x \geq 0$

$xy-2x-y+2 \geq 0$

$$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$$

$xy-2x-y+2=x(y-2)-(y-2)=$

$=(y-2)(x-1)$

$$\begin{cases} y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0 \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases}$$

$$(y-2x)^2=(y-2)(x-1)$$

$\cancel{(y-2x)^2=y^2-4xy+4x^2}$

$$\begin{cases} x-1=a \\ y-2=b \end{cases} \Rightarrow$$

$$(b+2-2(a+1))^2=(b-2a)^2=$$

$=ab$

$2x^2+y^2-4x-4y+4-1=$

$\cancel{2x(x-2)+y(}$

$2x^2+2y^2-y^2-4x-4y+3=$

$=2x^2(x-2)+2y(y-2)+2+1-y^2=$

$=2(x(x-2)+y(y-2)+1)+(y-1)(y+1)$

$x^2+x^2+(y^2-4y+4)-4x+y-4-1=$

$=(y-2)^2+(x-2)^2+x^2-4-1=$

$=(y-2)^2-1+(x-2)^2+(x-2)(x+2)=$

$=(y-2-1)(y-2+1)+(x-2)(x-2+x+2)=$

$=(y-3)(y-1)+2x(x-2)$

$b-1 \quad b+1 \quad 2(a+1) \quad a-1$

$$\begin{cases} (y-2x)^2=(y-2)(x-1) \\ (y-3)(y-1)+2x(x-2)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1=a \\ y-2=b \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=a+1 \\ y=b+2 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} ((b+2)-2(a+1))^2=ab \\ (b-1)(b+1)+2(a+1)(a-1)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b-2a)^2=ab \\ (b-1)(b+1)+2(a+1)(a-1)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2-4ab+4a^2=ab, \quad b^2+4a^2-5ab=0 \\ b^2-1+2a^2-2=b^2+2a^2-3=0 \end{cases}$$

$2a^2-5ab=-3$

$\cancel{2a(2a-5b)=-3}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1 a, b, c , => $a=a$, $b=qa$, $c=qb=q^2a$, $d=q^3a$, $e=q^4a$

$ax^2+2bx+c=0$

$D/4=b^2-ac$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$

Пусть $e=\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{a}=q^{3}a=qc=c\cdot\frac{b}{a}$

$-b+\sqrt{b^2-ac}=bc$

$b(c+1)=\sqrt{b^2-ac}$

$b^2(c+1)^2=b^2-ac$

$b^2c^2+2b^2c+\cancel{b^2}=\cancel{b^2}-ac$

$c^2b^2+2b^2c+ac=0$

$c(cb^2+2b^2+a)=0$

$\left[\begin{array}{l}c=0\\cb^2+2b^2+a=0\end{array}\right.$

$c=\frac{2b^2+a}{b^2}=2+\frac{a}{b^2}=2+\frac{a}{a^2q}=2+\frac{1}{aq}=$

$=2+\frac{1}{b}=b\cdot\frac{b^2}{a}$

a, qa, q^2a, q^3a

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$

1) $\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{a}=q^3a=qc=\frac{cb}{a}$

$\cancel{c=\frac{b^2-b}{}}$

$c=$

$\sqrt{b^2-ac}-b=cb$

$\sqrt{b^2-ac}=cb+b$ $\qquad cb+b\geq0$

$\cancel{b^2}-ac=(b(c+1))^2=(cb+b)^2=c^2b^2+2cb^2+\cancel{b^2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)