

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 5 - 4|x - 1|}{4x^2 - 12x + |x| \cdot |x - 3|} \leq 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.
3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy}, \\ 2y + x^2 = 9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D . Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.
5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED , если известно, что $AC = \sqrt{29}$, $BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x; y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6, \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = p$ для любого простого числа p . Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 19$, $3 \leq y \leq 19$ и $f(x/y) < 0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(2,5)^2 y + y = \frac{29}{2}$
 $6,25y$
 $7,25y = \frac{29}{2}$
 $14,5y = 29$

$x + y = \frac{29}{2}$
 $\frac{x}{2} = 2,5$
 $x = 2,5z$
 $z = 2,5y$

$z^2 = xy$ $x = (2,5)^2 y$

$y = 2$
 $x = 12,5$

$f(x_0)' (x - x_0) + f(x_0)$
 $(2x - 2)(x - 3) + 4(x - 3) + 8$
 $4x^2 + |x - 1$

$4x^2 - 12x$
 $4x^2 + |x(x - 3)| < 12x$

$4x^2 - x^2 + 13x < 12$
 $3x^2 - 9x^2 < 0$
 $4x^2 + (x^2 - 3x) < 12x$
 $5x^2 - 3x < 12x$
 $5x^2 - 15x < 0$
 $x^2 - 3x < 0$

$0 \quad 3$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases} \quad x \geq xy > 0.$$

$$4x^2 + y^2 - 4xy = \cancel{xy} \quad \text{сложим } 2y + x^2 = 9$$

$$4x^2 + y^2 - 5xy = 0.$$

$$4x^2 - 5xy + y^2 = 0.$$

$$4x^2 - 4xy + y^2 - xy = 0.$$

$$4x(x-y) - y(x-y) = 0$$

$$(x-y)(4x-y) = 0.$$

$$x = y$$

$$-x = x^2$$

$$x = 0, y = 0.$$

$$x^2 + 2x = 9.$$

$$x^2 + 2x - 9 = 0.$$

$$x = -2$$

$$4x = y$$

$$2x = 2x$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$x = -1, x = +9$$

$$y = 4$$

$$2y + 1 = 9$$

$$y = 4.$$

$$4x = y.$$

$$29 - 4 = 25 \quad x = y \Rightarrow x - 2x = x$$

$$x = 0$$

$$y = 0$$

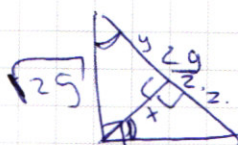
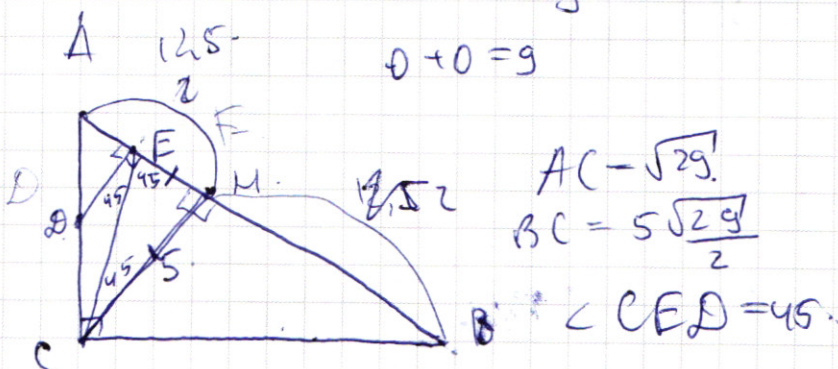
$$0 + 0 = 9$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0.$$

$$(x-1)(x+9) = 0.$$

$$x = 1; x = -9.$$

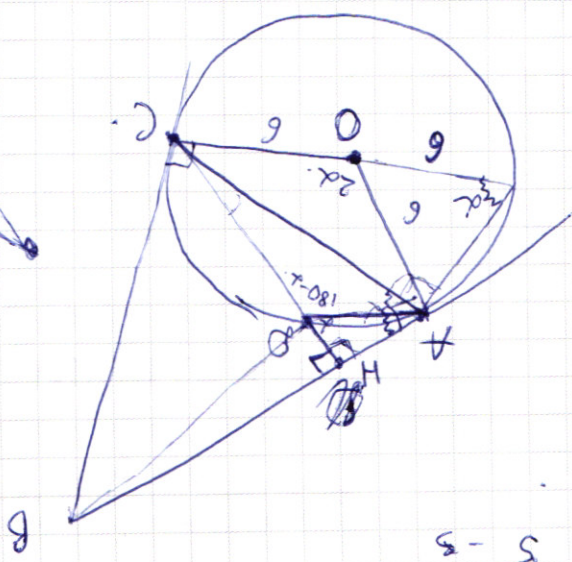
$$y = 4; y = -36.$$



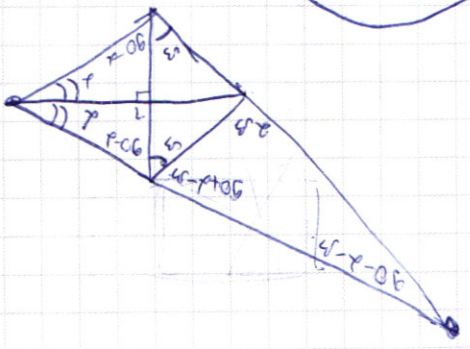
$$\frac{5}{2} \sqrt{29}$$

$$\frac{4 \cdot 29 - \frac{25 \cdot 29}{4}}{4} = \frac{29 \cdot 29}{4} = \frac{29}{2}$$

2 5-5

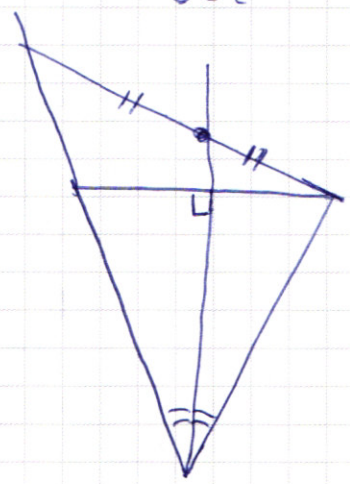
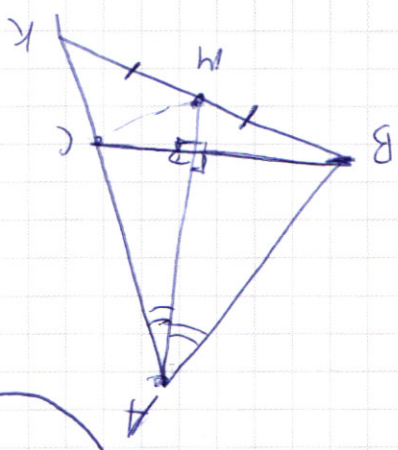
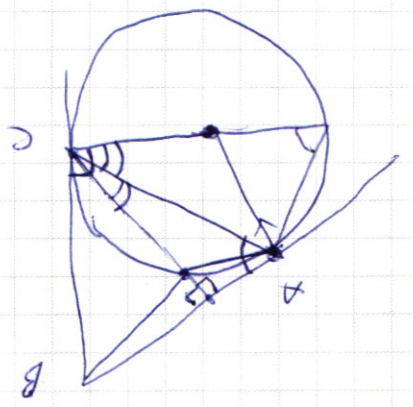


$S_{ABO} = 15$
 $AB \cdot H \cdot O = 30$



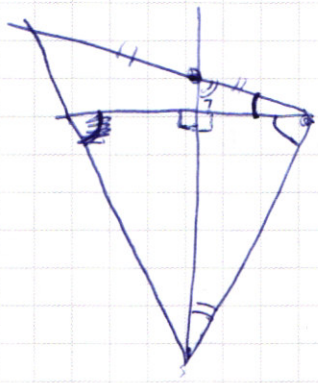
150
 153, 156, -297

$P = 300$

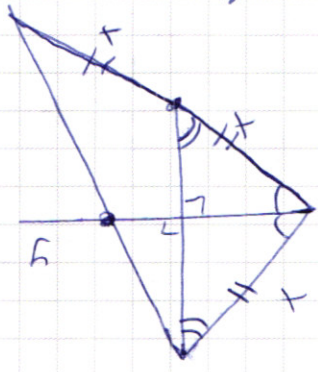


$3x + y = 300$
 $y = 300 - 3x$
 $300 - 3x > x$
 $300 > 4x$
 $75 > x$
 $225 > 3x$

$x + y > 2x$
 $y > x$



$3x \geq y$
 $2x + y > 4x$
 $x + y > 2x$



2 25

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$$y^2 + 4x^2 - 4xy = xy$$

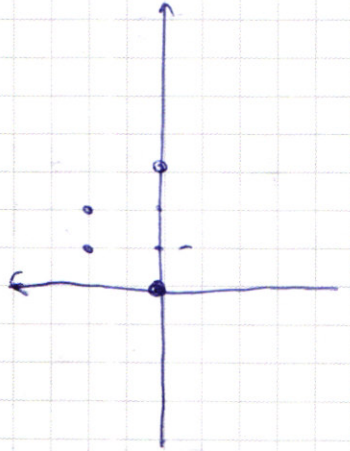
$$\begin{cases} 4x^2 - 5xy + y^2 = 0 \\ 2xy + x^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 9 - 2y \\ x = 9 - 2y \end{cases}$$

$$y = 5 + \sqrt{5} \cdot (\sqrt{5} \pm 5)$$

$$2y = \frac{5 \pm 5\sqrt{5}}{2}$$

$$y = \frac{5 \pm 5\sqrt{5}}{4} \sqrt{|x-3|} \sqrt{4x^2 - 12x}$$



$$x^2 y = \frac{5x \pm \sqrt{25x^2 - 20x^2}}{2}$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{5}x}{2}$$

$$5 + \sqrt{5}x + x^2 = 9$$

$$5 - \sqrt{5}x + x^2 = 9$$

$$x^2 - \sqrt{5}x - 4 = 0$$

$$x = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{5 + 20}}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{5} \pm 5}{2}$$

$$x = -\sqrt{5} \pm \sqrt{5 + 20}$$

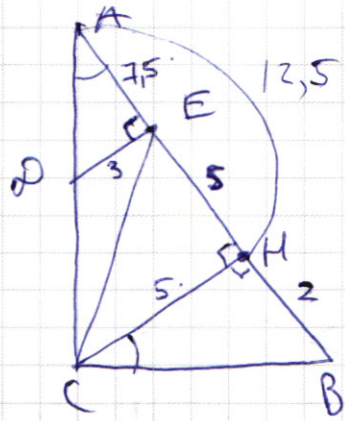
$$x = \frac{5\sqrt{5} \pm 45}{2}$$

$$x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|$$

$$x^2 + x^2 - 2x$$

$$E = \frac{9}{4}$$

WS



По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2 = \frac{29^2}{4}$

$$AB = \frac{29}{2}$$

$$AH = x; HB = y; HC = z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{z} = 2,5; \quad \frac{z}{y} = 2,5$$

$$x = 2,5z; \quad z = 2,5y$$

$$x = (2,5)^2 y$$

$$7,25y = \frac{29}{2}$$

$$y = 2; \quad x = \frac{29}{2} - 2 = 12,5$$

$$HC = \sqrt{2 \cdot 12,5} = 5. \quad \text{Заметим, что } \angle CED = 45^\circ$$

$$ED \parallel CH \Rightarrow \angle ECH = 45^\circ, \text{ но } \angle EHC = 90^\circ \Rightarrow \angle CEH = 45^\circ$$

$$\Rightarrow EH = HC = 5. \Rightarrow AE = 12,5 - 5 = 7,5$$

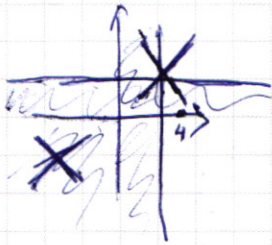
$$\frac{DE}{CH} = \frac{AE}{AH} \Rightarrow DE = \frac{7,5 \cdot 5}{12,5} = 3$$

$$S_{ADE} = \frac{3 \cdot 7,5}{2} = 11,25$$

$\triangle ADE \sim \triangle ACH$; $\angle A$ - общий,

$$\angle AED = \angle AHC. \Rightarrow \frac{DE}{CH} = \frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

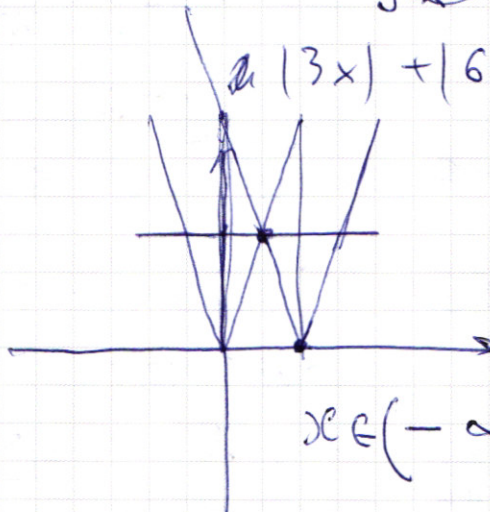


$$|2y| + |6 - 2y| > 6$$

$$2 \cdot 4y^2 + 36 + 4y^2 - 24y + 2(4y, 12y - 4y^2) > 36$$

$$9x^2 + 36 + 9x^2 + 36x$$

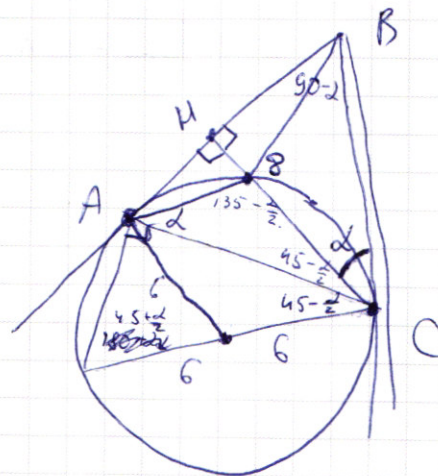
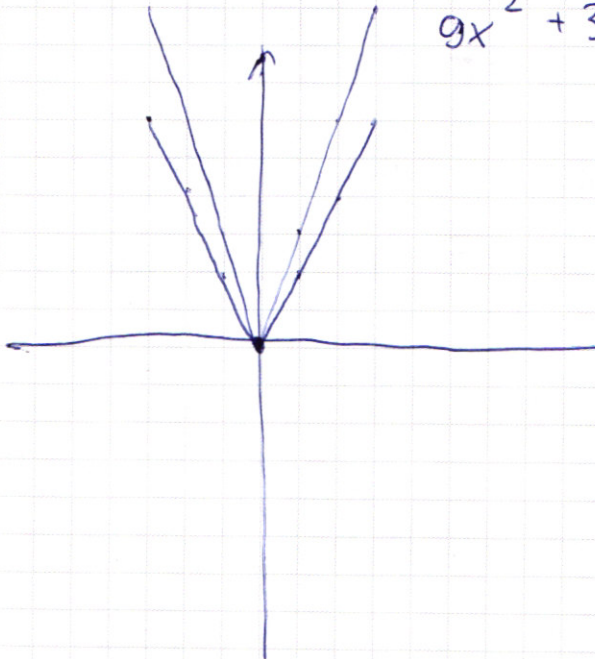
$$2|3x| + |6 - 3x| > 6$$



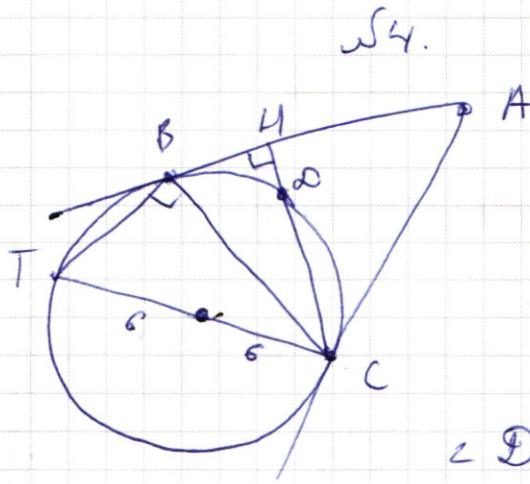
$$x \in (-\infty; 0), (2; +\infty)$$

$$9x^2 + 36 + 9x^2 - 36x + 2(18x - 9x^2) > 36$$

$$6 - 3x - 2y$$



AB.



Построим г. Т ∈ окр.
описанной около ТВС и
так, что $\angle TVC = 90^\circ$ (ТC -
диаметр). Тогда $\angle TVC = \angle BVC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DCB = \angle BCT$ (т.к. $\triangle BDC$ и $\triangle TBC$ прямоугол.) \Rightarrow

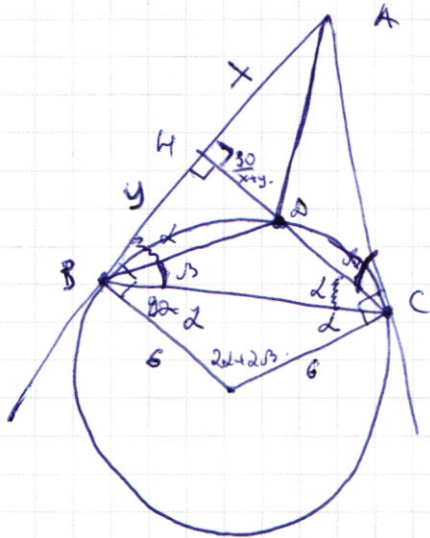
\Rightarrow найдем $\frac{CH}{BC}$ пусть $CH = a$, тогда

мы знаем, что $\triangle TVC \sim \triangle BVC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{CH}{BC} = \frac{BC}{12} \Rightarrow BC = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{a}$$

и с =

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$(x+y)z = 30$$

$$-2y + 6$$

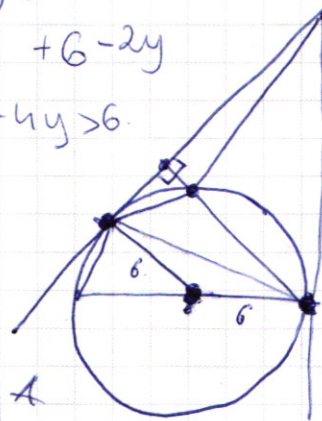
$$-2y + 6 - 2y$$

$$6 - 4y > 6$$

$$z = 1 - |xy| + |0.3 - 2y| > 6$$

$$y^2 - 3y + 1 \leq 0$$

$$y = 3 \pm \sqrt{9 - 4}$$



$$\frac{\sin \alpha \cdot AB \cdot BP}{z} = 30$$

$$\sin \alpha \cdot AB \cdot BP = 30 \cdot z$$

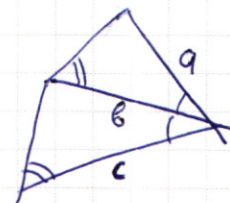
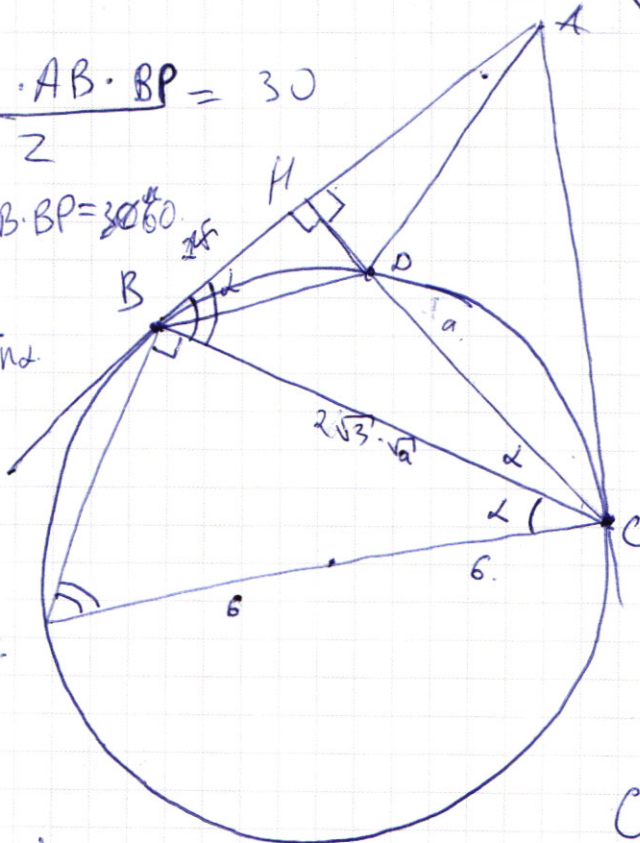
$$BP = \frac{60}{AB \cdot \sin \alpha}$$

$$MP = \frac{30}{AB}$$

$$\frac{BP}{MP} = \frac{2}{\sin \alpha}$$

$$xy + yz = 30$$

$$(x+y)z = 30$$

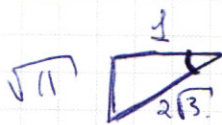


$$\frac{b}{c} = \frac{a}{e}$$

$$b^2 = ac$$

$$CM = a$$

$$CB = 2\sqrt{3} \cdot a$$

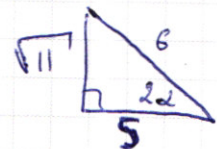


$$\frac{1}{2\sqrt{3}} = \cos \alpha$$

$$\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}} = \sin \alpha$$

$$\frac{\sqrt{11}}{6} = \sin 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases} \quad xy > 0.$$

$$y^2 + 4x^2 - 4xy = xy.$$

$$4x^2 - 5xy + y^2 = 0.$$

$$4x(x-y) - y(x-y) = 0$$

$$(x-y)(4x-y) = 0.$$

$$x = y.$$

$$y - 2x = \sqrt{xy} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0,$$

$$\text{но } 2y + x^2 = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 + 0 = 9 \text{ про-}$$

тиворечие

$$4x = y.$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0.$$

$$(x-1)(x+9) = 0.$$

$$x = 1 \Rightarrow \quad x = -9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 4 \quad \Rightarrow y = -36.$$

$$x = -9; y = -36 \text{ не}$$

удовл. $y - 2x = \sqrt{xy}$

Ответ: 1) $x = 1; y = 4.$

~~2) $x = -9; y = -36.$~~

№6.

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6. & (1) \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0 & (2) \end{cases}$$

из (1) \Rightarrow это при $x, y > 0$

$$|3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| = 6 \Rightarrow$$

\Rightarrow фигура не лежит в первой четверти., а если $x, y < 0$, то.

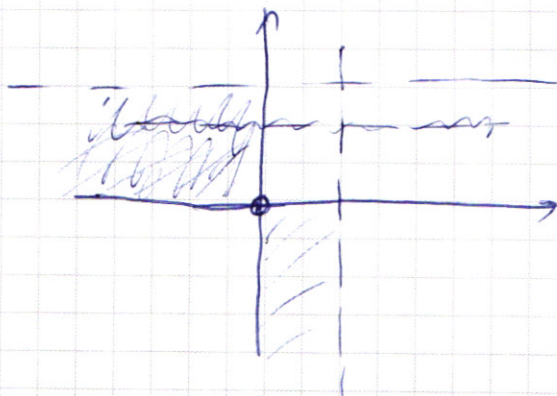
$x^2 - 2x - 3y + y^2 > 0 \Rightarrow$ фигура не лежит в ~~втор~~ третьей четверти. \Rightarrow

\Rightarrow если $x, y = 0$, то (1) неравенство не выполняется \Rightarrow ~~$x, y \neq 0$~~ $x, y \neq 0$.

также $x^2 + y^2 \leq 3y + 2x \Rightarrow$

\Rightarrow ~~x~~ x одновременно не может

$$y > 3 \text{ и } x > 2 \Rightarrow$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АРТОМОБильНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

(заполняется секретарём)

ШИФР

$$29 + 6 \cdot 25 \cdot 29 = 7 \cdot 25 \cdot 29 = 100$$

$$= 125 = \frac{100}{20} = \frac{20}{4}$$

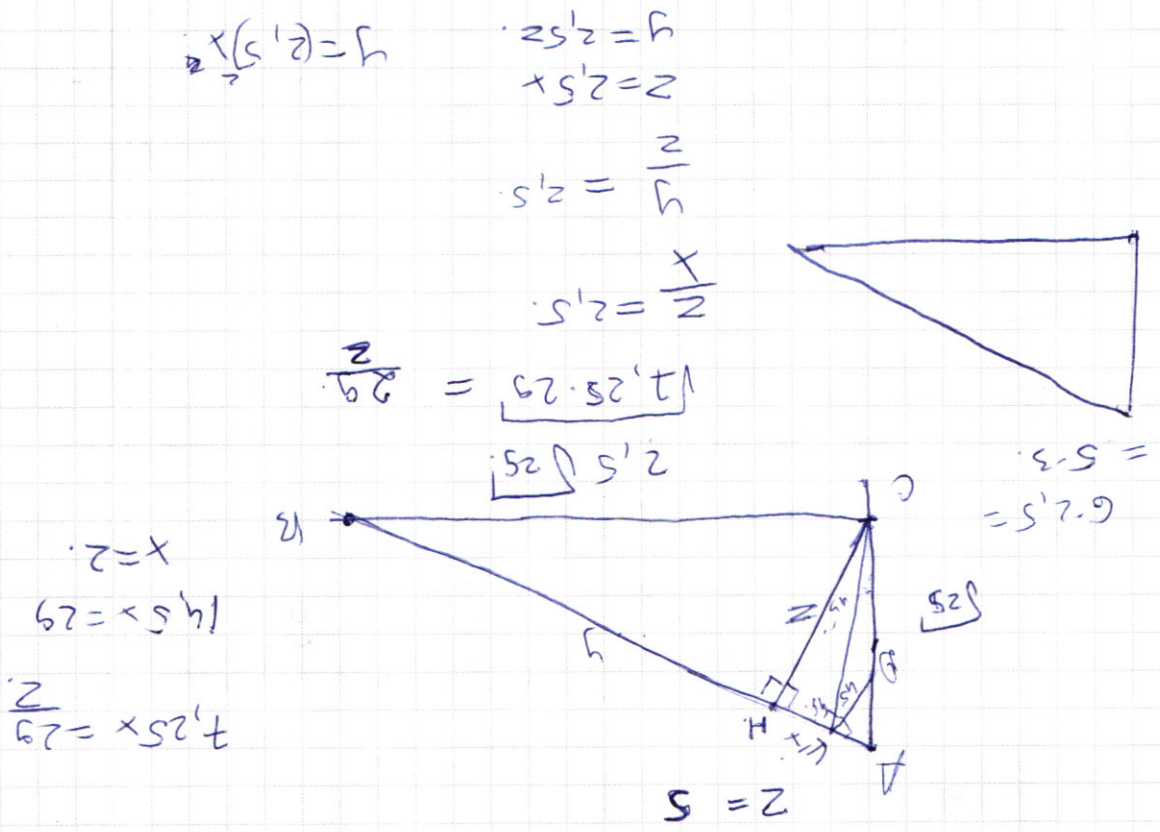
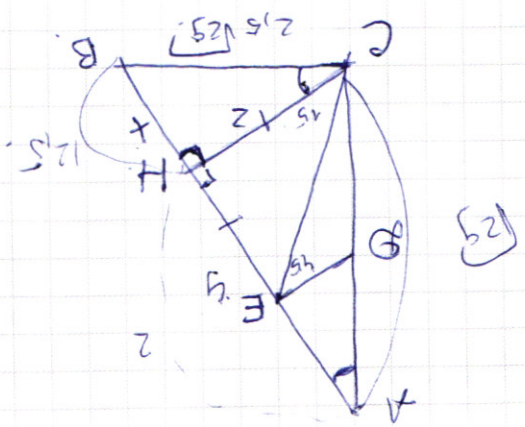
$$= 29 \cdot 29 = 52 \cdot \frac{4}{29} = \frac{2}{29}$$

$$\frac{x}{z} = 2,5$$

$$x = 2,5z$$

$$\frac{y}{z} = 2,5$$

$$y = (2,5)z$$



$$x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0.$$

$$x^2 + y^2 \leq 2x + 3y.$$

$$x^2 + y^2 \leq 2x + 3y$$

~~x > 2~~

$$x \leq 2$$

$$y \leq 3$$

$$0 \leq 2x + 3y.$$

$$-2x \leq 3y$$

$$-x \leq 1.5y.$$

$$18x^2 - 36x + 8y^2 + 24y + 12xy > 0.$$

$$18x$$

$$3i \quad 9x^2 + 4y^2 + (6 - 3x - 2y)^2 > 36.$$

$$9x^2 + 4y^2 + 36 - 36x - 24y + 9x^2 + 4y^2 + 36x + 24y + 12xy - 36x - 24y + 12xy$$

$$18x^2 + 8y^2 + 12xy > 36x + 24y.$$

$$x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0$$

$$2 \cdot \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 12.$$

$$18x^2 + 8y^2 + 12xy - 36x - 24y > 0.$$

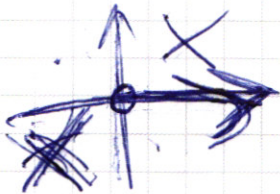
$$9x^2 + 4y^2 + 6xy - 18x - 12y > 0$$

$$9x(x - 2) + 6y(2x - 2) + 4y^2 > 0.$$

$$(x - 2)(9x + 6y) + 4y^2 > 0.$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 3y = 0.$$

$$3x + 2y + 6 - 3x - 2y = 6$$



$$9x^2 + 4y^2 + 6xy - 18x - 12y > 0$$

$$-3x$$

$$x > 0$$

$$y > 0.$$

$$\frac{h \cdot h}{2} = \frac{h^2}{2}$$

$$0 = \frac{h \cdot h}{2} + \frac{h \cdot h}{2} = h^2$$

$$h - h = 0$$

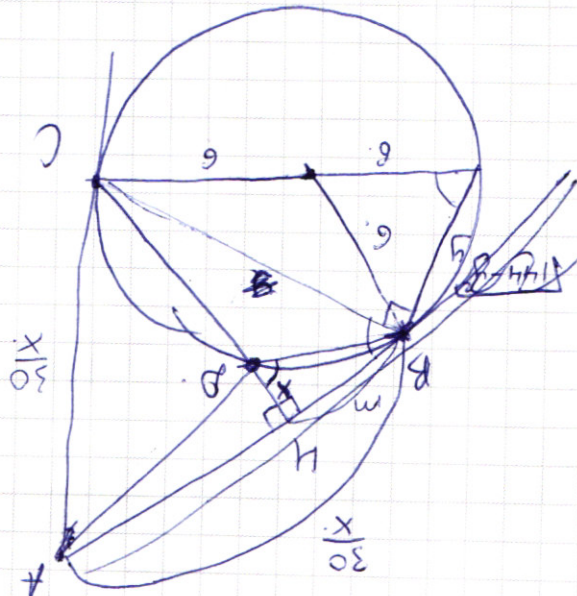
$$= \frac{h \cdot h}{2} = \frac{h^2}{2}$$

$$\frac{h \cdot h}{2} = \frac{h^2}{2}$$

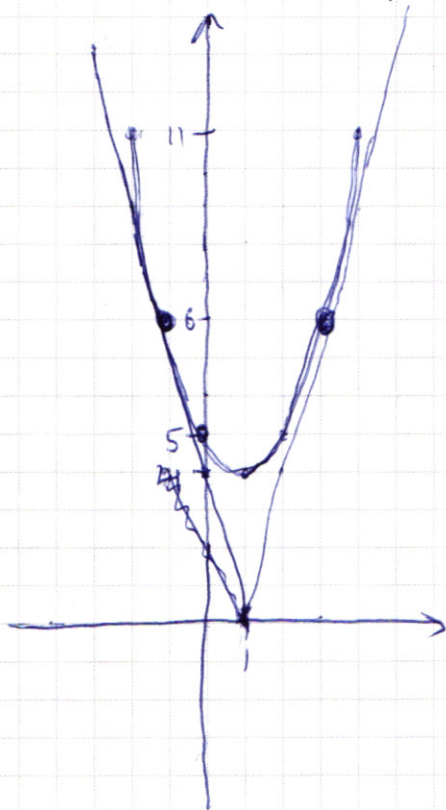
$$\frac{x}{5} = \frac{x}{5}$$

$$= 12: \frac{x}{5}$$

$$HO \cdot AB = 30.$$



$f_1(x) = 4|x-1| = 4(x-1) \Rightarrow$ в т. $x_0=3$. $f_2(x)$ - касательная к графику функции $f_1(x)$.
рассмотрим график.



Тогда $f_1(x) \geq f_2(x)$
для $x \in \mathbb{R}$ ~~и~~ $x \geq 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|$
 ≥ 0 . при $x \geq 1$.
но т.к. $f_1(x)$ и $f_2(x)$ симметричны
прямой $x=1$, то $f_2(x)$ касательная
к $f_1(x)$ в т. $x=-1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x^2 - 2x + 5 - 4|x-1| \geq 0$
для $x \in \mathbb{R}$. ~~любого~~ $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 - 12x + |x| \cdot |x-3|$ должно
быть ≤ 0 , это неравенство выполнилось.

~~рассмотрим участок от 0 до~~
тогда это эквивалентно

$$4x^2 + |x| |x-3| < 12x$$

$$1) \quad 4x^2 + x^2 - 3x < 12x$$

$$5x^2 - 15x < 0$$

$$+ \quad x(x-3) < 0$$

$$x \in (0; 3)$$

Ответ: $x \in (0; 3)$.

$$2) \quad 4x^2 - x^2 + 3x < 12x$$

$$3x^2 - 9x < 0$$

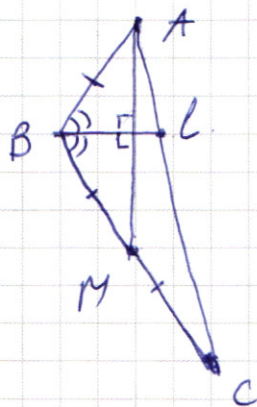
$$+ \quad x(x-3) < 0$$

$$x \in (0; 3)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

Пусть ABC - остроугольный треугольник, AM - медиана
и BL - биссектриса: $AM \perp BL$.



1) Тогда $\triangle ABM$: $AB = BM$, т.к.
 BL - бис. и AM - высота.

2) $AB + BM + MC = 3x \Rightarrow$
 $\Rightarrow AC = y. \Rightarrow 300 = 3x + y.$

3) по нер-ству \triangle .

$$x + y > 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y > x \Rightarrow 300 - 3x > x \Rightarrow 75 > x \Rightarrow 225 > 3x$$

$$3x > y \Rightarrow 3x > 300 - 3x \Rightarrow x > 50 \Rightarrow 3x > 150.$$

$$\Rightarrow 225 > 3x > 150, \& \Rightarrow 75 > x > 50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in [74, 51], x \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{вариантов } x = 74 - 51 + 1 = 24.$$

Ответ: 24.

№1.

Рассмотрим выражение $x^2 - 2x + 5 - 4|x-1|$
пусть $f_1(x) = x^2 - 2x + 5$, а $f_2(x) = 4|x-1|$.

найдем кас. к $f_1(x)$ в т. $x = 3$.

$$\text{пусть кас.} = g(x) = f_1'(3) \cdot (x-3) + f_1(3) =$$

$$= 4(x-3) + 8 = 4x - 4 = 4(x-1) \text{ при } x \geq 1$$