# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 10 класс

ВАРИАНТ 10 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа $a$, $b$, $c$ являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа $a$, $b$, $c$ не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 - 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 900 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{xy - 6y - x + 6}, \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике $ABC$ на катете $AC$ и гипотенузе $AB$ отмечены точки $D$ и $E$ соответственно, такие что $AD : AC = 1 : 3$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла $BAC$, если известно, что $\angle CED = 30^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{7}$. Найдите площадь треугольника $CED$.

5. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 2$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$8x - 6|2x - 1| \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 + 6x + 7$$

   выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

7. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 22$, $2 \leqslant y \leqslant 22$ и $f(x/y) < 0$.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$a, b, c$.

$a, aq, aq^2$.

$ax^2 - 2\cdot aqx + aq^2 = 0$

$a(x^2 - 2qx + q^2) = 0$

$a(x-q)^2 = 0$.

$\Rightarrow$ $x = q$ – корень, при том единственный.

$\Rightarrow$ $aq^3 = q$

$q(aq^2 - 1) = 0$.

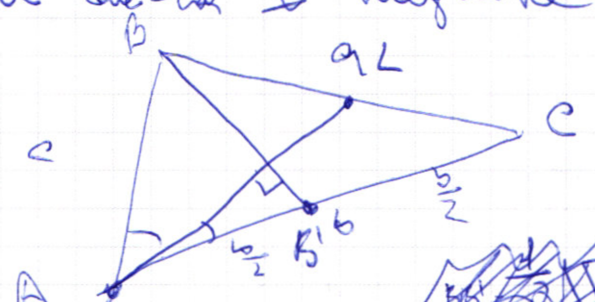
$\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} q = 0 \\ aq^2 = 1 \end{array}\right.$ . Если $q=0$, то $aq^2 = 0$.

Ответ: один 1.

№2

$a + b + c = 900$ ; $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

И бис-са $\perp$ медиане!

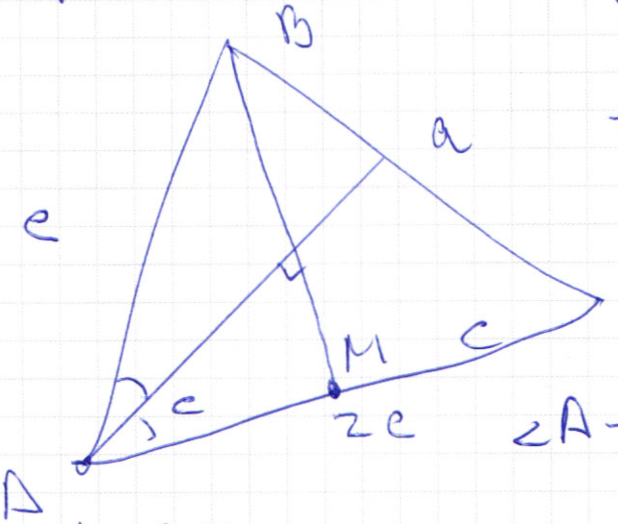



Тогда, в $\triangle ABB_1$, $AL$ – биссектриса и высота $\Rightarrow$ $AB = AB'$ ($c = \frac{b}{2}$, $b = 2c$).

Критерий $\exists$ такого $\triangle$-ка эл-ся нер-во $\triangle$-ка:

$2c + c > a$, $a + c > 2c$; $\Rightarrow c < a < 3c$

Докажем, что $\forall$ $\Delta$-к со сторонами $c, 2c, a$ — где $c, a \in \mathbb{Z}$ и $3c+a=900$, и $c < a < 3c$, -удов-м условию, т.к. $\exists$ бис-са $\perp$ медиане.




Пусть $BM$ - медиана, $\Rightarrow AM = c$.
Т.е. $AB = AM \Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta ABM$ - р/б-й;
Тогда, бис-са $\angle A$ - яв-ся выс. и медианой, а $\Rightarrow$ $\perp BM$.

Т.к. $a > c$, то $P = a+3c > 4c$, $900 > 4c$,
$c < \frac{900}{4} = 25 \cdot 9 = 225$

Т.к. $a < 3c$, то $P = a+3c < 6c \Rightarrow 900 < 6c$,
$c > \frac{900}{6} = 150$, $c$ от 151 до 224, $\Rightarrow$
всего $\Delta$-ов: $224-151+1 = 74$
Ответ: 74 $\Delta$-ка

№3

$\begin{cases} x-6y = \sqrt{xy-6y-x+6} \\ x^2+2y^2-12x-4y+20=0 \end{cases}$

ОДЗ: $x-6y \geq 0$
$xy(x-6)-(x-6) =$
$=(y-1)(x-6) \geq 0$.

Т.к. $(y-1)(x-6) \geq 0 \Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq 1 \\ x \geq 6 \end{cases} \\ \begin{cases} y \leq 1 \\ x \leq 6 \end{cases} \end{array}\right.$

$x^2+2y^2-12x-4y+20 = x^2-2\cdot x\cdot 6+36+2(y^2-2y+1)-38$
$+20 = (x-6)^2+2(y-1)^2-18$.
$(x-6)^2+2(y-1)^2-18=0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

Тогда, заметим что $f(\alpha) = f(\alpha \cdot 1) = f(\alpha) + f(1)$.

$\Rightarrow f(1) = 0$

Тогда, $f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$.

В то же время, $f(1) = f\left(\frac{x}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$;

т.е. т.к. $f(1) = 0$, то $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$.

$\Rightarrow$ То, что $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$.

| $x$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 5 | 3 | 6 | 4 | 3 | 4 | 8 | 3 | 9 | 4 | 4 | 6 |

$f(2) = 1$; $f(3) = \left[\frac{3}{2}\right] = 1$; $f(4) = 2f(2) = 2$; $f(5) = \left[\frac{5}{2}\right] = 2$.

$f(6) = f(2) + f(3) = 2$; $f(7) = \left[\frac{7}{2}\right] = 3$; $f(8) = f(2) + f(4) = 3$.

$f(9) = f(3) + f(3) = 2 \cdot 1 = 2$; $f(10) = f(2) + f(5) = 3$; $f(11) = 5$;

$f(12) = f(3) + f(4) = 3$; $f(13) = \left[\frac{13}{2}\right] = 6$; $f(14) = f(2) + f(7) = 4$;

$f(15) = f(3) + f(5) = 3$; $f(16) = f(4) + f(4) = 4$, $f(17) = \left[\frac{17}{2}\right] = 8$.

$f(18) = f(2) + f(9) = 3$; $f(19) = \left[\frac{13}{2}\right] = 9$; $f(20) = f(4) + f(5) = 4$;

$f(21) = f(3) + f(7) = 4$; $f(22) = f(2) + f(11) = 6$.

Или же, если переформатировать таблицу по значениям:

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

| $f(x)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| все $x$ | 2, 3 | 4, 5, 6, 9 | 7, 8, 10, 12, 15, 18 | 14, 16, 20, 21 | 11 | 13, 22 | x | 17 | 19 |
| $w(x)$ | 2 | 4 | 6 | 4 | 1 | 2 | 0 | 1 | 1 |

Тогда т.к. $f(x)$ должно быть $< f(y)$, то

если $f(x)=1$: таких ~~пар~~ пар $2\cdot(4+6+4+1+2+0+1+1)=38$

$f(x)=2$: $4\cdot(6+4+1+2+0+1+1)=60$.

$f(x)=3$: $6\cdot(4+1+2+1+1)=54$.

$f(x)=4$: $4\cdot(1+2+1+1)=20$

$f(x)=5$: $1\cdot(2+1+1)=4$.

$f(x)=6$: $2\cdot2=4$.

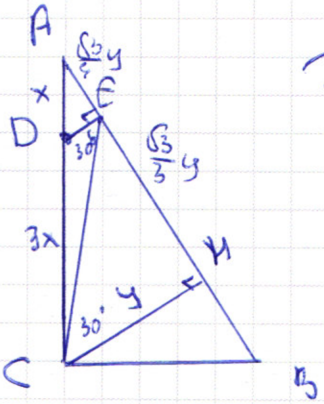
$f(x)=7$: $0$

$f(x)=8$: $1$.

$f(x)=9$: $0$. , при $x, y$ от 2 до 22 и $\in \mathbb{N}$.

Т.е. всего таких пар: $38+60+54+20+4+4+1=80+92+9=$
$=181$.

Ответ: таких пар $(x,y)$ — 181.




№4 (а))

Пусть $AC=$ ~~4x ⇒~~ $\Rightarrow AD=x$, $CD=3x$.

Пусть $CH$ — ~~высота~~ высота $\triangle$-ка $BCA$. Т.к. $DE \parallel CH \Rightarrow \angle HCE=30^\circ$; Пусть $CH=y$.

Тогда, $\operatorname{tg}\angle HCE=\frac{HE}{CH}=\operatorname{tg}30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

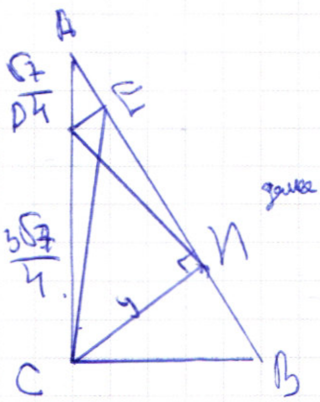
$\Rightarrow HE=\frac{\sqrt{3}}{3}y$. Т.к. $AE:EH=1:3 \Rightarrow$

$\Rightarrow AH=\frac{4}{3}HE=\frac{4\sqrt{3}}{9}$, $\operatorname{tg}\angle BAC=\operatorname{tg}\angle HAC=\frac{CH}{AH}=\frac{y}{\frac{4\sqrt{3}}{9}y}=$

$=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4(б))




Т.к. $\triangle DCH$ — пр-й $\Rightarrow \sin\angle HDC > 0$ и $\cos\angle KDC > 0$;

далее $\angle HDC = \angle A$.

в то же время, $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

$\sin A = \frac{3\sqrt{3}}{4}\cos A$.

$\sin^2 A = \frac{27}{16}\cos^2 A$, $\cos^2 A = \frac{16}{27}\sin^2 A$.

Т.к. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1 \Rightarrow \frac{16}{27}\sin^2 A + \sin^2 A = 1$.

$\frac{43}{27}\sin^2 A = 1 \Rightarrow \sin A = \sqrt{\frac{27}{43}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}}$.

В то же время, $\sin A = \frac{CH}{AC} \Rightarrow CH = AC\cdot\sin A =$

$= \sqrt{7}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{43}} = \frac{3\sqrt{21}}{\sqrt{43}}$.

$DE = \frac{\frac{3\sqrt{21}}{\sqrt{43}}}{4} = \frac{3\sqrt{21}}{4\sqrt{43}}$ — по подобию $\triangle ADE$ и $\triangle ACH$.

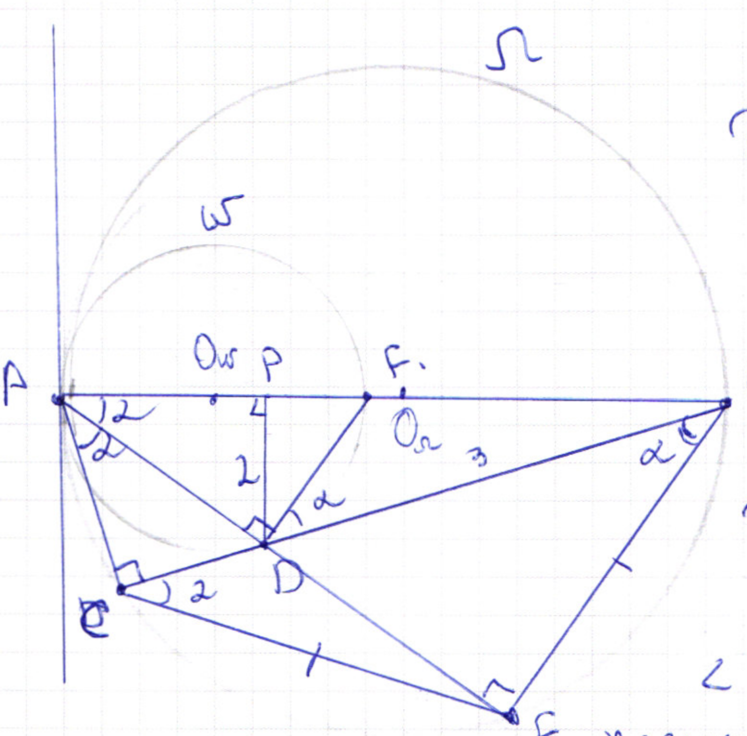
$HE = CH\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{21}}{\sqrt{43}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{43}}$.

Заметим, что $S_{CED} = S_{DEH}$, т.к. у них общее основание $DE$, и у $CH \parallel DE \Rightarrow \rho(C, DE) = \rho(H, DE)$.

$S_{CED} = S_{DEH} = \frac{DE\cdot HE}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{21}}{4\sqrt{43}}\cdot\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{43}} = \frac{63\sqrt{3}}{8\cdot 43} = \frac{63\sqrt{3}}{344}$.

Ответ: а) $\operatorname{tg} A = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ б) $S_{CED} = \frac{63\sqrt{3}}{344}$.

№5




Пусть AB выходящая пересекает ω в т. F. Пусть $r$ — радиус ω, $R$ — радиус Ω; Заметим, что AF — диаметр в ω также, т.к. $O_\omega$, $O_\Omega$ и A лежат на 1-й прямой. Тогда, $\angle ADF = 90^\circ$ — т.к. оп-ся на диаметр ω; $\angle ACB = \angle AEB = 90^\circ$ т.к. опираются на диаметр Ω.

Пусть $\angle EBC = \alpha$. Тогда, $\angle BDF = \alpha$, т.к. $FD \parallel BE$. С другой стороны, $\angle BAD = \alpha$, т.к. BD — кас-ая, и $\angle BDF$ — $\angle$ м/у кас-ой и хордой $FD = \frac{1}{2}\cup FD \Rightarrow \angle BAD = \alpha$. Но, тогда $\angle ECB = \angle BAE = \alpha$ — т.к. лежат на 1-й дуге. И $\angle CAE = \angle CBE = \alpha$ — т.к. лежат на 1-й дуге. Проведём высоту $\triangle ADB$ из т. D. Пусть это будет PD. Т.к. AE — бис-са $\angle BAC \Rightarrow \rho(D, AC) = \rho(D, AB) \Rightarrow$
$\Rightarrow PD = CD = 2. \Rightarrow BP = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$.

Тогда, $\triangle BDP \sim \triangle BAC$ — по 2-м $\angle$-м, и
$\frac{BD}{AB} = \frac{BP}{BC}$, или: $\frac{3}{2R} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow 2R = 3\sqrt{5}$, $R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Сог-но теореме о кв-те кас-й: $BD^2 = BF \cdot BA$, или
$9 = (2R - 2r) \cdot 2R$; $\cancel{9}^{3} = (3\sqrt{5} - 2r) \cdot \cancel{3}\sqrt{5} \Rightarrow$
$\frac{3\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5} - 2r$, $\Rightarrow 2r = \frac{12\sqrt{5}}{5}$, $r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

В то же время, из подобия: $\frac{BP}{BC} = \frac{PD}{AC} \Rightarrow AC = \frac{PD \cdot BC}{BP} = \frac{2 \cdot 5}{\sqrt{5}} =$
$= 2\sqrt{5}$.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Т.е. $AD = \sqrt{4 + 4 \cdot 5} = 2\sqrt{6}$.

Т.к. $CD \cdot BD = AD \cdot DE$, $\Rightarrow$ $DE = \frac{CD \cdot BD}{AD} =$

$= \frac{6}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

$\Rightarrow AE = \frac{5\sqrt{6}}{2}$.

Тогда, $S_{ABEC} = \frac{AE \cdot BC \cdot \sin\angle ADC}{2} =$

$= \frac{\frac{5\sqrt{6}}{2} \cdot 5 \cdot \frac{AC}{AD}}{2} = \frac{25\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} =$

$= \frac{25\sqrt{5}}{4}$.

Ответ: $r = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

$R = \frac{3\sqrt{5}}{2}$

$S_{ABEC} = \frac{25\sqrt{5}}{4}$.

N6.

Рассмотрим в 3-х точках: $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ и $x = -\frac{1}{2}$.

Тогда: $2 \leq a + b \leq 5$ $\quad$ $2 \leq a + b \leq 5$

$4 \leq \frac{a}{2} + b \leq 8$ $\quad$ $8 \leq a + 2b \leq 16$

$-16 \leq -\frac{a}{2} + b \leq 2$ $\quad$ $-32 \leq -a + 2b \leq 4$

$a + b - a + 2b \leq 5 + 4$.

$3b \leq 9 \Rightarrow b \leq 3$.

$\cancel{a} + b - \cancel{a} - 2b \leq 5 - 8$.

$-b \leq -3 \Rightarrow b \geq 3$. $\Rightarrow b = 3$.

$a \leq a \leq 2$

$-38 \leq -a \leq -2 \Rightarrow 2 \leq a \leq 38 \Rightarrow a = 2$.

Значит, если такая прямая $\exists$, то это прямая $y = 2x+3$.

Док-м, что она подходит: $2x+3 \leq -8x^2+6x+7$, при $x \in [-\frac{1}{2}; 1]$.

$$8x^2-4x-4 \leq 0.$$

$$2x^2-x-1 \leq 0$$

$$(x-1)(2x+1) \leq 0; \Rightarrow x \in [-\frac{1}{2}; 1] \leq 0.$$

$$2x+3 \geq 8x-6|2x-1|.$$

Если $x \geq \frac{1}{2}$: $2x+3 \geq 8x-12x+6 = 6-4x$.

$6x \geq 3$, $6x-3 \geq 0$; $\nearrow$, при $x=\frac{1}{2}$:

$3-3=0$, —ч.

$x \leq \frac{1}{2}$: $2x+3 \geq 8x+12x-6 = 20x-6$.

$9 \geq 18x$, $2x-1 \leq 0$. $\nearrow$,

при $x=\frac{1}{2}$ — максимум и ~~2x~~ $2\cdot\frac{1}{2}-1=0$ —ч.

Ответ: $(a,b) \in \{2;3\}$.

№3

Введём замену: $a = x-6$, $b = y-1$.

$$x-6-6(y-1) = x-\cancel{6}-6y+\cancel{6} = x-6y.$$

$$\sqrt{xy-6y-x+6} = \sqrt{y(x-6)-(x-6)} = \sqrt{(y-1)(x-6)}.$$

$$x^2 \cancel{+2y^2} -12x+36+2(y^2-2y+1)-38+20=0$$

$$(x-6)^2+2(y-1)^2-18=0$$

Т.е. ур-ие примет вида:

---

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+2b^2=18 \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} ab\geq 0 \\ a-6b\geq 0 \end{cases}$

$a^2-12ab+36b^2=ab$

$a^2-13ab+36b^2=0$

$a^2+2b^2-18=0$

$\cancel{a^2}-13ab+36b^2-\cancel{a^2}-2b^2+18=0$

$34b^2-13ab+18=0.$

$a=\frac{34b^2+18}{13b}.$

$\frac{(34b^2+18)^2}{169b^2}+2b^2=18.$

$(34b^2+18)^2+2\cdot169b^4=18\cdot169b^2$

$4(17b^2+9)^2+2\cdot169\cdot b^4=18\cdot169b^2$

$2(289b^4+18\cdot17b^2+81)+169\cdot b^4=9\cdot169\cdot b^2.$

$b^4(2\cdot289+169)+b^2(9\cdot169-18\cdot34)+162=0.$

$747b^4-9\cdot101b^2+9\cdot18=0$

$83b^4-101b^2+18=0.$

$(b^2-1)(83b^2-18)=0.$

$$\left[\begin{array}{ll} b=1, & a=\frac{34+18}{13}=4., \text{ но } 4-6<0 \text{ — не уд. ОДЗ}. \\ b=-1 & a=\frac{34+18}{-13}=-4. \text{ — уд.} \\ b=\frac{3\sqrt2}{\sqrt{83}} & a=\frac{34\cdot\frac{18}{83}+18}{13\cdot\frac{3\sqrt2}{\sqrt{83}}}=\frac{18\cdot\frac{117}{83}}{\frac{39\sqrt2}{\sqrt{83}}}=\frac{18\cdot117\cdot\sqrt{83}}{83\cdot13\cdot3\cdot\sqrt2}=\frac{27\sqrt2}{\sqrt{83}} \\ b=-\frac{3\sqrt2}{\sqrt{83}} & a=\frac{34\cdot\frac{18}{83}+18}{-13\cdot\frac{3\sqrt2}{\sqrt{83}}}=-\frac{27\sqrt2}{\sqrt{83}} \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}} - 6\cdot\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}} = \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{83}} > 0 \text{ — уд.}$$

$$\Rightarrow -\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}} + 6\cdot\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}} < 0 \text{ — н/у.}$$

$$\Rightarrow \text{ уд: } \left[\begin{array}{l} b=-1 \\ b=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}. \end{array}\right.$$

Ес. $b=-1$; $a=-4$: $x=-4+6=2$, $y=-1+1=0$.

Ес. $b=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$, $a=\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}$: $x=\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}+6$; $y=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}+1$.

Ответ: $(x;y)\in\left\{(2;0);\ \left(\frac{27\sqrt{2}}{\sqrt{83}}+6;\ \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{83}}+1\right)\right\}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$x - 6y = \sqrt{(y-1)(x-6)}$

$x^2 - 12x + 20 = 0$

$D = 144 - 80 = 64.$

$x = \frac{12 \pm 8}{2} = 6 \pm 4.$

$(2;0)$ — корень.

ОДЗ:

$\begin{cases} x \geq 6 \\ y \geq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 6 \\ y \leq 1 \end{cases}$

$\left(\frac{34+18}{169}\right)^2 + 2^2 = 18$

$x \geq 6y.$

$(34+18)^2 = 16 \cdot 169.$

$52^2 = (4 \cdot 13)^2.$

$747 : 9 = 83$

$x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6xy - x + 6$

$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$

$x^2 - 13xy + x + 36y^2 + 6y + 6 = 0.$

$289 \cdot 2 = 578$, $578 + 169 = 747$

$52 \cdot 17 = 884$

$4 + 2y^2 - 12 \cdot 2 - 4y + 20 = 2y^2 - 4y$

$y^2 - 2y + 1 = 0$

$x=2:$ $2y(y-2) = 0$

$17 \cdot 17 = 289$

$34y^2 - 13xy + 10y + 13x - 28 = 0.$

$13x(y-1) = 34y^2 + 10y - 28 = 2(17y^2 + 5y - 14)$

$x = 2.$ $2 - 6y = \sqrt{(y-1) \cdot -4}.$

$y = 0:$ $2 = \sqrt{4} = 2$

$9 \cdot 169 - 9 \cdot 68 = 9 \cdot 101.$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$(x^2 - 2\cdot x\cdot 6 + 36) + 2(y^2 - 2\cdot y\cdot 1 + 1) - 38 + 20 = 0$$

$$(x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18.$$

$$18 - 2(y-1)^2 \geq 0.$$

$$(y-1)^2 \leq 9.$$

$$-3 \leq y-1 \leq 3$$

$$-2 \leq y \leq 4.$$

$$289 \times 4 = 1156$$

$$x - 6 = \sqrt{18 - 2(y-1)^2}$$

$$x = 6 + \sqrt{18 - 2(y-1)^2}.$$

$x = 2$

$y = 0.$

$$289 \times 2 = 578$$

$$578 + 169 = 747$$

$$x^2 - 12xy + 36y^2 = xy - 6y - x - 6.$$

$$x^2 - 13xy + x + 36y^2 + 6y + 6 = 0.$$

$$36 + 12\sqrt{18 - 2(y-1)^2} + 18 - 2(y-1)^2 - 13xy + x + 36y^2 + 6y + 6 = 0$$

$$+12\sqrt{18 - 2(y-1)^2} - 2y^2 + 4y - 2 - 13xy + x + 36y^2 + 6y = 0$$

$$12\sqrt{18 - 2(y-1)^2} + 34y^2 + 10y + 58 = x(13y - 1)$$

$$12\sqrt{18 - 2(y-1)^2} + 34y^2 + 10y + 58 = 78y - 6 + (13y-1)\sqrt{18 - 2(y-1)^2}.$$

$$34y^2 - 68y + 64 = 13(y-1)\sqrt{18 - 2(y-1)^2}.$$

$y=0$, $b = -1$

$x = 2$, $a = -4$

$$52 - 13\cdot 4 = 0$$

$a = 4$, $b = -1$

$$\frac{2(17y^2 - 34y + 32)}{13(y-1)} = \sqrt{18 - 2(y-1)^2}.$$

$$\frac{4(17y^2 - 34y + 32)^2}{169(y-1)^2} = 18 - 2(y-1)^2$$

$$52 - 13\cdot 4 + 36 = 0.$$

$$16 - 13\cdot 4 + 36 = 0$$

$$(17y^2 - 34y + 32)^2 = 169(y-1)^2(9 - (y-1)^2)$$

$$34\cdot 1 - 13\cdot 4 + 18 = 0$$

$$289y^4 + 1156y^2 + 1024 - 1156y^3 - 64\cdot 34y + 64\cdot 17y^2 =$$

$$= 169(y^2 - 2y + 1)(-y^2 + 2y - 8)$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{289y^4 + 115y^3 + 34\cdot 98y^2 - 84\cdot 34y + 1024} =$

$= 169(\ldots)$

$100a^4 + 360a^2 + 324 = 81a^4 + 648$

$(10a^2+18)^2 = 81a^2(a^2+8)$

$19a^4 + 360a^2 - 324 = 0$

$10a^2 \pm 9a\sqrt{a^2+8} + 18 = 0$

$10a^2 + 18 = \pm 9a\sqrt{a^2+8}.$

$\begin{cases} x-6y = \sqrt{(y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2 + 2(y-1)^2 = 18 \end{cases}$

$a = x-6$

$b = y-1.$

$\cancel{x-6y} = (x-6) - 6(y-1) = x - \cancel{6} - 6y + \cancel{6}$

$a - b = \sqrt{ab}$

$a^2 + 2b^2 = 18.$

$a^2 - 3ab + b^2 = 0$

$a^2 + 2b^2 = 18.$

$\cancel{a^2} + 2b^2 - \cancel{a^2} + 3ab - b^2 = 18$

$b^2 + 3ab - 18 = 0$

$D = 9a^2 + 4\cdot 18 = 9(a^2+8).$

$b = \dfrac{-3a \pm 3\sqrt{a^2+8}}{2}.$

$a^2 + 2\left(\dfrac{-3a \pm 3\sqrt{a^2+8}}{2}\right)^2 = 18$

$a^2 + \dfrac{18}{4}\left(a \pm \sqrt{a^2+8}\right)^2 = 18$ $\quad 18\cdot 9$

$a^2 + \dfrac{9}{2}\left(a^2 \pm 2a\sqrt{a^2+8} + a^2+8\right) = 18$

$a^2 + 9\left(a^2 \pm a\sqrt{a^2+8} + 4\right) = 18$

$D = 360^2 + 4\cdot 19\cdot 324 =$

$= 4(180^2 + 19\cdot 324) =$

$= 16(90^2 + 19\cdot 81) =$

$= 16\cdot 9(30^2 + 19) =$

$= 16\cdot 9\cdot 919.$

$\cancel{18\cdot 43}$ $\quad 169 - 43 = 126.$

$= \cancel{2\cdot 289 + 169 - 18\cdot 169 + 17\cdot 34 + 162} =$

$\cancel{2\cdot 2\cdot 289 + 169 - 18\cdot 13\ldots}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22
1 1 2 2 2 3 4 2 3 5 3 6 4 3 8 8 3 9 4 4 6.

1

1, 2, 3, 4, 5, 6, ~~7~~, 8, 9,
2 4 7 8 11 13 16
3 5 10 14 22 17 19.
3 6 12 20
9 15 21
18

$2 \cdot (4+5+4+1+2+2+1) +$
$+4 \cdot (5+4+1+2+2+1) +$
$+5 \cdot (4+1+2+2+1) + 4 \cdot (1+2+2+1) +$
$+1 \cdot (2+2+1) + 2 \cdot (2+1) + 2 \cdot 1 =$
$= 2 \cdot 19 + 4 \cdot 15 + 5 \cdot 10 + 4 \cdot 6 + 5 + 6 + 2 =$
$= 38 + 60 + 50 + 24 + 13 = 110 + 51 + 24 = 110 + 75 =$
$= \underline{185}$

№3

$$\begin{cases} x - 6y = \sqrt{(y-1)(x-6)} \\ x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0 \end{cases}$$

$(x-6y)^2 = xy - 6y - x + 6$

$x^2 - 13xy + 36y^2 + 6y + x - 6 = 0.$

$x^2 + 2y^2 - 12x - 4y + 20 = 0$

ОДЗ:

$x \geq 6y.$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq 1 \\ x \geq 6 \end{cases} \\ \begin{cases} y \leq 1 \\ x \leq 6 \end{cases} \end{array}\right.$$

$x^2+2y^2-12x-4y+20-(x^2-13xy+36y^2+6y+x-6)=0$

$\cancel{x^2}+2y^2-12x-4y+20-\cancel{x^2}+13xy-36y^2-6y-x+6=0.$

$13xy-13x+26-34y^2-10y=0$

$13x(y-1)=34y^2+10y-26=2(17y^2+5y-13).$

Если $y=1$: $x=6$, но: $36+2-72-4+20=58-76\neq0$ - пр.

$\Rightarrow y\neq1.$

$x=\dfrac{2(17y^2+5y-13)}{13(y-1)}.$

$52\cdot17$: $364+52=884$; $17\cdot13$: $51+17=221$; $442$; $442-25=417$

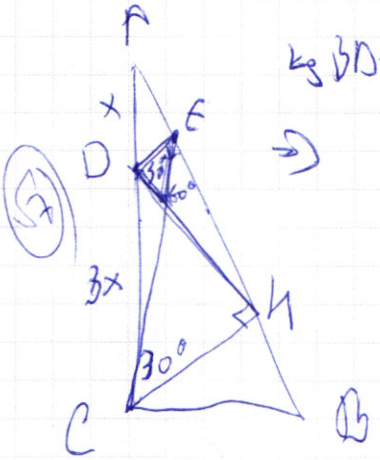
~~$D=25+4\cdot17\cdot13=25+17\cdot52=\ldots=909=9\cdot101$~~

$x^2+2y^2-12x-4y+20=0$

$\dfrac{4(17y^2+5y-13)^2}{169(y-1)^2}-\dfrac{24(17y^2+5y-13)}{13(y-1)}+2y^2-4y+20=0$

$\dfrac{4(289y^4+170y^3-417y^2-130y+169)-24\cdot13((17y^2+5y-13)(y-1))}{169(y-1)^2}+$

$+2y^2-4y+20=0$




N4

$\operatorname{tg}BDC=\dfrac{BC}{DC}.$

$\Rightarrow$ ~~$HE=\ldots$~~ Пусть $HC=y$;

тогда $\operatorname{tg}30^\circ=\dfrac{HE}{HC}\Rightarrow HE=\dfrac{\sqrt3}{3}y.$

По т. Фалеса: $\dfrac{3}{HE}=\dfrac{1}{DE}$

$\Rightarrow DE=\dfrac{HE}{3}=y\dfrac{\sqrt3}{9}\Rightarrow$

$\Rightarrow DH=y\left(\dfrac{\sqrt3}{9}+\dfrac{3\sqrt3}{9}\right)=\dfrac{4\sqrt3}{9}y$

$\Rightarrow \operatorname{tg}BDC=\operatorname{tg}HDC=\dfrac{CH}{DH}=\dfrac{y}{\frac{4\sqrt3}{9}y}=\dfrac{9}{4\sqrt3}=\dfrac{3\sqrt3}{4}$

$4x=\sqrt7\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt7}{4}.$ $\dfrac{3\sqrt3}{4}=\dfrac{BC}{\sqrt7}\Rightarrow BC=\dfrac{3\sqrt{21}}{4}.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{CD}{DE} = \frac{AD}{BD}$

$CD \cdot BD = AD \cdot DE.$

$6 = AD \cdot DE.$

$\frac{2r}{2R} = \frac{AD}{DE}.$

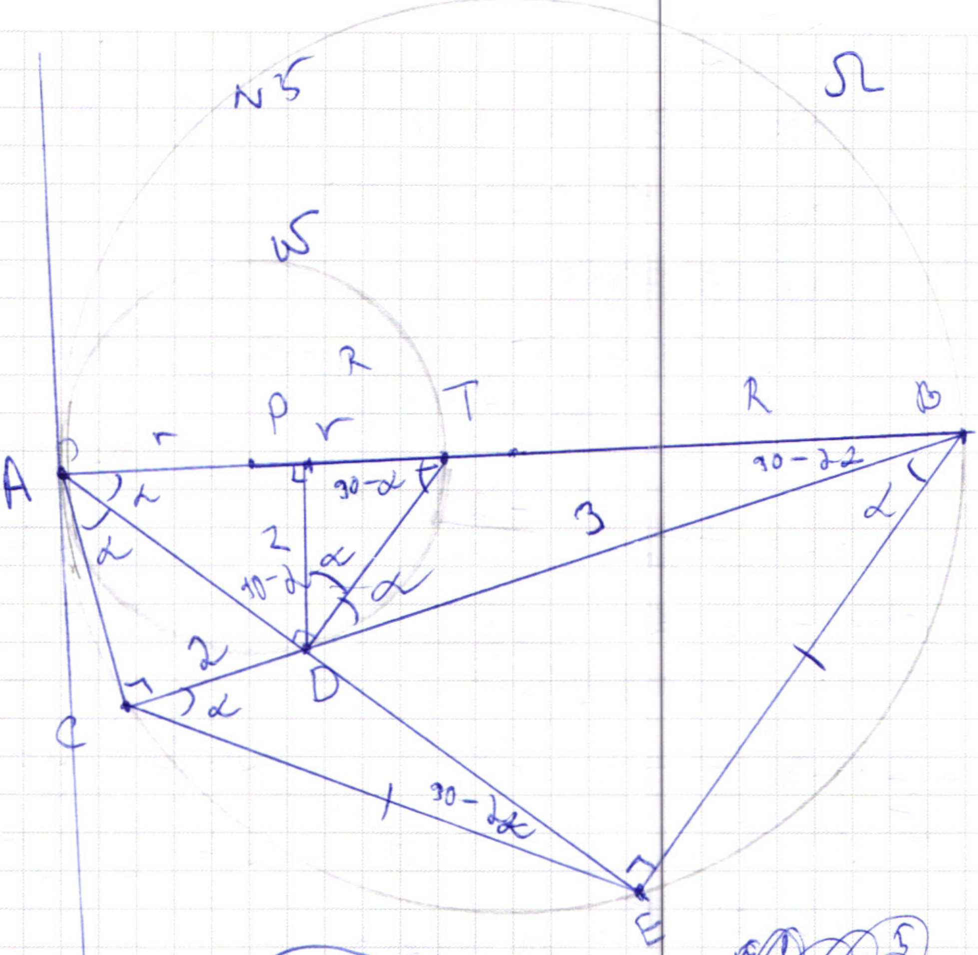
$\frac{r}{R} = \frac{AD}{DE}.$

$9 = BT \cdot BA =$

$= (2R - 2r) \cdot 2R.$

$\frac{AC}{2R} = \frac{2}{3}.$

$AC = \frac{4}{3}R.$



$BP = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}.$

$\frac{BD}{2R} = \frac{BP}{BC}$

$\frac{3}{2R} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow 2R = \frac{15}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$

$DC \cdot \frac{AC \cdot \sin\alpha}{2} + \frac{DB \cdot DE \cdot \sin\alpha}{2} =$

$= \frac{DE(AB+AC)\cdot \sin\alpha}{2}.$

$9 = (3\sqrt{5} - 2r) \cdot 3\sqrt{5}.$

$\frac{3\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5} - 2r. \Rightarrow 2r = \frac{12\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow r = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$

$\frac{6\sqrt{5}}{5} ? \frac{3\sqrt{5}}{2}$

$\frac{AE \cdot BC \cdot \sin\alpha}{2}.$

$\frac{AD \cdot CD \cdot \sin\alpha}{2} + \frac{AD \cdot BD \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{AD \cdot BC \cdot \sin\alpha}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№6.

$x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$, $x=1$: $x\le\frac{1}{2}$:

$8x-6|2x-1|\le ax+b\le -8x^2+6x+7$

Если $x\geq\frac{1}{2}$:

$8x+6(2x-1)=$
$=8x+12x-6=$
$=20x-6.$

$ax+b\geq 8x-12x+6=6-4x.$

$ax+b\le -8x^2+6x+7.$

$x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{-6}{-16}=\frac{3}{8}.$

$-8\cdot\frac{9}{64}+6\cdot\frac{3}{8}+7=$
$=-\frac{9}{8}+\frac{18}{8}+7=\frac{9}{8}+7=$
$=8\frac{1}{8}.$

$-16\le -a+2b\le 4$

$3b\le 9\Rightarrow b\le 3$

$-\frac{1}{2}: -8\cdot\frac{1}{4}-3+7=$
$=-5+7=2$

$-8+6+7=5.$

$8-6\cdot 1=2.$

$x=-\frac{1}{2}$:

$-4-6|-2|=$
$=-4-12=-16.$

$2\le a+b\le 5.$

$4\le\frac{a}{2}+b\le 8.$

$x=\frac{1}{2}: y=4.$

$x=-\frac{1}{2}: y=2.$

$y=ax+b.$

$4=\frac{a}{2}+b.$

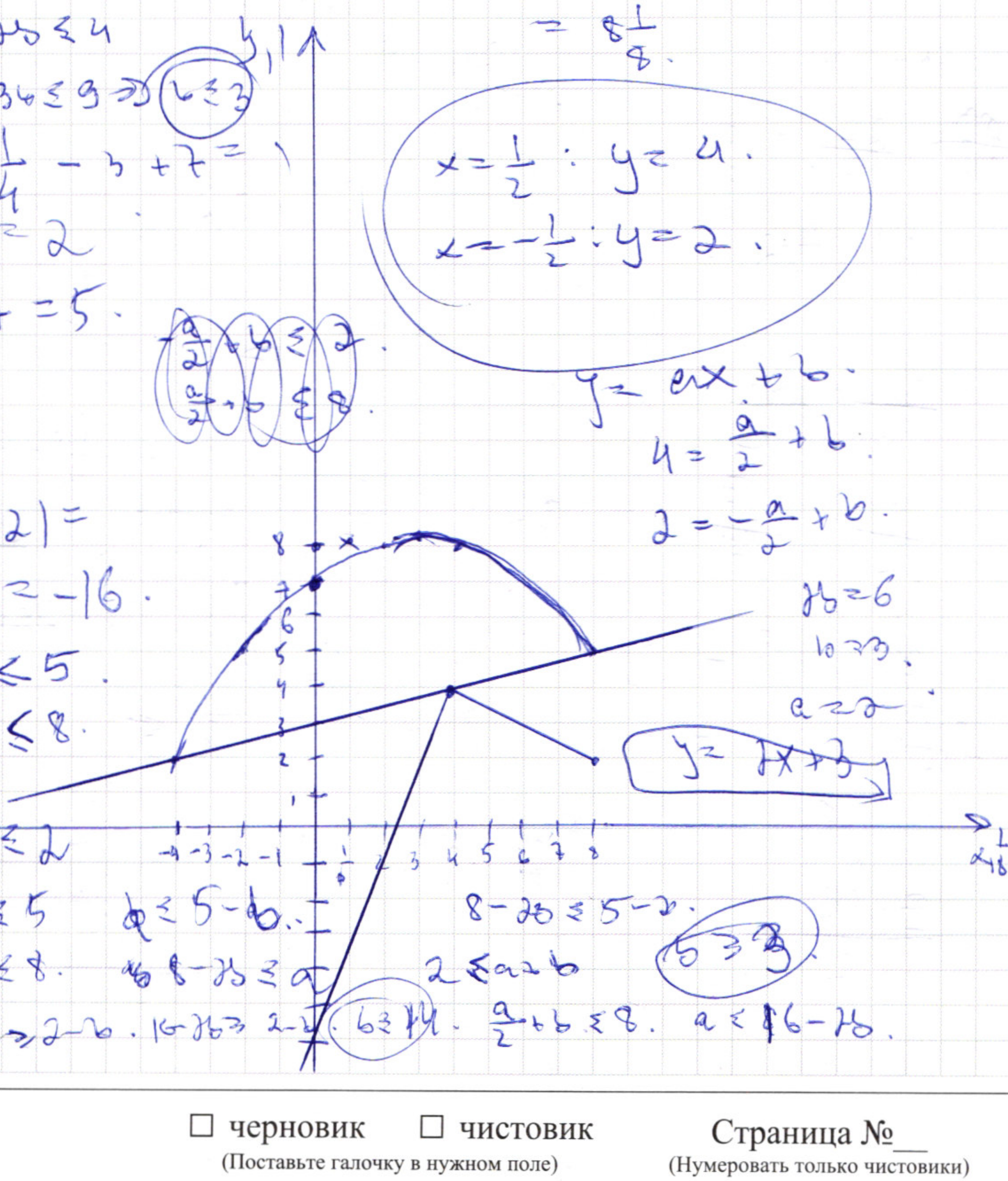
$2=-\frac{a}{2}+b.$

$2b=6$

$b=3.$

$a=2$

$y=2x+3$




$-16\le -\frac{a}{2}+b\le 2$

$a+b\le 5$ $a\le 5-b.$ $8-2b\le 5-b.$

$4\le\frac{a}{2}+b\le 8.$ $8-2b\le a$ $2\le a+b$ $b\ge 3$

$a\geq 2-b.$ $16-2b\geq 2-b.$ $b\le 14.$ $\frac{a}{2}+b\le 8.$ $a\le 16-2b.$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N3

$x-6y=\sqrt{(y-1)(x-6)}$

$x^2-12x+(2y^2-4y+20)=0$

$D=144-4\cdot(2y^2-4y+20)=$

$=4(36-(2y^2-4y+20))=$

$=4(36-2y^2+4y-20)=$

$=4(-2y^2+4y+16)=$

$=8(-y^2+2y+16).$

$-y^2+2y+16\geq 0.$

$y^2-2y-16\leq 0$

$D=4+4\cdot 16=4\cdot 17.$

$y=\frac{2\pm 2\sqrt{17}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}.$

$\Rightarrow y\in\left[\frac{1-\sqrt{17}}{2};\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right].$

$x\geq 6y.$

$(x-6)^2+2(y-1)^2-18=0.$

Ел [illegible]!

$x\geq 6,\ y\geq 1.$

$x\geq 6y:$

$x-6\geq 6y-6.$

$(x-6)^2\geq(6y-6)^2.$

$36(y-1)^2+2(y-1)^2-18\leq 0.$

$38(y-1)^2\leq 18.$ $(y-1)^2\leq\frac{9}{19}.$ $y-1\leq\frac{3}{\sqrt{19}}.$

$y\leq 1+\frac{3}{\sqrt{19}}.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№7

$f: \mathbb{Q}^+$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{2}\right].$

$f(2) = 1.\ ;\ f(3) = 1.$

$\Rightarrow \quad f\left(\frac{1}{2}\cdot 2\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + 1.$

$f\left(\frac{1}{3}\cdot 3\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) + 1.$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{kx}{ky}\right) = f(kx) + f\left(\frac{1}{ky}\right)$

$= f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right).$

$f(1\cdot 1) = f(1) + f(1).$

$\Rightarrow f(1) = 0.$

$f(10) + f\left(\frac{1}{10}\right) = f\left(\frac{10}{10}\right) = f(1) = 0.$

$\Rightarrow \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x).$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y).$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y).$

$f(p\cdot q) = f(p) + f(q) = \left[\frac{p}{2}\right] + \left[\frac{q}{2}\right].$

$f(p^{\alpha}) = \alpha f(p) = \alpha\left[\frac{p}{2}\right].$

$\Rightarrow \quad f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\left[\frac{p_i}{2}\right].$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)