МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45^\circ$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

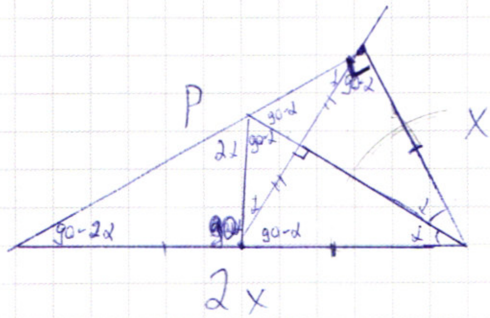
5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство
$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$
выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2



$p < 3x$

$2x < p + x \quad x < p$

$\frac{p}{3} < x < p$

$4x^2 = x^2 + p^2$

$3x^2 = p^2$

$x^2 = \frac{p^2}{3}$

$\frac{p}{3} < x < p$

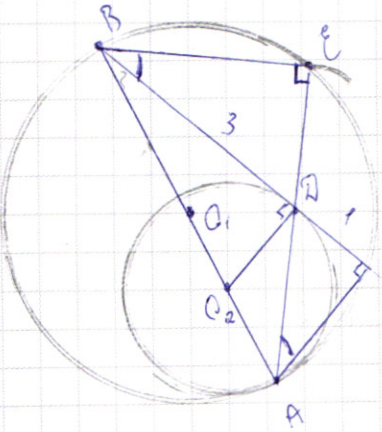
$\frac{p}{3} < \frac{p\sqrt{3}}{3} < p$

$\frac{1}{3} < \frac{\sqrt{3}}{3} < 1$

$\cancel{90 - 2\alpha + \alpha + 90 - \alpha + 2\alpha = 180°}$

$\frac{x}{\cos 2\alpha} = 2x$

N5.



$3 = AD \cdot ED \quad \frac{O_2D}{AC} = \frac{3}{4} \quad \frac{BO_2}{BA} = \frac{3}{4} \quad AB = \frac{4BO_2}{3}$

$BC = 4$ $\quad AC = \frac{4DO_2}{3}$

$\frac{DE}{1} = \frac{3}{AD} \quad BO_2^2 = 9 + DO_2^2$

$AB^2 = 16 + AC^2$

$BD^2 = \frac{16 BO_2^2}{9} = 16 + \frac{16 DO_2^2}{9} \quad \frac{BO_2^2}{9} = \frac{9}{9} + \frac{DO_2^2}{9}$

№7.

$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(1/1) = f(1) + f(1) \quad f(1) = 0$

$f(0/1) = f(0) + f(1) \quad f(0) = f(0). \quad f(0/2) = f(0) +$

$f(2) = 1$

$f(3) = 1$

$f(4) = 1 + 1 = 2.$

$f(4/2) = f(4) + f(\frac{1}{2}) = f(2).$

$2 + f(\frac{1}{2}) = 1$

$f(\frac{1}{2}) = -1.$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\begin{cases} ax+b \geq 2x^2-x-1 \\ ax+b \leq x+|2x-1| \\ x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}] \end{cases}$$

$x_0 = \frac{1}{4}$ $y_0 = -1\frac{1}{8}$ $x_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$

$2x^2-x-1=0$

$D = 1+4\cdot 2 = 9$. $x_2 = 1$

$2x-1<0$ $\quad$ $2x-1 \geq 0$

$x < \frac{1}{2}$ $\quad$ $x \geq \frac{1}{2}$

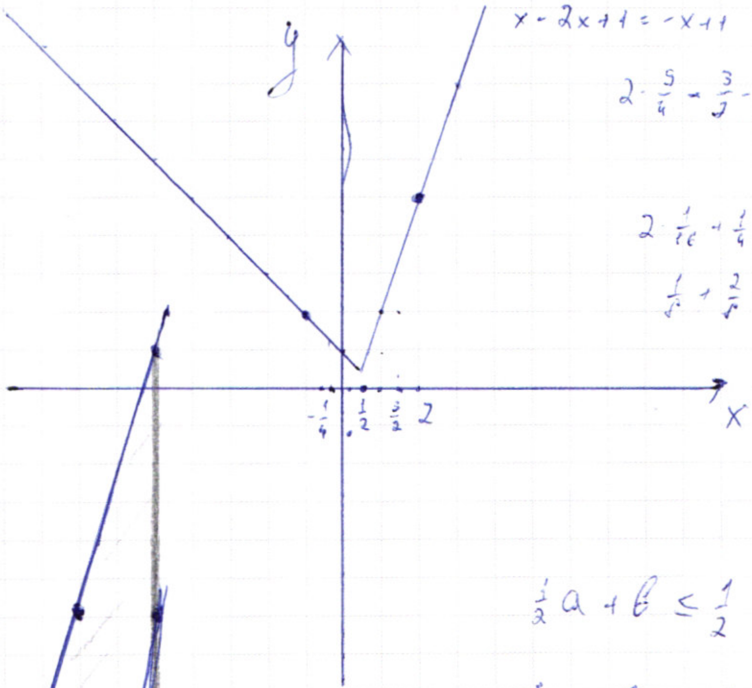
$x-2x+1 = -x+1$ $\quad$ $3x-1$

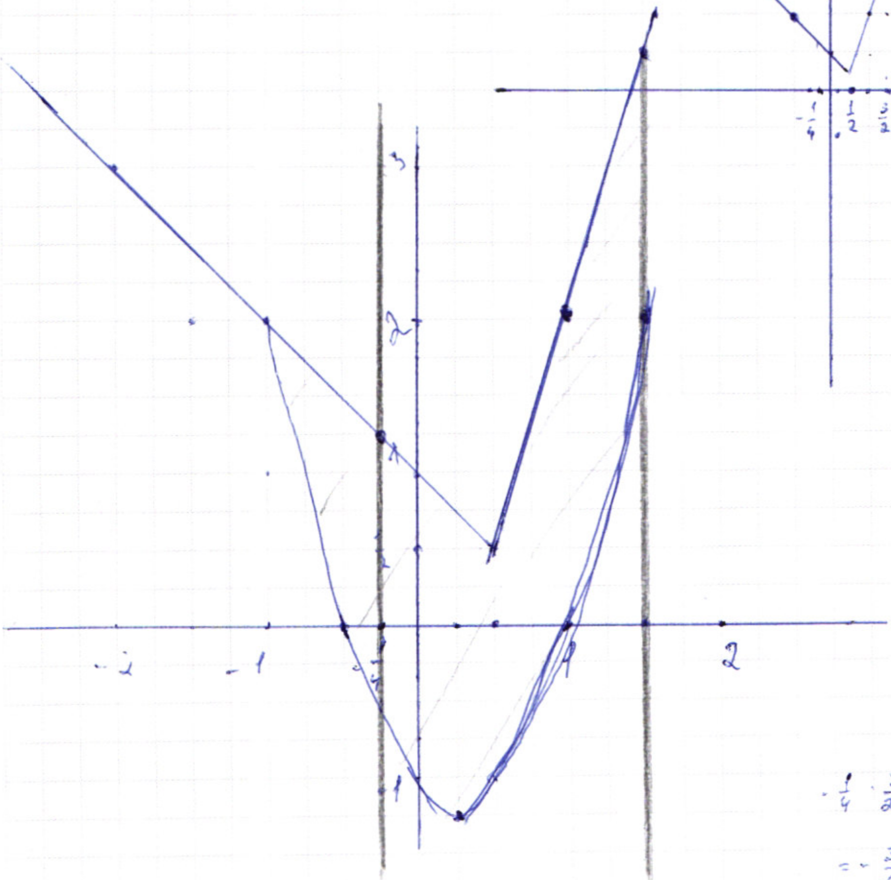
$2\cdot\frac{9}{4} - \frac{3}{2} - 1 = \frac{9}{2} - \frac{3}{2} - 1 =$

$= \frac{6}{2} - 1 = 2$.

$2\cdot\frac{1}{16} + \frac{1}{4} - 1 =$

$\frac{1}{8} + \frac{2}{8} - 1 = \frac{3}{8} - 1 = -\frac{5}{8}$





$\frac{1}{2}a + b \leq \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} 2 = \frac{6}{4}a + b \\ -\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}a + b \end{cases}$$ $b = 2 - \frac{30}{14}$ $\quad$ $b = -\frac{1}{7}$.

$2\frac{1}{2} = \frac{7}{4}a$ $\quad$ $\frac{5}{2} = \frac{7}{4}a$.

$a = \frac{20}{14}$.

$\frac{1}{2}\cdot\frac{20}{14} - \frac{1}{7} = \frac{10}{14} - \frac{2}{14} = \frac{8}{14}$.

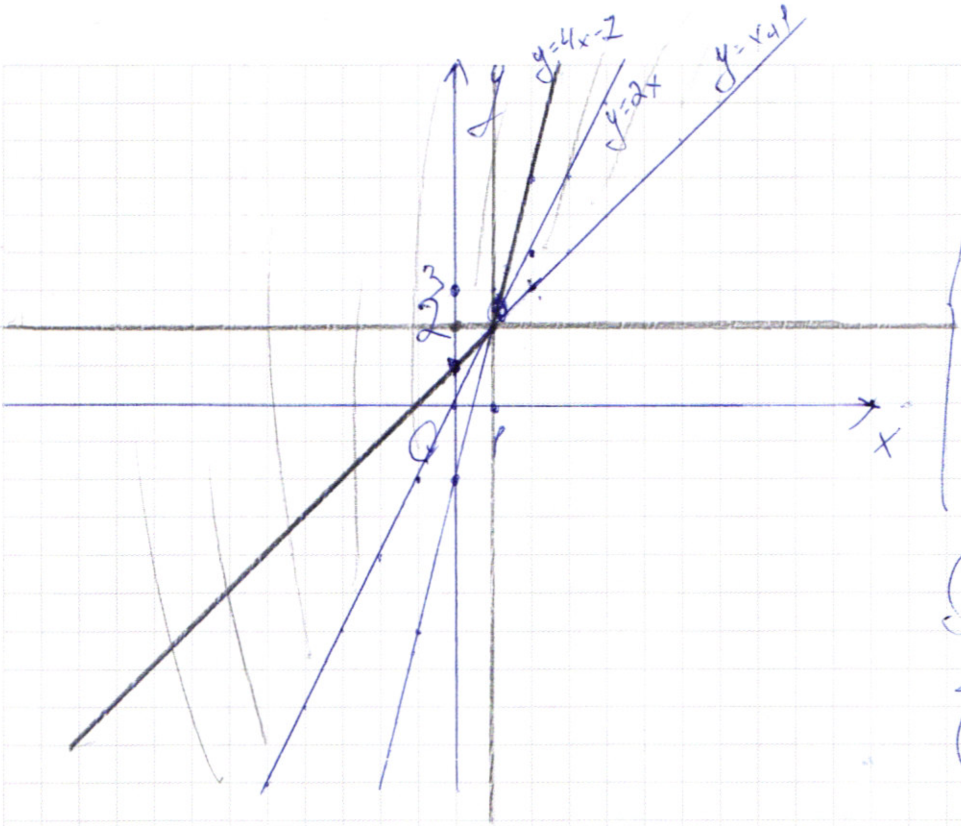
$-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2} - \frac{1}{4} =$ $\quad$ $\frac{3}{2}a + b = 2$

$= -\frac{3}{8} - \frac{2}{8} = -\frac{5}{8}$ $\quad$ $\frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2}$

$b = \frac{2}{4} - \frac{3}{4}$

$\boxed{a = \frac{3}{2}, \quad b = -\frac{1}{4}}$

Ответ: $(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4})$.



$y = x+1$ или $y = 4x-2$

$$\begin{cases} (y-x-1)(y-4x+2)=0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq 2x \\ y \geq 2 \\ x \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y \leq 2 \\ x \leq 1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$(y-2)^2 + 2(x-1)^2 = 3$

$y = x+1$

$(x-1)^2 + 2(x-1)^2 = 3.$

$(x-1)^2 = 1.$

$x-1 = \pm 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$

$y = 4x-2.$

$(4x-4)^2 + 2(x-1)^2 = 3.$

$4(x-1)^2 + 2(x-1)^2 = 3.$

$(x-1)^2 = \frac{1}{2}.$

$x - 1 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$

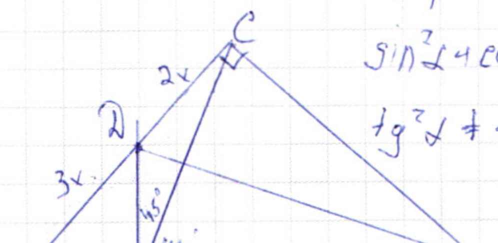
$x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$

$y = 4 - 2\sqrt{2} - 2 = 2 - 2\sqrt{2}$

$y = 4 + 2\sqrt{2} - 2 = 2 + 2\sqrt{2}$

Ответ: $(0;1)$, $\cancel{(2;3)}$, $\cancel{\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}; 2-2\sqrt{2}\right)}$, $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}; 2+2\sqrt{2}\right)$

N 4



$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

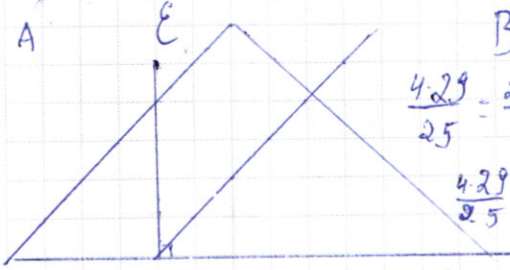
$tg^2\alpha + 1 = $

$tg\alpha = \frac{h}{\frac{5}{3}h} = \frac{3}{5}.$

$AE = \sqrt{\frac{25}{9}h^2} = \frac{5}{3}h.$

$AE = \sqrt{\frac{34}{9}h^2 - h^2}$

$AE = \sqrt{4x^2 - h^2}$



$\frac{4 \cdot 29}{25} = \frac{25}{9}h^2 + h^2$

$\frac{4 \cdot 29}{25} = \frac{34h^2}{9}.$

$EH = \sqrt{9x^2 - \frac{9}{4}h^2} = \frac{5}{2}h.$

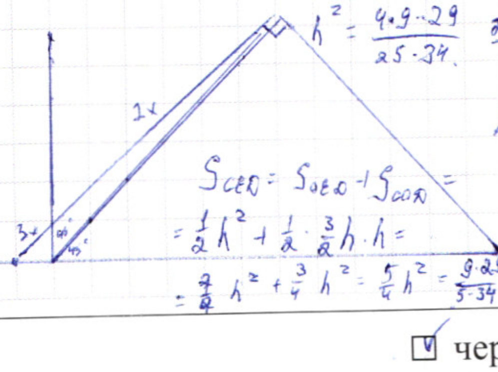
$9x^2 - \frac{9}{4}h^2 = \frac{25}{4}h^2$

$9x^2 = \frac{34}{4}h^2$

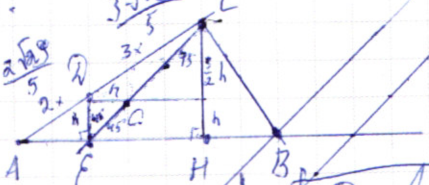
$\sin\alpha = \frac{}{2x}$

$\sin\alpha = \frac{\frac{3}{2}h}{3x}$

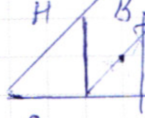
$\boxed{x^2 = \frac{34}{36}h^2}$



$h^2 = \frac{4 \cdot 9 \cdot 29}{25 \cdot 34}.$



$2xy = 3xh$ $y = \frac{3}{2}h$



Ответ: $tg = \frac{3}{5}$, $S = \frac{261}{170}$.

$S_{CED} = S_{OED} + S_{COD} =$
$= \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}h \cdot h =$
$= \frac{2}{4}h^2 + \frac{3}{4}h^2 = \frac{5}{4}h^2 = \frac{9 \cdot 29}{5 \cdot 34}$

$S_{CER} = S_{ACH} - S_{ADE} - S_{ECH}.$

$S_{ACE} = \frac{1}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$a=b_1, \quad b=b_1q, \quad c=b_1q^2, \quad d=b_1q^3$

$ax^2+2bx+c=0;$

$D=4b^2-4ac=4b_1^2q^2-4b_1b_1q^2=0$

$x_1=\frac{-2b-\sqrt{4b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b_1q-\sqrt{4b_1^2q^2-4b_1b_1q^2}}{2b_1}$

$x_2=\frac{-2b+\sqrt{4b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b_1q+\sqrt{4b_1^2q^2-4b_1b_1q^2}}{2b_1}$

$x=\frac{-2b_1q}{2b_1}=-q$

$d=b_1q^3=-q$

$b_1q^3+q=0.$

$q(b_1q^2+1)=0.$

$\left[\begin{array}{l} q=0 \\ b_1q^2+1=0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} q=0 \\ b_1q^2=-1. \end{array}\right.$

Ответ: $c=-1$.

$y^2-5xy+4x^2+2x+y-2=0$

$y^2-xy-4xy+4x^2+(2x+y)-2=0$

$y(y-x)-4x(y-x)+(2x+y)-2=0$

$(y-x)(y-4x)+2x+y-2=0.$

$y^2-5xy+y+4x^2+2x-2=0.$

$y^2-y(5x-1)+\frac{(5x-1)^2}{4}-$

$-\frac{25x^2-10x+1}{4}+4x^2+2x-2=0.$

$\left(y-\frac{5x-1}{2}\right)^2+\frac{-25x^2+10x-1+16x^2+8x-8}{4}=0.$

$\left(y-\frac{5x-1}{2}\right)^2+\frac{-9x^2+18x-9}{4}=0$

$\left(y-\frac{5x-1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}(x^2-2x+1)=0.$

$\left(y-\frac{5x-1}{2}\right)^2=\frac{9(x-1)^2}{4}$

$\left(y-\frac{5x-1}{2}\right)=\pm\left(\frac{3(x-1)}{2}\right).$

$y-\frac{5x-1}{2}+\frac{3x-3}{2}=0. \quad y-\frac{5x-1-3x+3}{2}=0$

$y-\frac{5x-1}{2}-\frac{3x-3}{2}=0. \quad y-\frac{8x-4}{2}=0 \quad y-\frac{2x+2}{2}=0$

$y=4x-2 \quad y=x+1.$

№3

$\Rightarrow (y-x-1)(y-4x+2)=0.$

$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2} \\ 2x^2+y^2-4x-4y+3=0 \end{cases},$

$y^2-4y+4+2x^2-4x-1=0$

$(y-2)^2+2x^2-4x+2-3=0.$

$y-2x=\sqrt{(y-2)(x-1)}$

$(y-2)^2+2(x^2-2x+1)=3.$

$(y-2)^2=3-2(x-1)^2; \quad y-2=\pm\sqrt{3-2(x-1)^2} \quad (y-2)^2+2(x-1)^2=3.$

$xy-2x-y+2=x(y-2)-(y-2)=(y-2)(x-1)$

$\begin{cases} y\geq 2 \\ x\geq 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} y<2 \\ x<1 \end{cases}$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2. \quad x-1=-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad x-1=+\frac{1}{\sqrt{2}}$

$y\geq 2x$

☑ черновик ☐ чистовик

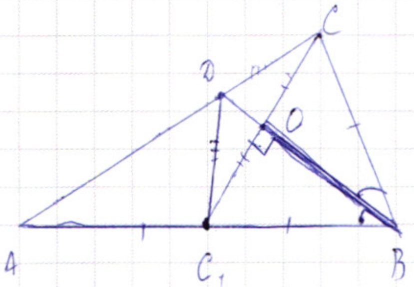
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2.



CC_1 - медиана, BD - биссектриса

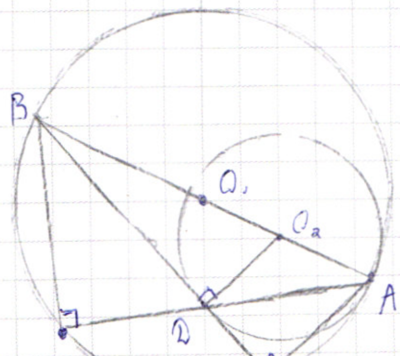
$BD \cap CC_1 = O$

$\angle BOC = 90°$

Значит $\Delta BOC_1 = \Delta BOC$ (по катету и углу).

Отсюда $BC = \frac{1}{2} AB$.

Задача 5.



Окр. $\Omega(O_1, r_1)$; Окр $\omega(O_2, r_2)$

$BD = 3$, $CD = 1$.

По св-ву хорд: $BD \cdot CD = AD \cdot DE$

$AD \cdot DE = 3$.

$\angle ACB = \angle AEB = 90°$.

$BO_2^2 = 9 + r_2^2$

$AB^2 = 16 + AC^2 = 16 + \left(\frac{4r_2}{3}\right)^2 = 16 + \frac{16 r_2^2}{9}$.

Задача 7.

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

При $x = 1$, $y = 1$.

$f\left(\frac{1}{1}\right) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0.$

При $x = 2$, $y = 1$

$f\left(\frac{3}{1}\right) = f(2) + f(1) = f(2) + 0 = f(2).$

$f(2) = \left[\frac{2}{1}\right] = 1$

$f(3) = \left[\frac{3}{1}\right] = 1.$

$f(4) = f(2) + f(2) = 1 + 1 = 2.$

$f\left(\frac{4}{2}\right) = f(4) + f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2) \Rightarrow 2 + f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$

$f(2) = f\left(\frac{6}{3}\right) = f(6) + f\left(\frac{1}{3}\right) = f(2) + f(3) + f\left(\frac{1}{3}\right)$

$0 = f(3) + f\left(\frac{1}{3}\right).$

Значит ~~при~~ если $\frac{x}{y} < 1$, то $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$.

Посчитаем кол-во пар таких x и y.

$n = \underset{1}{20} + \underset{2}{19} + \dots + \underset{20}{1} + \underset{21}{0} = \underbrace{\frac{20}{2} \cdot 21}_{\text{сумма арифм.}} = 210.$

Ответ: 210.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

Пусть $a=b_1$, $b=b_1q$, $c=b_1q^2$, тогда найдем корень уравнения:

$ax^2+2bx+c=0$:

$D=4b^2-4ac=4b_1^2q^2-4b_1\cdot b_1q^2=0$;

$x=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}=-\frac{b_1q}{b_1}=-q$.

Значит 4-ый член последовательности (b_1q^3) равен $-q$.

Найдём 3-ий член последовательности:

$b_1q^3=-q$

$q(b_1q^2+1)=0$

$\left[\begin{array}{l} q=0, \quad (\text{не подходит}) \\ b_1q^2=c=-1 \end{array}\right.$.

Значит $c=-1$.

Ответ: $c=-1$.

Задача 3

Сгруппируем 1-ое уравнение системы с учётом ОДЗ:

$y-2x=\sqrt{xy-2x-y+2}$

$y^2-4xy+4x^2=xy-2x-y+2$.

$y^2-5xy+y+4x^2+2x-2=0$;

$y^2-y\cdot(5x-1)+\frac{(5x-1)^2}{4}-\frac{25x^2-10x+1}{4}+\frac{16x^2+8x-8}{4}=0$;

$\left(y-\frac{5x-1}{2}\right)^2-\frac{9x^2-18x+9}{4}=0$;

$\left(y-\frac{5x-1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}(x-1)^2$

ОДЗ: $y-2x\geqslant 0$ $\quad xy-2x-y+2\geqslant 0$

$y\geqslant 2x$ $\quad x(y-2)-(y-2)\geqslant 0$

$(y-2)(x-1)\geqslant 0$.

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y-\frac{5x-1}{2}=-\frac{3}{2}(x-1), \\ y-\frac{5x-1}{2}=\frac{3}{2}(x-1); \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} y = \frac{5x-1-3x+3}{2} = x+1 \\ y = \frac{5x-1+3x-3}{2} = 4x-2 \end{array}\right.$$

Значит 1-ое уравнение системы равносильно такому:

$(y-x-1)(y-4x+2)=0$, где $y \geq 2x$ и $y \geq 2$, $x \geq 1$ или $y < 2$, $x < 1$

Преобразуем 2-ое уравнение системы:

$y^2-4y+2x^2-4x+3=0$

$y^2-4y+4+2x^2-4x+2+3-6=0$

$(y-2)^2+2(x-1)^2=3$

Из 1-ого уравнения следует, что $y=x+1$ или $y=4x-2$.

Подставим их во 2-ое уравнение:

$(x+1-2)^2+2(x-1)^2=3$

$3(x-1)^2=3$

$(x-1)^2=1$

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=1 \\ x=2 \Rightarrow y=3 \end{array}\right.$$

$(4x-2-2)^2+2(x-1)^2=3$

$(4x-4)^2+2(x-1)^2=3$

$16(x-1)^2+2(x-1)^2=3$

$(x-1)^2=\frac{1}{6}$

$$\left[\begin{array}{l} x=1-\frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow y=2-\frac{4}{\sqrt{6}} \\ x=1+\frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow y=2+\frac{4}{\sqrt{6}} \end{array}\right.$$

Проверим на соответствие по ОДЗ полученные корни:

$x=0$, $y=1$ $1 \geq 0$, $1<2$, $0<1$ ✓

$x=2$, $y=3$ $3 \geq 4$ ✗

$x=1-\frac{1}{\sqrt{6}}$, $y=2-\frac{4}{\sqrt{6}}$ $2-\frac{4}{\sqrt{6}} \geq 2-\frac{2}{\sqrt{6}}$ ✗

$x=1+\frac{1}{\sqrt{6}}$, $y=2+\frac{4}{\sqrt{6}}$ $2+\frac{4}{\sqrt{6}} \geq 2+\frac{2}{\sqrt{6}}$, $1+\frac{1}{\sqrt{6}} \geq 1$, $2+\frac{4}{\sqrt{6}} \geq 2$. ✓

Значит подходят только такие точки: $(0;1)$, $(1+\frac{1}{\sqrt{6}}; 2+\frac{4}{\sqrt{6}})$

Ответ: $(0;1)$, $(1+\frac{1}{\sqrt{6}}; 2+\frac{4}{\sqrt{6}})$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

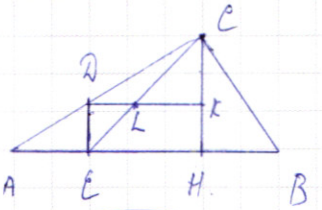
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4.



Пусть $H \in AB$ и $CH \perp AB$, $AD = 3x$.

Т.к. $AD = 3x$ и $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$, то $CD = 2x$.

Построим $KD \parallel EH$ ($KD \cap CE = L$).

В $\triangle CKD$ $KD = \sqrt{4x^2 - CK^2}$

В $\triangle CHE$ $EH = CH = CK + KH$ ($\triangle CHE$ - равнобедрен. т.к. $\angle CEH = 45^\circ$ и $\angle CHE = 90^\circ$).

Т.к. $\triangle ADE \sim \triangle DCK$ (по двум углам), то

$\frac{AD}{CD} = \frac{DE}{CK}$. $\frac{3x}{2x} = \frac{DE}{CK} \Rightarrow CK = \frac{2DE}{3}$.

Значит $EH = CH = \frac{2}{3}DE + DE = \frac{5}{3}DE$.

Т.к. $KD = \sqrt{4x^2 - CK^2} = \sqrt{4x^2 - \frac{4}{9}DE^2} = EH = \frac{5}{3}DE$,

то выразим x^2:

$\sqrt{4x^2 - \frac{4}{9}DE^2} = \frac{5}{3}DE$

$4x^2 - \frac{4}{9}DE^2 = \frac{25}{9}DE^2$.

$4x^2 = \frac{29}{9}DE^2$

$x^2 = \frac{29}{36}DE^2$.

Отсюда в $\triangle ADE$ $AE = \sqrt{9 \cdot \frac{29}{36}DE^2 - DE^2} =$

$= \sqrt{\frac{29}{4}DE^2 - \frac{4DE^2}{4}} = \frac{5}{2}DE$.

Значит $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{2}{5}$.

Если $AC = \sqrt{29}$, то $AD = \frac{3\sqrt{29}}{5}$, $CD = \frac{2\sqrt{29}}{5}$ и $DE = \sqrt{\frac{36}{29}x^2} = \frac{2}{\sqrt{29}} \cdot \frac{3\sqrt{29}}{5} = \frac{6}{5}$.

Отсюда $S_{CED} = S_{LED} + S_{CLD} = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot DL + \frac{1}{2} \cdot CK \cdot DL = \frac{1}{2}DE^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot DE^2 = \frac{1}{2}DE^2 + \frac{1}{3}DE^2 =$

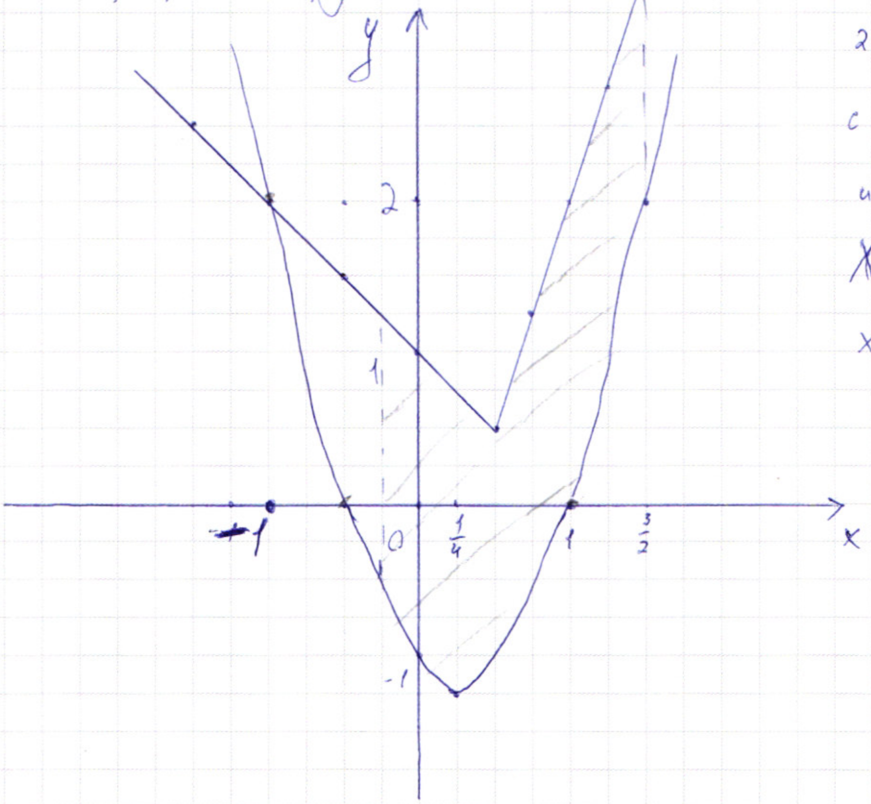
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{36}{25} + \frac{1}{3} \cdot \frac{36}{25} = \frac{18}{25} + \frac{12}{25} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$.

Ответ: $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{2}{5}$, $S_{CED} = \frac{6}{5}$.

Задача 6

$$\begin{cases} ax + b \geqslant 2x^2 - x - 1, \\ ax + b \leq x + |2x - 1|, \\ x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]; \end{cases}$$

Построим графики функций $2x^2-x-1$ и $x+|2x-1|$:



$2x^2-x-1$ – парабола с вершиной в т. $(\frac{1}{4}; -1\frac{1}{4})$ и т. пересечениями с Ox. $X=-\frac{1}{2}$ и $x=1$.

$x+|2x-1|$ – ломаная при $x<\frac{1}{2}$: $-x+1$

при $x \geq \frac{1}{2}$: $3x-1$

Зададим прямую проходящую через точки $(\frac{3}{2}; 2)$ и $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$

$\begin{cases} 2=\frac{3}{2}a+b, \\ \frac{1}{2}=\frac{1}{2}a+b; \end{cases}$ $\begin{cases} a=\frac{3}{2}, \\ b=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}; \end{cases}$ $\begin{cases} a=\frac{3}{2}, \\ b=-\frac{1}{4}. \end{cases}$

Тогда, при $x=-\frac{1}{4}$, $y=-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}-\frac{1}{4}=-\frac{3}{8}-\frac{2}{8}=-\frac{5}{8}$. (совпадает)

Но для параболы, при $x=-\frac{1}{4}$, $y=2\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-1=\frac{1}{8}+\frac{2}{8}-1=-\frac{5}{8}$.

Значит необходимая прямая может проходить только через точки $(-\frac{5}{8}; -\frac{1}{4})$ и $(\frac{3}{2}; 2)$, иначе нарушаться условия.

Значит $a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{1}{4}$.

Ответ: $a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{1}{4}$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)