МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

10 класс

ВАРИАНТ 9

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [2 балла] Числа a, b, c являются первым, вторым и третьим членами геометрической прогрессии соответственно (числа a, b, c не заданы), а четвёртый член прогрессии является корнем уравнения $ax^2 + 2bx + c = 0$. Найдите третий член прогрессии. -1.

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 1200 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан. +

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2}, \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. \end{cases}$$

+

4. [5 баллов] а) В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $AD : AC = 3 : 5$ и $DE \perp AB$. Найдите тангенс угла BAC, если известно, что $\angle CED = 45°$.

   б) Пусть дополнительно известно, что $AC = \sqrt{29}$. Найдите площадь треугольника CED.

5. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Найдите радиусы окружностей и площадь четырёхугольника $BACE$, если известно, что $CD = 1$, $BD = 3$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant ax + b \leqslant x + |2x - 1|$$

+

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$.

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/2]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 21$, $1 \leqslant y \leqslant 21$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$b_1, b_2; b_3; b_4 \ldots$ ряд. геометрич. прогрессии

$b_1 = a$; $q \neq 0$. (иначе $b = c = 0$)

$b_2 = b_1 \cdot q = a \cdot q = b$. $b_4 = a \cdot q^3 = b_1 \cdot q^3 = x$.

$b_3 = b_1 \cdot q^2 = a \cdot q^2 = c$.

Тогда подставим в уравнение числа a b, c выраженные через q и a.

$ax^2 + 2a \cdot qx + a \cdot q^2 = 0$. $(ax^2 + 2bx + c = 0)$.

т.к $a \neq 0$ (иначе $b_3 = 0 = c = b$).

$x^2 + 2qx + q^2 = 0$.

– полный квадрат.

$(x+q)^2 = 0$.

$x = -q = a \cdot q^3$.

$-q = aq^3 \; | : q$.

$aq^2 = -1$ – а это 3-ий член прогрес.

$c = aq^2 = -1$.

Ответ: -1.

№3.

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy - 2x - y + 2} & :(1) \\ 2x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0. & :(2) \end{cases}$$

Преобразуем.

~~$y-2x = \sqrt{xy-2x-y+2}$~~

(1): $y-2x=\sqrt{y(x-1)-2(x-1)}$

$y-2x=\sqrt{(y-2)(x-1)}$.

(2): $2(x-1)^2-2+(y-2)^2-4+3=0$.

$$\begin{cases} 2(x-1)^2+(y-2)^2=3. \\ y-2x=\sqrt{(y-2)(x-1)} \end{cases}$$

Заметим, что $y-2-2(x-1)=$
$=y-2x$

Тогда. Пусть $y-2=u$; а $x-1=v$.
перепишем систему.

$$\begin{cases} u-2v=\sqrt{vu} \quad | \uparrow^2 \quad :(3) \\ 2v^2+u^2=3. \end{cases}$$

(3): $u^2-4vu+4v^2=vu$.

$u^2-5vu+4v^2=0$. (Решим относительно u).

$D=25v^2-16v^2=9v^2$

$$u=\frac{5u\pm|3v|}{2} \Leftrightarrow u=\frac{5u\pm3v}{2} \text{ (после проверки)}.$$

$$\left[\begin{array}{l} u=4v. \\ u=v. \end{array}\right., \text{ тогда } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=v. \\ 2v^2+v^2=3. \end{cases}; \\ \begin{cases} 2v^2+16v^2=3. \\ u=4v. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} v=1. \\ u=1. \end{cases} :(4) \\ \begin{cases} v=-1 \\ u=-1. \end{cases} :(5) \\ \ldots \end{array}\right. \ldots \left[\begin{array}{l} \begin{cases} v=\frac{\sqrt6}{6}. \\ u=\frac{2\sqrt6}{3}. \end{cases} :(6) \\ \begin{cases} v=-\frac{\sqrt6}{6}. \\ u=-\frac{\sqrt6}{3} \end{cases} :(7). \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~2. (4): $\begin{cases} y-2=1 \\ x-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow (2;3)$.~~

~~(5): $\begin{cases} y-2=-1 \\ x-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow (0;1)$.~~

~~(6): $\begin{cases} y-2=\frac{2\sqrt6}{3} \\ x-1=\frac{\sqrt6}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{6+2\sqrt6}{3} \\ x=\frac{6+\sqrt6}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{6+\sqrt6}{6};\frac{6+2\sqrt6}{3}\right)$~~

~~(7): $\begin{cases} y-2=-\frac{2\sqrt6}{3} \\ x-1=-\frac{\sqrt6}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{6-2\sqrt6}{3} \\ x=\frac{6-\sqrt6}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{6-\sqrt6}{6};\frac{6-2\sqrt6}{3}\right)$.~~

~~Ответ: $(2;3)$; $(0;1)$; $\left(\frac{6+\sqrt6}{6};\frac{6+2\sqrt6}{3}\right)$; $\left(\frac{6-\sqrt6}{6};\frac{6-2\sqrt6}{3}\right)$.~~

Сделаем проверку. (из-за неточности знака)

(4): $1-2=1$ – ~~нет~~

$-1\neq 1$ – неподх. $(1;1)$

(5): $-1+2=1$ $\qquad 2+1=3$.

$1=1$ – подх. $(-1;-1)$ $\qquad 3=3$.

(6): $\frac{2\sqrt6}{3}\cdot\frac{2\sqrt6}{3}=\sqrt{\frac{6\cdot2}{18}}$ $\qquad \frac{2}{6}+\frac{8}{3}=3$.

~~Смотреть решение~~ $\frac{\sqrt6}{3}=\frac{\sqrt6}{3}$ – подх. $\qquad 3=3$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

(4): $+\frac{2\sqrt{6}}{3} \neq -\frac{2\sqrt{6}}{3} = \sqrt{\frac{6\cdot 2}{18}}$

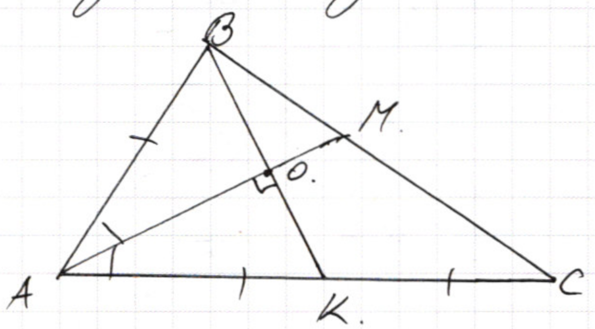
$-\frac{\sqrt{6}}{3} \neq \frac{\sqrt{6}}{3}$ - неподх.; тогда

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} V=-1 \\ U=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} V=\frac{\sqrt{6}}{6} \\ U=\frac{2\sqrt{6}}{3} \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y-2=-1 \\ x-1=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} y-2=\frac{2\sqrt{6}}{3} \\ x-1=\frac{\sqrt{6}}{6} \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} y=\frac{6+2\sqrt{6}}{3} \\ x=\frac{6+\sqrt{6}}{6} \end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(0;1)$; $\left(\frac{6+\sqrt{6}}{6}; \frac{6+2\sqrt{6}}{3}\right)$.

√2.

Нарисую произвольный треуг. удв. усл.



BK - мед

AM - бис-са

1. $\triangle ABK$; $AO \perp BK$ (по усл), AO - бис-са $\angle ABK$ $\Rightarrow$ $\triangle ABK$ - р/б (по пр).

$\Rightarrow$ $AB = AK$.

2. Пусть $AB = y$, тогда $AK = y = KC$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $AC = 2y$, тогда $BC = 1200 - AB - AC = 1200 - 3y$. ($y \geq 0$), $y < 400$)

3. $\triangle ABC$ - по теореме косинусов ($\angle A = \alpha$)

$BC^2 = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2\cdot\cos\alpha \cdot AC\cdot AB} =$

$= \sqrt{y^2 + 4y^2 - 2y^2\cdot 2\cdot\cos\alpha} =$

$= y\cdot\sqrt{5 - 4\cdot\cos\alpha}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$1200-3y = y\cdot\sqrt{5-4\cos\angle}$

$1200 = y\left(3+\sqrt{5-4\cos\angle}\right)$.

~~$\sqrt{5-4\cos\angle}$~~ $-4 < -4\cos\angle < 4$. ($\angle < \pi$ и $\angle > 0$).

$1 < 5-4\cdot\cos\angle < 9$

$1 < \sqrt{5-4\cos\angle} < 3$ $\quad +3$.

$4 < 3+\sqrt{5-4\cos\angle} < 6$, тогда.

$\frac{1200}{4} > \frac{1200}{3+\sqrt{5-4\cos\angle}} > \frac{1200}{6}$, тогда.

$300 > y > 200$, а т.к y - целое. число по условию, то y может быть любым из чисел от 201 до ~~300~~ 299, т.е. 99 вариантов треугольника возможно, т.к. каждая из сторон единственным образом ~~Ответ: 99.~~ определяется y (иначе y - нецелое)

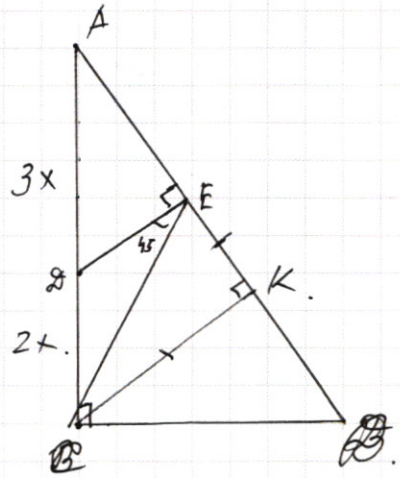
Ответ: 99 вариантов.

P.S. для каждого y из диапазона обязательно найдется множитель в знаменателе, так из $\sqrt{5-4\cos\angle}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 5.
(Нумеровать только чистовики)

№4.



Дано.

$\triangle ABC$ – п/у

$\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$

$DE \perp AB$.

$\angle DEC = 45°$.

$tg \angle A$ – ?

б) $AC = \sqrt{29}$.

S_{CED} – ?

1. $CK \perp AB$. $DE \perp AB$ $\Rightarrow CK \parallel DE \Rightarrow$ (по св-ву н. л. уг.

$\angle DEC = ECK = 45°$.

2. $\triangle ECK$ – п/у. $\angle ECK = 45°$ $\Rightarrow ECK$ – р/б $\Rightarrow EK = CK$.

Пусть $CK = 5y$, тогда $DE = \frac{3}{5} \cdot 5y = 3y$.

(из подобия $\triangle DAE \sim \triangle CAK$; $\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CK} = \frac{3}{5}$)

$\triangle ADE \sim \triangle CAK$. ($\angle E = \angle K = 90°$, $\angle A$ – общ) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AE}{AK} = \frac{AD}{AC} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{AE}{AE+EK} = \frac{3}{5}$.

$5AE = 3AE + 3EK$

$2AE = 3EK$.

$AE = \frac{3EK}{2} = \frac{3 \cdot 3y}{2} = 4{,}5y$., тогда.

$tg A = tg \angle EAD = \frac{DE}{AE} = \frac{3y}{4{,}5y} = \frac{3}{4{,}5} = \frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3}$.

3. $AC = \sqrt{29}$. Тогда. по т. Пифагора.

$(\frac{3}{5}AC)^2 = AE^2 + DE^2$.

$\frac{9}{25} \cdot 29 = (\frac{9}{2})^2 y + 9y^2 \; | \cdot 100$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$36\cdot 29 = (36\cdot 25 + 900)y^2$

$y = \frac{6\sqrt{29}}{\sqrt{1800}} = \frac{6\sqrt{29}}{30\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{29}}{5\sqrt{2}}$

$\cancel{S_{AED} = \frac{1}{2}DF\cdot AE = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4,5\cdot\frac{29}{25\cdot 2} = \frac{27\cdot 29}{200} = \frac{783}{200}}$

$S_{\Delta CEK} = \frac{1}{2}EK\cdot CK = \frac{1}{2}\cdot 25y^2 = \frac{1}{2}\cdot 25\cdot\frac{29}{25\cdot 2} = \frac{29}{4}$

$S_{CDEK} = EK\cdot\frac{DE+CK}{2} = \frac{1}{2}\cdot 5y\cdot 4y =$

высота (недо п/у трапец)

трапец $DE\parallel CK$.

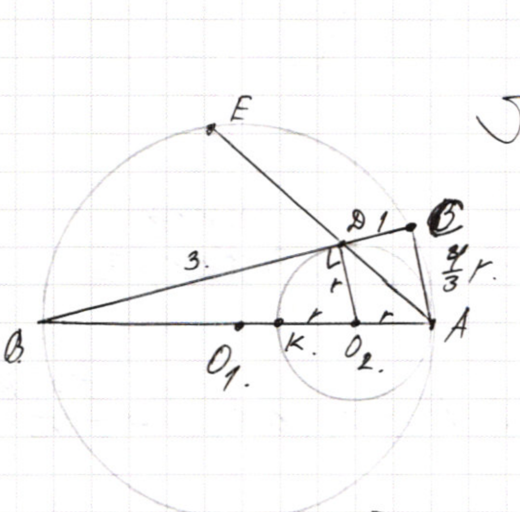
$= \frac{20}{2}\cdot y^2 = 10y^2 = 10\cdot\frac{29}{25\cdot 2} = \frac{40\cdot 29}{100} = \frac{1\cdot 580}{100} = 11,6$

$S_{CED} = S_{CDEK} - S_{\Delta CEK} = \cancel{5,8 - \frac{29}{4}} =$

$= 11,6 - \frac{29}{4} = 11,6 - 7,25 = \underline{4,35}$

Ответ: $4,35$; $\frac{2}{3}$.

$\sqrt{5}$. α α.



1. $OD\perp BD$ (по св-ву r в т. кас)

$\angle C = 90°$ (по св-ву уг. опир на диаметр) $\Rightarrow$

$\angle B$ - общ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta O_2BD \sim \Delta ABC$ (подобн уг) $\Rightarrow$

~~смотреть решение на 13 стр.~~

$\Rightarrow \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{O_2D}{AC} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow AC = \dfrac{4}{3} r.$ (r - окр. мал. рад. R - окр больш).

по т. Пифаг. из $\triangle ABC$.

$16 = \left(\dfrac{4}{3} r\right)^2 + (2R)^2.$ $\quad \dfrac{16}{9} r^2 + 16 = 4R^2.$

$4r^2 + 36 = 9R^2.$

$36 = 9R^2 - 4r^2.$

$16 = \dfrac{16}{9} r^2 + 4R^2 \quad | \cdot \dfrac{9}{4}.$

$36 = 4r^2 + 9R^2 \quad : (1)$

2. по св-ву кас и сек. из 1 точ.

$BD^2 = AB \cdot BK.$

$9 = 2R \cdot (2R - 2r)$

$9 = 4R^2 - 2rR \quad : (2)$

3 ~~по т. Пифаг. $\triangle BDO_2$~~ :

$\cancel{9 = r^2 + (2R - r)^2} : (3)$

$(2) - (3) \cancel{: 0 = 4R^2 - 2rR - r^2}$

$\cancel{r^2 + 4R^2 - 4Rr + r^2 - 4R^2 + 2Rr = 0.}$

$\cancel{2r^2 - 2Rr = 0.}$

$\cancel{r(r - R.} \quad \cancel{9 + r^2 = (2R - r)^2}$

$$\begin{cases} 36 = 4r^2 + 9R^2 \\ 9 = 4R^2 - 2rR \quad | \cdot 4 \; \ominus \end{cases}$$

$16R^2 - 8rR - 4r^2 - 9R^2 = 0.$

$7R^2 - 8rR - 4r^2 = 0.$

$D = 64r^2 + 28 \cdot 4r^2 = 64r^2 + 112r^2 =$

$= 176 r^2 = (4r\sqrt{11})^2.$

$R = \dfrac{8r \pm 4\sqrt{11} r}{14}$ т.к $R > 0$, то $R = \dfrac{8 + 4\sqrt{11}}{14} r.$

$R = \dfrac{4 + 2\sqrt{11}}{7} r.$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики) тогда $CA = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$, тогда

$DA = \sqrt{DC^2 + CA^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3} \Rightarrow \sin\angle CDA = \frac{CA}{AD} =$

$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

$AD \cdot DE = BD \cdot DC$ (св-ву пересек отрезков в окр).

$\Rightarrow DE = \frac{BD \cdot DC}{AD} = \frac{3 \cdot 1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, тогда $AE =$

$= AD + ED = 2\sqrt{3}$. $(BC = BD + DC = 4)$.

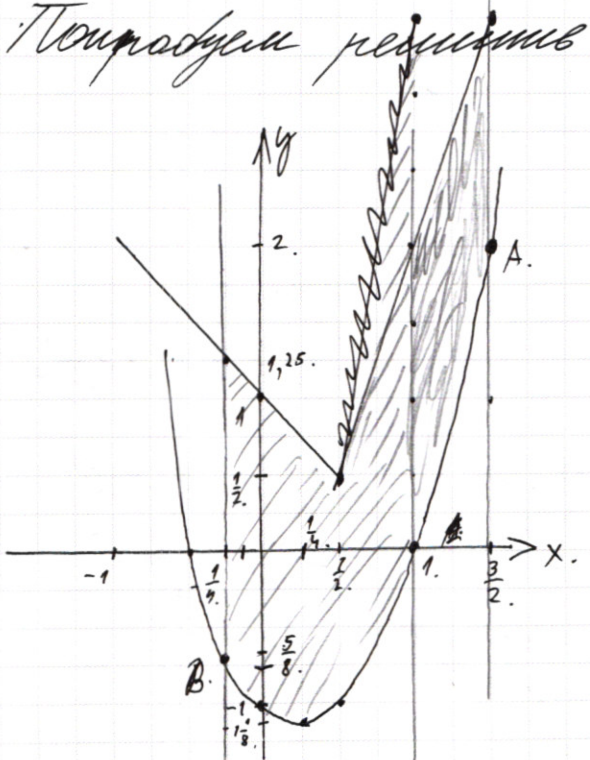
$S_{\triangle BECA} = \frac{1}{2} \cdot \sin\angle CDA \cdot BC \cdot AE = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot 4 \cdot \cancel{2}\sqrt{3} =$

$= \frac{4 \cdot \sqrt{2} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}} = 4\sqrt{2}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; $4\sqrt{2}$.

$\sqrt{6}$.

Попробуем решить графически. (построить функ. $2x^2 - x - 1 = y$ и $x + |2x-1| = y$.



$y\left(\frac{3}{2}\right) =$

$= 3 \cdot \frac{3}{2} - 1 =$

$= 4{,}5 - 1 =$

$= 3{,}5$.

$x \le \frac{1}{2}$; $y = -x + 1$

$y \ge \frac{1}{2}$; $y = 3x - 1$

$y = 2x^2 - x - 1$

$x_в = -\frac{b}{2a} = +\frac{1}{4}$.

$y(x_в) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 =$

$= -\frac{1}{8} - 1 = -1\frac{1}{8}$.

$2x^2 - x - 1 = 0$.

$D = 1 + 8 = 3^2$.

$x = \frac{1 \pm 3}{4}$ $x = 1$.

$x = -\frac{1}{2}$.

$y\left(\frac{2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{3}{8} - 1 = \frac{5}{8}$.

$y(1{,}5) = 4{,}5 - 1{,}5 - 1 =$

$= 2$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{OD}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AC = \frac{4}{3}r$ (r – окр. мал р. R – окр ~~больш~~. рад).

2. по т. Пиф. из ABC.

$16 + \left(\frac{4}{3}r^2\right) = (2R)^2 \quad | \cdot \frac{9}{4}$

$36 + 4r^2 = 9R^2$.

2. по св-ву кас и сек.

$BD^2 = AB \cdot BK$.

$9 = 2R \cdot (2R - 2r)$.

$9 = 4R^2 - 4rR$.

$\left\{\begin{array}{l} 36 = 9R^2 - 4r^2 \\ 9 = 4R^2 - 4Rr \quad | \cdot 4 \end{array}\right. \ominus$

$16R^2 - 16Rr - 9R^2 + 4r^2 = 0$.

$7R^2 - 16Rr + 4r^2 = 0$. (относит. r)

$D = (256 - 28 \cdot 4)R^2 = (256 - 112)R^2 =$

$= 144R^2 = (12R)^2$.

$r = \frac{16R \pm 12R}{8} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} r = 3,5R \\ r = \frac{1}{2}R \end{array}\right.$

т.к $r < R$, то $r = \frac{1}{2}R$, тогда.

$36 + R^2 = 9R^2$

$36 = 8R^2$.

$9 = 2R^2 \Rightarrow R = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, а $r = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.)

~~Это задание. √5 (извиняюсь) Далее на √8.~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Таким~~ таким образом наглядно видно, что прямая $y = ax + b$, чтобы удовлет. $2x^2 - x - 1 \le ax + b \le x + |2x-1|$, должна всеми точками находится в закрашен. области, при $x \in [-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}]$ (очевидно, что $k>0$).

1. Если прямой принадлеж. точка излома

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}a + b$ | ·2

$1 = a + 2b \Rightarrow y = (-2b+1)\cdot x + b$

$a = -2b+1$, найдем крайние угл. коэф.

I. через точку A $(1,5; 2)$.

$2 = 1,5 \cdot 2b + b$

$2 = 4b$; $b = 2$, $a = -3$.

II ~~через~~ через B $(\frac{1}{4}; \frac{5}{8})$

$\frac{5}{8} = \frac{1}{4} \cdot 2b + b$ | ·2

$\frac{5}{4} = 5b$; $b = \frac{1}{4}$; $a = \frac{1}{2}$

проверим, не пересек. прямые ли график другой.

1. $y = -3x + 2$.

$2 = (-2b+1)\cdot 1,5 + b$ | ·2

$4 = -6b + 3 + 2b$

$1 = -4b$ $\quad b = -\frac{1}{4}$; $a = +2\cdot\frac{1}{4} + 1 = 1,5$.

$y_1 = 1,5x - \frac{1}{4}$

II ~~чер~~ через. В. $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{8}\right)$.

$-\frac{5}{8} = (-2b+1)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) + b \quad | \cdot 4.$

$-2,5 = +2b - 1 + 4b.$

$-1,5 = 6b$

~~$a = \ldots \Rightarrow a = \ldots$~~

~~$y = \ldots$~~

~~$a = -\frac{7}{6} + 1 = -\frac{1}{6}$; $y_2 = \frac{1}{6}x + \frac{7}{12}$.~~

$b = \frac{-1,5}{6} = -\frac{1}{4} \Rightarrow a = +2\cdot\frac{1}{4} + 1 = 1,5.$

$y_2 = 1,5x - \frac{1}{4}.$

Как мы видим прямая $y_1 \equiv y_2$.
Мы можем сделать вывод тогда о том, что это единств. прямая уд. условию. (Если a измен. - пересечем ~~...~~ график) Если b станет больше или меньше 1 точк.
(Доп. расчет точек на графике:

$y = \frac{3}{2}$ для $y = 2x^2 - x - 1$.

$y\left(\frac{3}{2}\right) = 4,5 - 1,5 - 1 = 2.$

$x_b = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}.$ $\quad y\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{3}{8} - 1 = \frac{5}{8}.$

$y(x_b) = -1\frac{1}{8}.$

для $y = x + |2x-1|$, $y \le \frac{1}{2}$; $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

$y(0) = -1.$

$y\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} + \left|2\cdot\frac{3}{2} - 1\right| = 3,5$

Ответ: $\left(1,5; -\frac{1}{4}\right)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~№7.~~

~~$f(x)\neq 0$, когда~~

~~Т.к. график $f(x)$ определена на $x\in(0;+\infty)$, а $f(p)=[p/2]$, где p - простое число $(p>0)$, т.е это определяющее выражение, где [знач. других знач. f] $[p/2]\geq 0$, то $f(x)\geq 0$, при $x\in(0;+\infty)$. $f(x/y)$ не может быть меньше нуля. Если $f(x/y)$ равно нулю. Во-первых при $x=y$, т.е $\frac{x}{y}=1$, но проблема в том, что.~~

~~$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$ а если $x\neq 0$~~

$f(1)=\left[\frac{1}{2}\right]=0$. №7, тогда ~~самые~~

~~$f\left(\frac{x+1}{y}\right)$~~

$f(1)=0$.

$f(2)=1$; $f(3)=1$; $f(4)=1$;

$f(5)=2$; $f(6)=2$.

Если $f\left(\frac{x}{x\cdot y}\right)=\underset{\geq 0}{f(x)}+\underset{\leq 0}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=0$, то

$f\left(\frac{x}{y}\right)\leq 0$, тогда когда $\frac{x}{y}=\frac{1}{z}$, где $z\in N$, тогда первые пары x и y такие $(t;2t)$, $t\in N$; $t\in[1;10]$, т.е $n=10$

$n=0$ - количество пар (счетчик

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

потом. $(t\in\mathbb{N})$

$(t;3t)$, где $t\in[1;7]$ ~~и+=7~~ и += 7 = 17.

$(t;4t)$, где $t\in[1;5]$ и += 5 = ~~23~~ 22.

$(t;5t)$, где $t\in[1;4]$ ~~и+~~ ~~и+~~ и += 4 = 26.

$(t;6t)$, где $t\in[1;3]$ и += 3 = 29.

$(t;7t)$, где $t\in[1;3]$ и += 3 = ~~3~~32.

$(t;8t)$, где $t\in[1;3]$ и += 3 = 35.

$(t;9t)$, где $t\in[1;2]$ и += 2 = 37

$(t;10t)$, где $t\in[1;2]$ и += 2 = 39.

и ~~когда~~ еще! $(1;11)$; $(1;12)$ ... $(1;21)$; и += 11 = = 50.

Ответ: 50.

Если допустим. ~~$f\left(\frac{x}{x}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$~~.

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) + f(1) - f(y) =$

где, $x\le y$).

$f\left(\frac{y}{y}\right) = f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(1) - f(y)$.

$= f(x) - f(y)$

Значит есть еще варианты, нужно рассмотреть (не успеваю) простые числа (нет времени). (значения) и выбрать такие где $f(x) < f(y)$ (т.е. посмотреть где $f(x)=f(y)$).

$2R\cdot(2R-2r) = 4R-4Rr.$

$1-2=1.$

$-1-2.$

$3600 \,|\, 4$; $900.$

$6\cdot 5 = 3.$

29
27

$30\cdot 27$

$$2+1=3$$

$810 - 27 = 783.$

$$\frac{2\sqrt6}{3}\cdot\frac{2\sqrt6}{\cancel{6}} = \sqrt{\frac{6\cdot 2}{\cancel{18}\,9}} = \frac{\sqrt6}{3}.$$

$$\frac{4\sqrt6-2\sqrt6}{6} = \frac{\cancel{3}\sqrt6}{6} =$$

$58 \times 2 = 116.$ $\cancel{36}.$

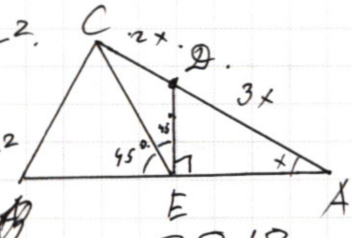
$$16 = 4R^2+\frac{16}{9}r^2 \quad \frac{4\cdot\cancel{6}}{\cancel{9}} = \frac{4\cdot 2}{3} = \frac{8}{3}.$$

16×9

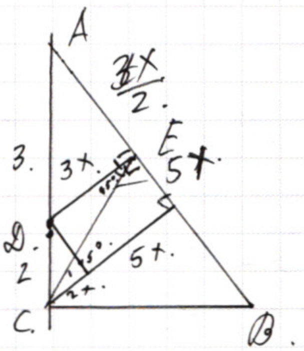
~~1447 BAR~~

$$4 = R^2+\frac{4}{9}r^2.$$

$$36 = 9R^2+4r^2$$



$tg\angle BAC.$



$$\frac{t}{t+x} = \frac{3}{5}.$$

$5t = 3t+3x.$

$2t = 3x.$

$$t = \frac{3x}{2}.$$

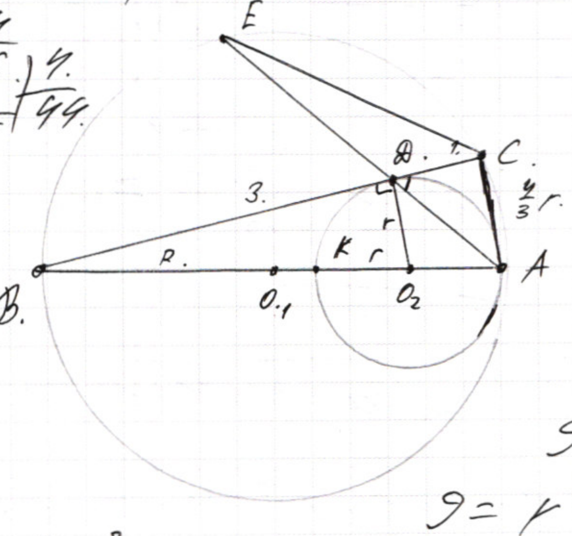
$28 \,|\, 8$

$6 \quad \cancel{4}\ \frac{7}{2}.$

$28 \times 4 = 112.$ $11\cdot 4^2.$

$112 + 64 = 176.$

$176 \,|\, 4$; -16, 16 ; $44.$



$R - ?$

BACE

$BD\cdot DC = DE\cdot AD.$

$9 = \cancel{2R^2}\, 2\cdot R\cdot(2R-2r)^2.$

$9 = r^2+(2R-2r)^2.$

$9 = r^2+4R^2-8rR+4r^2.$

$9 = 4R^2-4rR$

~~DE BK~~^{2}

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2x^2 - x - ax - 1 \le b \le x - ax + |2x-1|$

$2x^2 - x - ax - 1 - b \le 0$

$2x^2 - (a+1)x - 1 - b \le 0$

$1200 \frac{4}{300} \cdot 8v^2 = 3$

$200 \cdot v = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$

$D = (a+1)^2 + 4 + b$

$\frac{(a+1) \pm \sqrt{(a+1)^2+4+b}}{4} \ge 0$

$x(1-a) - b + |2x-1| \ge 0$

$x < 0$

$x \ge -\frac{1}{4}$

1. $x(1-a) - b - 2x + 1 \ge 0$

$x(-a-1) - b + 1 \ge 0$

$x \ge -\frac{+b+1}{+a+1}$ $\quad \frac{b-1}{a+1} \ge \frac{1}{4}$

$b - 1 \ge 0$. $b \ge 1$.
$a + 1 \ge 0$. $a \ge -1$.
$b - 1 \le 0$ $\quad b \le 1$
$a + 1 \le 0$. $\quad a \le -1$.

$x(1-a) - b + 2x - 1 \ge 0$

$x(3-a) \ge b+1$

$x \ge \frac{b+1}{3-a} \ge 0$

$b + 1 \ge 0$. $b \ge 1$.
$3 - a \ge 0$. $a \le 3$.

$\frac{b+1}{3-a} \ge 0$

$a+1 + \sqrt{(a+1)^2+4+b} \ge \frac{3}{2}$

$a+1 - \sqrt{(a+1)^2+4+b} \le -\frac{1}{4}$

$\frac{b-1}{a+1} = \frac{1}{4}$

$a+1$

$-(a+1) + \sqrt{\ } \ge \frac{1}{4}$

$\sqrt{\ } \ge \frac{3}{2} + \frac{1}{4}$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

В9. $a = b_1 = \cancel{b_1} \, 0$

$b = b_2 = \cancel{b} a \cdot q =$

$c = b_3 = a \cdot q^2 = \varepsilon$

$a \cdot q^3$

$a x^2 + 2 \cdot a \cdot q \cdot x + a q^2 = 0$

$x + 2 q x + q^2 = 0$

$(x+q)^2 = 0$

$0{,}5$

$1{,}25$

$x = -q = a \cdot q^4$

$-1 = a \cdot q^3$

$y^2 - 4xy + 4x^2 =$

$= xy + 2x + y - 2 = 0$

$\sqrt{3}$

$y - 2x = \sqrt{y(x-1) - 2(x-1)}$

$v - 2u \qquad \dfrac{(y-2)(x-1)}{v \quad u}$

$\cancel{2x^2} \quad \cancel{2x^2 + y^2 - 4x}$

$(y-2)^2 - 4 + 2 \cdot (x-1)^2 - 2 = -3$

$+4$

$6 - 3$

$(y-2)^2 + 2(x-1)^2 = 3$

$\frac{12}{\cancel{7}} = \frac{9}{3{,}5}$

$\underline{y-2} \qquad \underline{2x-2} \qquad -y-2$

$2x-2$

$v - 2u = \sqrt{vu}$

$\underline{y - 2x}$

$v^2 + 2u^2 = 3$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$(v-2u)^2 = vu.$ $\cancel{2x}$ $3y+x=120.$

$v^2+2u^2=3.$ $x = 1200-3y.$

$v^2-4uv+4u^2=vu.$

$v^2+2u^2=3.$

$\cancel{v^2=3uu}$ $\cancel{u^2x}$ u

$v^2-5vu+4u^2=0.$

$D=25u^2-16u^2=9u^2.$

$y-2=x-1.$

$y-2=4(x-1).$

$v=\frac{5u\pm 3u}{2}.$

$v=\frac{8u}{2}=4u.$

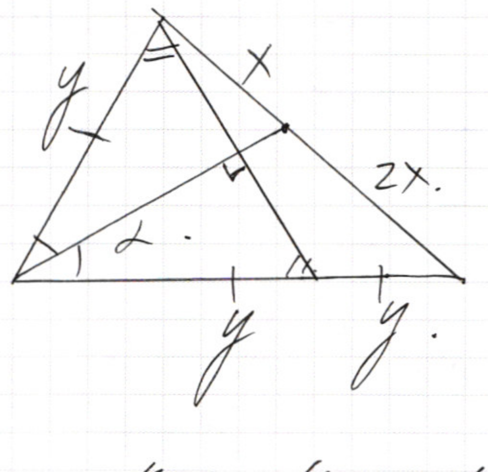
$\cancel{y-2}$ $y=x+\cancel{3}1.$

$v=u.$

$x+1-2x=|x-1|.$

$-x+1=|x-1|.$

$x \le 1.$



$9x^2=y^2+4y^2-2\cdot\cos\alpha\, 2y^2$

$9x^2=5y^2-4y^2\cdot\cos\alpha.$

$y^2\cdot(5-4\cdot\cos\alpha).$

$x = y\sqrt{\frac{5-4\cdot\cos\alpha}{9}}$ – цел.

$-4\le -4\cos\alpha\le 4.$ $+5.$ цел.

$\frac{1}{2};$

$3600 = y(9+\sqrt{5-4\cos\alpha})\le 9.$

$\ge 10.$

$\cancel{3600=}$ $\le 18.$ $1200-3y=y$

$3600-9y=y\sqrt{5-4\cos\alpha}.$

1 ~~14.~~ 10 ×.

15. ~~11~~ 12

16. ~~17.~~ 18 ×.

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

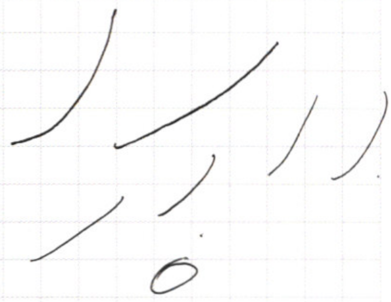
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab) = f(a) + f(b).$

$f(p) = [p/2].$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right).$

0.



$f(1) = 0.$

$f(2) = 1.$

$f(3) = 1.$

$f(4) = 2.$

$f(5) = 2.$

$f(6) = 2.$

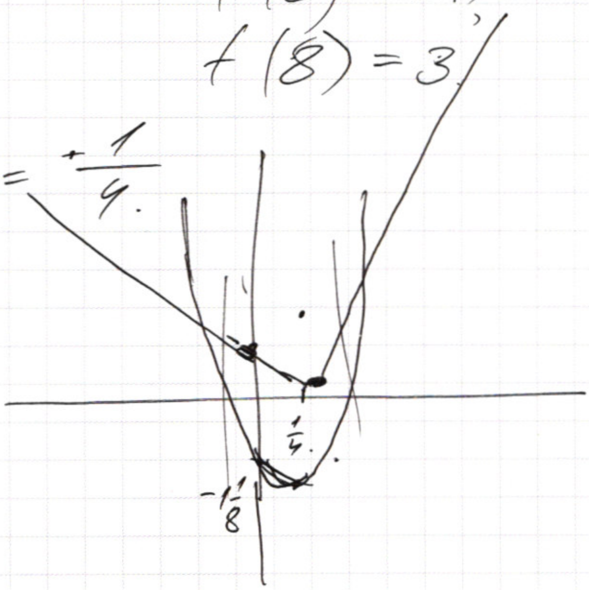
$f(8) = 3$

$\frac{1}{16} \cdot 2 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - 1 =$

$= -1\frac{1}{8}$

$\frac{5}{8} -$

$x_B = -\frac{1}{4}.$



$2x \geq 1$

$x \geq \frac{1}{2}.$

$3x - 1.$

$-x + 1$

0.

$f(2x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 0.$

$f(x) \quad f(2) = 1.$

$f(6) = 2.$

$f\left(\frac{6}{6}\right) = 2 + f\left(\frac{1}{6}\right) = \quad f\left(\frac{1}{6}\right) = -$