МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $BC=\sqrt{29}$, $AC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED = 45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\le 0$$

ОДЗ: $4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|\ne 0$

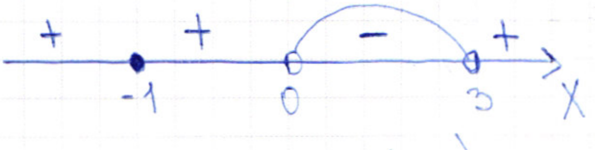
I случай $(x<0)$:

$$\frac{x^2-2x+5-4(1-x)}{4x^2-12x+(-x)(3-x)}\le 0$$

$$\frac{x^2-2x+5-4+4x}{4x^2-12x-3x+x^2}\le 0$$

$$\frac{x^2+2x+1}{5x^2-15x}\le 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{5x(x-3)}\le 0$$



$x=-1$ и $x\in(0;3)$, но $x<0 \Rightarrow$ $x=-1$

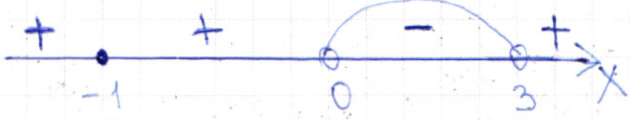
II случай $(x\in[0;1])$:

$$\frac{x^2-2x+5-4(1-x)}{4x^2-12x+x\cdot(3-x)}\le 0$$

$$\frac{x^2-2x+5-4+4x}{4x^2-12x+3x-x^2}\le 0$$

$$\frac{x^2+2x+1}{3x^2-9x}\le 0$$

$$\frac{(x+1)^2}{3x(x-3)} \le 0$$



$x=-1$ и $x\in(0;3)$, но $x\in[0;1) \Rightarrow x\in(0;1)$

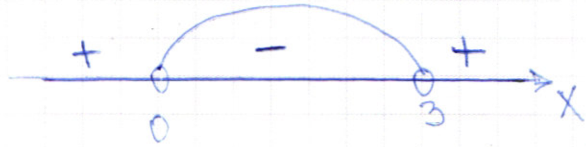
III случай $(x\in[1;3))$:

$$\frac{x^2-2x+5-4(x-1)}{4x^2-12x+x\cdot(3-x)} \le 0$$

$$\frac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x+3x-x^2} \le 0$$

$$\frac{x^2-6x+9}{3x^2-9x} \le 0$$

$$\frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} \le 0$$



$x\in(0;3)$, но $x\in[1;3) \Rightarrow x\in[1;3)$

IV случай $(x\ge 3)$:

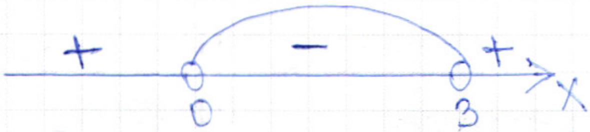
$$\frac{x^2-2x+5-4(x-1)}{4x^2-12x+x\cdot(x-3)} \le 0$$

$$\frac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x+x^2-3x} \le 0$$

$$\frac{x^2-6x+9}{5x^2-15x} \le 0$$

$$\frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} \le 0$$

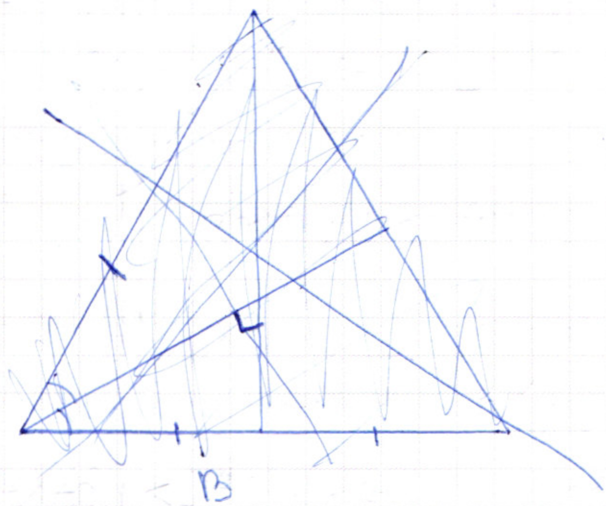
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

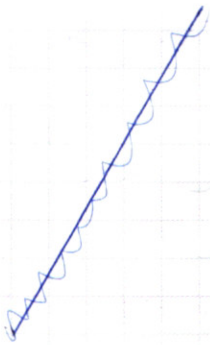


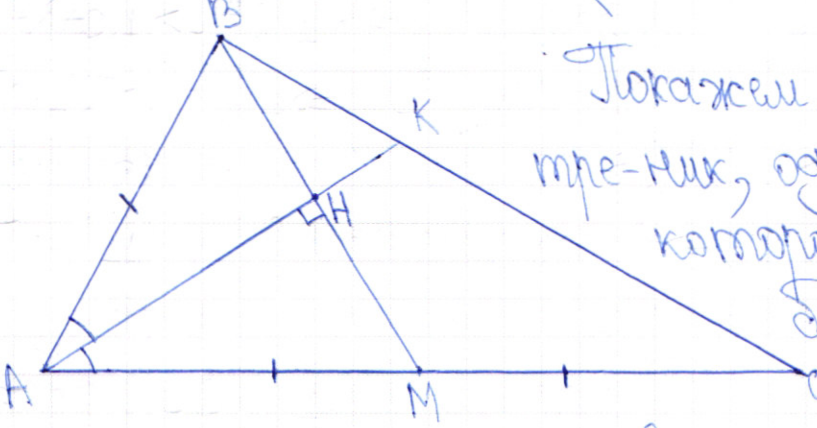
$x \in (0;3)$, но $x \geq 3 \Rightarrow$ в этом случае реш. нет

Ответ: $x \in (0;3) \cup \{-1\}$.

№2.

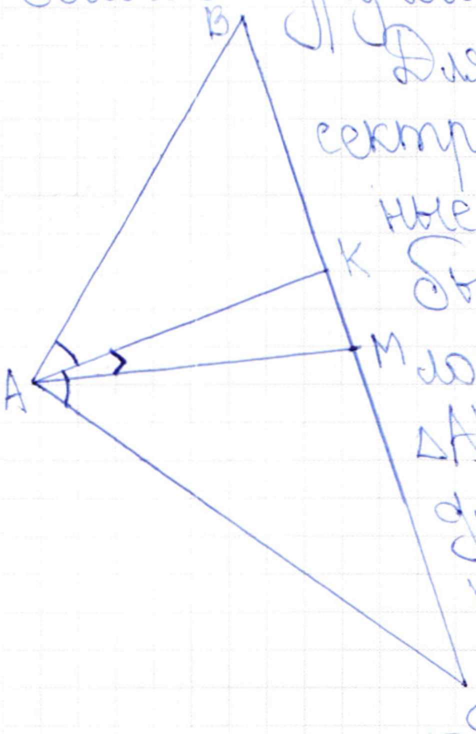




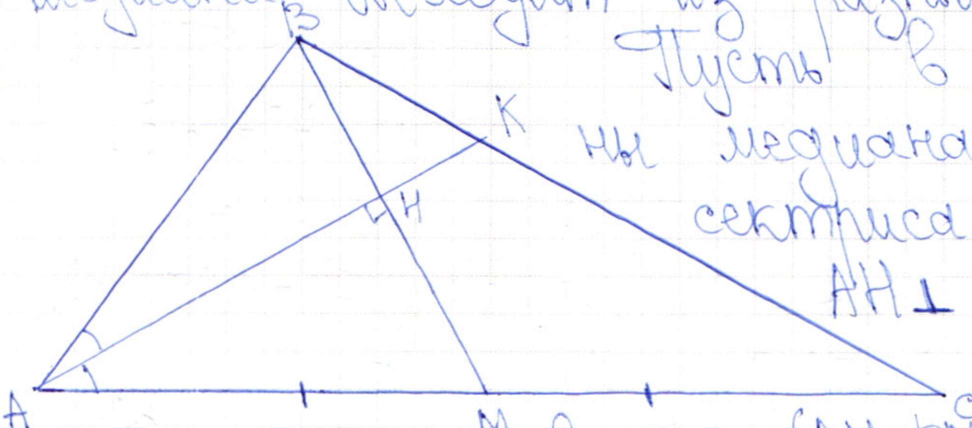


Покажем, что любой тре-ник, одна из сторон которого в 2 раза больше другой, подходит. Пусть у нас есть ΔABC, в котором $AC=2AB$, BM-медиана, AK-биссектриса, $AK \cap BM = H$. Так как $AC=2AB$ и $AC=2AM$ (BM-медиана), но $AM=AB \Rightarrow \Delta MAB$-р/б, в нём AH-биссектриса $\Rightarrow$ AH-высота в ΔMAB (т.к. ΔMAB-р/б) $\Rightarrow$ условие задачи выполнено.

Покажем, что если условие задачи выполнено, то в нём одна сторона в 2 раза больше другой.



Для начала покажем, что биссектриса и медиана, проведённые из 1 вершины, не могут быть перпендикулярны. Предположим противное. Пусть в $\triangle ABC$ AK - биссектриса и AM - медиана и $AM \perp AK \Rightarrow \angle KAM = 90°$. Но тогда не умаляя общности, будем считать, что т. M находится между C и K (в противном случае можно просто поменять точки B и C местами) $\Rightarrow \angle BAC > \angle BAK + \angle KAM$ (т.к. K и M лежат на BC) $\Rightarrow \angle BAC > \frac{1}{2}\angle BAC + 90° \Rightarrow \frac{1}{2}\angle BAC > 90° \Rightarrow \angle BAC > 180°$, но это невозможно. Противоречие $\Rightarrow$ биссектриса и $\perp$ ей медиана выходят из разных вершин.



Пусть в $\triangle ABC$ проведены медиана BM и биссектриса AK, $AK \cap BM = H$, $AH \perp BM$. Тогда в $\triangle BAM$ AH - биссектриса и высота ($AH \perp BM$) $\Rightarrow \triangle BAM$ - р/б $\Rightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow AB = AM = \frac{1}{2}AC \Rightarrow AC = 2AB$.

Таким образом, нам необходимо посчитать число тре-ников с периметром 300 и целочисленными сторонами, в которых есть 1 сторона, которая больше другой в 2 раза. Пусть у нашего тре-ника стороны $a, 2a, b$. Тогда для того, чтобы такой тре-ник существовал:

$a + 2a > b \Rightarrow b < 3a$

$a + b > 2a \Rightarrow b > a$

$2a + b > a \Rightarrow b > -a$ (выполнено т.к. $b > 0$ и $a > 0$)

При этом периметр $= 300 \Rightarrow b = 300 - a - 2a = 300 - 3a$

$300 - 3a < 3a$ | $300 - 3a > a$
$6a > 300$ | $4a < 300$
$a > 50$ | $a < 75$

$a \in [51; 74]$ (т.к. a — целое).

Заметим, что если мы выбрали a, то мы однозначно задали 3 стороны в тре-нике (т.к. они равны $a, 2a, 300 - 3a$) $\Rightarrow$ мы однозначно задали тре-ник. Также если $a \in [51; 74]$, то данный тре-ник существует, так как выполнено нер-во треугольника.

Значит у нас есть $74-51+1=24$ возможно-сти для a, однако некоторые тре-ники мы могли учесть дважды. Тогда у нас у 2 тре-ников все стороны оказались равны $\Rightarrow$ сторона a какого-то тре-ника (назовём её a_1) оказалось равна какой-то стороне другого тре-ника (отметим, что это необходимое, но не достаточное условие равенства тре-ников). Возможны 2 случая:

$a_1 = 2a_2$ (где a_2 - сторона „a" 2 тре-ника)

но $a_2 \geq 51 \Rightarrow 2a_2 \geq 102$, но $a_1 \leq 74 \Rightarrow$ этот случай невозможен.

$a_1 = 300 - 3a_2$

$a_2 \geq 51 \Rightarrow 3a_2 \geq 153 \Rightarrow -3a_2 \leq -153 \Rightarrow 300-3a_2 \leq 147$

$a_2 \leq 74 \Rightarrow 3a_2 \leq 222 \Rightarrow -3a_2 \geq -222 \Rightarrow 300-3a_2 \geq 78 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 \geq 78$, но $a_1 \leq 74$. Противоречие $\Rightarrow$ один a_1 тре-ник мы 2 раза учесть не могли.

Ответ: 24.

№3.

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$$

ОДЗ: $xy \geq 0$

$y-2x=\sqrt{xy} \Rightarrow y-2x \geq 0 \Rightarrow y \geq 2x$

$y-2x=\sqrt{xy}$ (л.ч. и пр.ч. $\geq 0 \Rightarrow$ возведение в квадрат является равносильным преобразованием)

$y^2-4xy+4x^2=xy$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y^2-5xy+4x^2=0$

I случай ($y=0$):

$4x^2=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0$

$2y+x^2=9 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$ – противоречие $\Rightarrow$ $y\neq 0$

II случай ($y\neq 0$):

$y^2-5xy+4x^2=0 \quad |:y^2 \neq 0$ (т.к. $y^2\neq 0$ т.к. $y\neq 0$)

$1-\frac{5x}{y}+\frac{4x^2}{y^2}=0$

Пусть $\frac{x}{y}=t$.

$4t^2-5t+1=0$

$D=25-4\cdot 4=9$

$t_1=\frac{5+\sqrt{9}}{8}=\frac{8}{8}=1 \Rightarrow \frac{x}{y}=1 \Rightarrow x=y$

$t_2=\frac{5-\sqrt{9}}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\frac{y}{4} \Rightarrow y=4x$

I случай ($x=y$):

$x^2+2x=9$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$x^2+2x-9=0$

$D=4+4\cdot9=40$

$x_1=\frac{-2+\sqrt{40}}{2}=\frac{-2+2\sqrt{10}}{2}=\sqrt{10}-1 \Rightarrow y=\sqrt{10}-1$, но $y\geq 2x=2\sqrt{10}-2>\sqrt{10}-1$ (т.к. $\sqrt{10}>1$) $\Rightarrow$ $x=y=\sqrt{10}-1$ не явл. реш.

$x_2=\frac{-2-\sqrt{40}}{2}=\frac{-2-2\sqrt{10}}{2}=-\sqrt{10}-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=-\sqrt{10}-1$

Подставим $x=y=-\sqrt{10}-1$, чтобы проверить, что это явл. решением:

$$\left.\begin{aligned}
&y-2x=-\sqrt{10}-1-2\cdot(-\sqrt{10}-1)=-\sqrt{10}-1+2\sqrt{10}+2=\sqrt{10}+1\\
&\sqrt{xy}=\sqrt{(-\sqrt{10}-1)(-\sqrt{10}-1)}=\sqrt{(-\sqrt{10}-1)^2}=|-\sqrt{10}-1|=\sqrt{10}+1\\
&x^2+2y=(-\sqrt{10}-1)^2+2(-\sqrt{10}-1)=10+\cancel{2\sqrt{10}}+1-\cancel{2\sqrt{10}}-2=9
\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow x=y=-\sqrt{10}-1$ – решение.

II случай $(y=4x)$:

$2y+x^2=9$

$x^2+8x=9$

$x^2+8x-9=0$

$$\left[\begin{aligned}&x=-9 \Rightarrow y=4\cdot(-9)=-36, \text{ но } y\geq 2x, \text{ а } -36<-18 \Rightarrow \text{этот случай не возможен}\\ &x=1 \Rightarrow y=4\cdot1=4\end{aligned}\right.$$

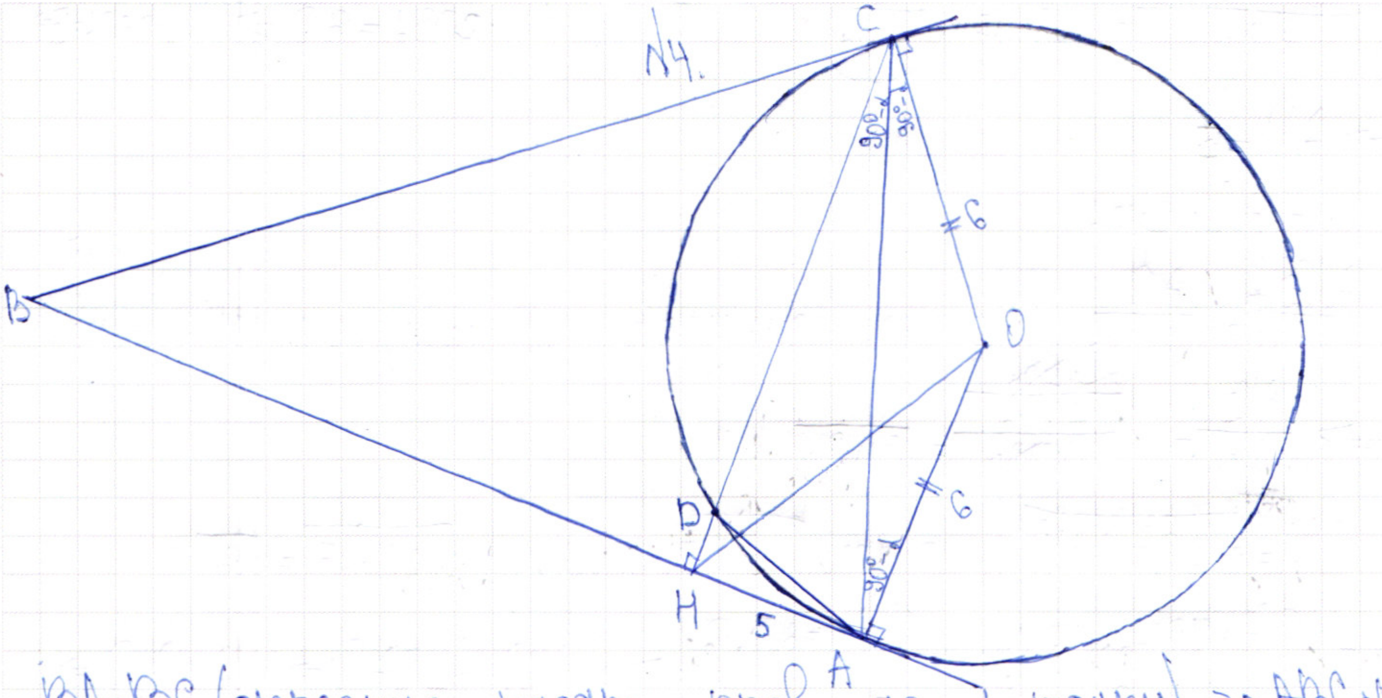
Подставим $x=1$ и $y=4$:

$$\left.\begin{aligned}
&y-2x=4-2=2\\
&\sqrt{xy}=\sqrt{4\cdot1}=2\\
&2y+x^2=1+2\cdot4=9
\end{aligned}\right\}\Rightarrow x=1 \text{ и } y=4 \text{ – решение.}$$

Ответ: $(-\sqrt{10}-1; -\sqrt{10}-1)$ и $(1;4)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



$BA=BC$ (отрезки касат., пров. из 1 точки) $\Rightarrow \triangle ABC$ - р/б $\Rightarrow \angle BAC=\angle BCA$. Пусть $\angle BAC=\angle BCA=\alpha$. Тогда $\angle HCA=90^\circ-\alpha$ (т.к. $\angle CHA=90^\circ$) $\Rightarrow \angle HAD=90^\circ-\alpha$ (т.к. BA - кас. и угол между кас. и хордой равен впис., опир. на эту хорду) $\Rightarrow \angle HDA=\alpha \Rightarrow HD=AH\cdot\operatorname{ctg}\alpha$. При этом $\angle BAC=\alpha \Rightarrow AH=AC\cdot\cos\alpha \Rightarrow HD=\frac{AC\cdot\cos\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{AC\cdot\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$.

$S_{ABD}=15$ (усл.) $\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot DH\cdot AB=15 \Rightarrow HD\cdot AB=30$. Также $\frac{AB}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin(180^\circ-2\alpha)}$ (по т. синусов для $\triangle ABC$ и т.к. $\angle ABC=180^\circ-\alpha-\alpha=180^\circ-2\alpha$) $\Rightarrow \frac{AB}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin 2\alpha}$ (т.к. $\sin(180^\circ-x)=\sin x$) $\Rightarrow \frac{AB}{\sin\alpha}=\frac{AC}{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$ ($\sin\alpha\neq 0$ т.к. $\alpha\in(0;90^\circ)$) $\Rightarrow AB=\frac{AC}{2\cos\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow HD\cdot AB=\frac{AC\cdot\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{AC}{2\cos\alpha}=\frac{AC^2\cdot\cos\alpha}{2\sin\alpha}=\frac{1}{2}AC^2\cdot\operatorname{ctg}\alpha=30 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AC^2\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha}=60$.

Т.к. BA - кас., то $\angle OAB=90^\circ \Rightarrow \angle OAC=90^\circ-\alpha=\angle ACO$ (т.к.

OA = OC как радиусы) $\Rightarrow \angle AOC = 2\alpha \Rightarrow \frac{6}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{AC}{\sin 2\alpha}$ (по т. синусов для $\triangle AOC$) $\Rightarrow \frac{6}{\cos\alpha} = \frac{AC}{2\sin\alpha\cos\alpha}$ ($\cos\alpha \neq 0$ т.к. $\alpha \in (0; 90^\circ)$) $\Rightarrow AC = 12\sin\alpha \Rightarrow \frac{AC}{\sin\alpha} = 12.$

$\frac{AC^2 \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha} = 60 \Rightarrow \frac{AC}{\sin\alpha} \cdot$ ~~[illegible]~~ $AC \cdot \cos\alpha = 60 \Rightarrow AC \cdot \cos\alpha = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow AH = 5$

$CH = AC \cdot \sin\alpha$

$\frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin 2\alpha}$ (по т. синусов и т.к. $\sin(180^\circ - 2\alpha) = \sin(2\alpha)$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AB}{CH} = \frac{\frac{AC \cdot \sin\alpha}{\sin 2\alpha}}{AC \cdot \sin\alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha}$

$OH = \sqrt{AO^2 + AH^2}$ (по т. Пифагора) $= \sqrt{36+25} = \sqrt{61}$

$\angle HCA = 90^\circ - \alpha$ (т.к. $\angle BAC = \alpha$)

$\angle CAO = 90^\circ - \alpha$.

$\Rightarrow \angle HCA = \angle CAO \Rightarrow HC \parallel AO$ (признак) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CHO = \angle HOA \Rightarrow \sin\angle CHO = \sin\angle HOA$ $\Rightarrow \sin\angle CHO = \frac{5}{\sqrt{61}}$

$\sin\angle HOA = \frac{AH}{HO} = \frac{5}{\sqrt{61}}$

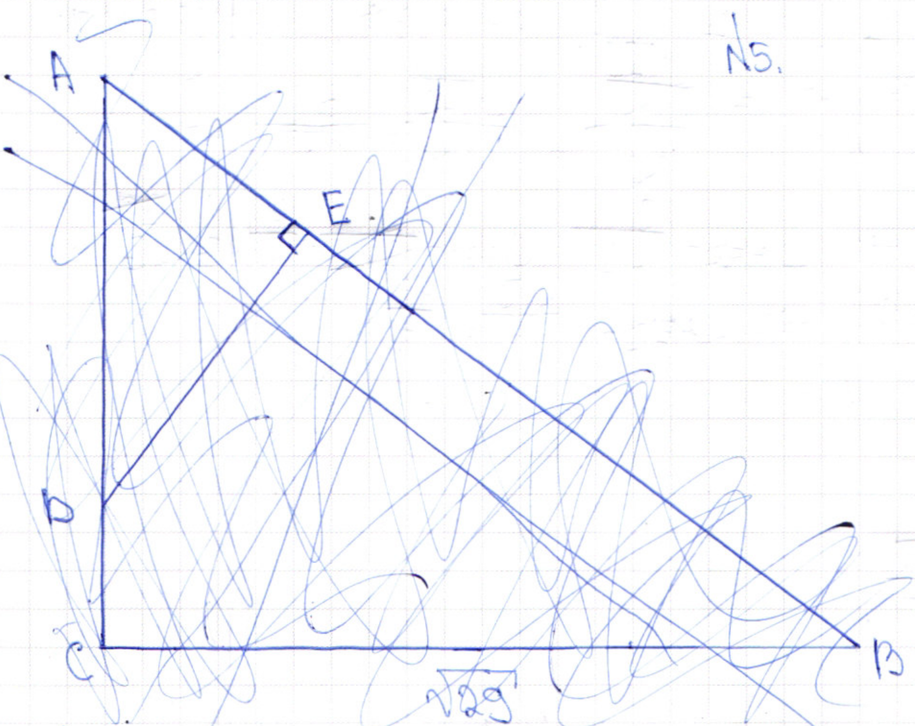
$\frac{CO}{\sin\angle CHO} = \frac{HO}{\sin(180^\circ - 2\alpha)}$ (по т. синусов) $= \frac{HO}{\sin 2\alpha}$ (т.к. $\sin(180^\circ - x) = \sin x$) $\Rightarrow$

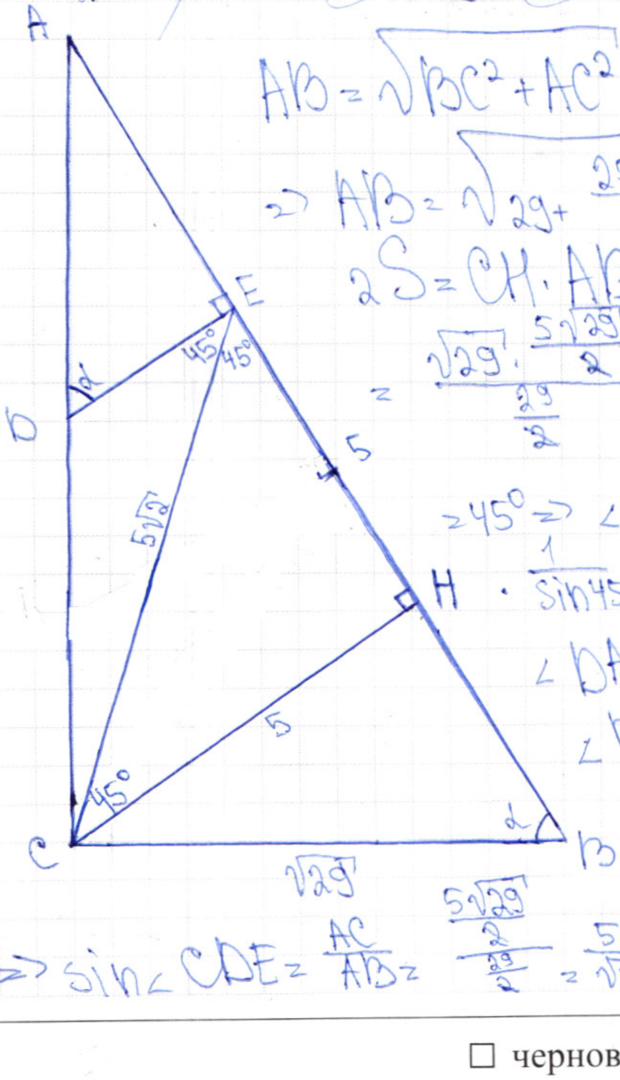
$\Rightarrow \frac{6}{\frac{5}{\sqrt{61}}} = \frac{\sqrt{61}}{\sin 2\alpha} \Rightarrow \frac{6\sqrt{61}}{5} = \frac{\sqrt{61}}{\sin 2\alpha} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{AB}{CH} = \frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{6}{5}.$

Ответ: $\frac{6}{5}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.





$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2}$ (по т. Пифагора) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AB = \sqrt{29 + \frac{25 \cdot 29}{4}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 29 + 25 \cdot 29}{4}} = \sqrt{\frac{29^2}{4}} = \frac{29}{2}$

$2S = CH \cdot AB = BC \cdot AC \Rightarrow CH = \frac{BC \cdot AC}{AB} =$

$= \frac{\sqrt{29} \cdot \frac{5\sqrt{29}}{2}}{\frac{29}{2}} = \frac{5 \cdot 29}{29} = 5 \Rightarrow EH = 5$ (т.к. $\angle CEH = 45° \Rightarrow \angle ECH = 45° \Rightarrow EH = CH$) $\Rightarrow EC = EH \cdot \frac{1}{\sin 45°} = EH \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

$\left.\begin{array}{l}\angle DAE = \angle BAC \\ \angle DEA = \angle BCA = 90°\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AED \sim \Delta ACB \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CBA = \angle ADE \Rightarrow \sin\angle CBA = \sin\angle CDE$ (т.к. синусы смежных углов равны) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\angle CDE = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{5\sqrt{29}}{2}}{\frac{29}{2}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$

$\frac{CD}{\sin 45^\circ} = \frac{CE}{\frac{5}{\sqrt{29}}}$ (по т. синусов) $\Rightarrow \sqrt{2}\,CD = \frac{5\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{29}}{5} \Rightarrow CD = \sqrt{29} \Rightarrow$

$\Rightarrow AD = AC - CD = \frac{5\sqrt{29}}{2} - \sqrt{29} = \frac{3\sqrt{29}}{2}$.

$\frac{AD}{AB} = k$ (т.к. $\triangle AED \sim \triangle ACB$ (k - коэф. подобия этих тре-ников)) $\Rightarrow k = \frac{\frac{3\sqrt{29}}{2}}{\frac{29}{2}} = \frac{3\sqrt{29}}{29} = \frac{3}{\sqrt{29}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{S_{AED}}{S_{ACB}} = k^2 = \frac{9}{29} \Rightarrow S_{AED} = \frac{9}{29} \cdot S_{ABC} = \frac{9}{29} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{29}{2}$

(т.к. $S = \frac{1}{2} \cdot CH \cdot AB$) $\Rightarrow S_{AED} = \frac{9\cdot 5}{4} = \frac{45}{4}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{\frac{3\sqrt{29}}{2}}{\frac{5\sqrt{29}}{2}} = \frac{3}{5}$

Ответ: $\frac{3}{5}$ и $\frac{45}{4}$.

№6.

$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y| \overset{>}{\le} 6 \\ x^2-2x-3y+y^2 \le 0 \end{cases}$

$6-3x-2y=0$

$2y=6-3x$

$y=\frac{6-3x}{2}$

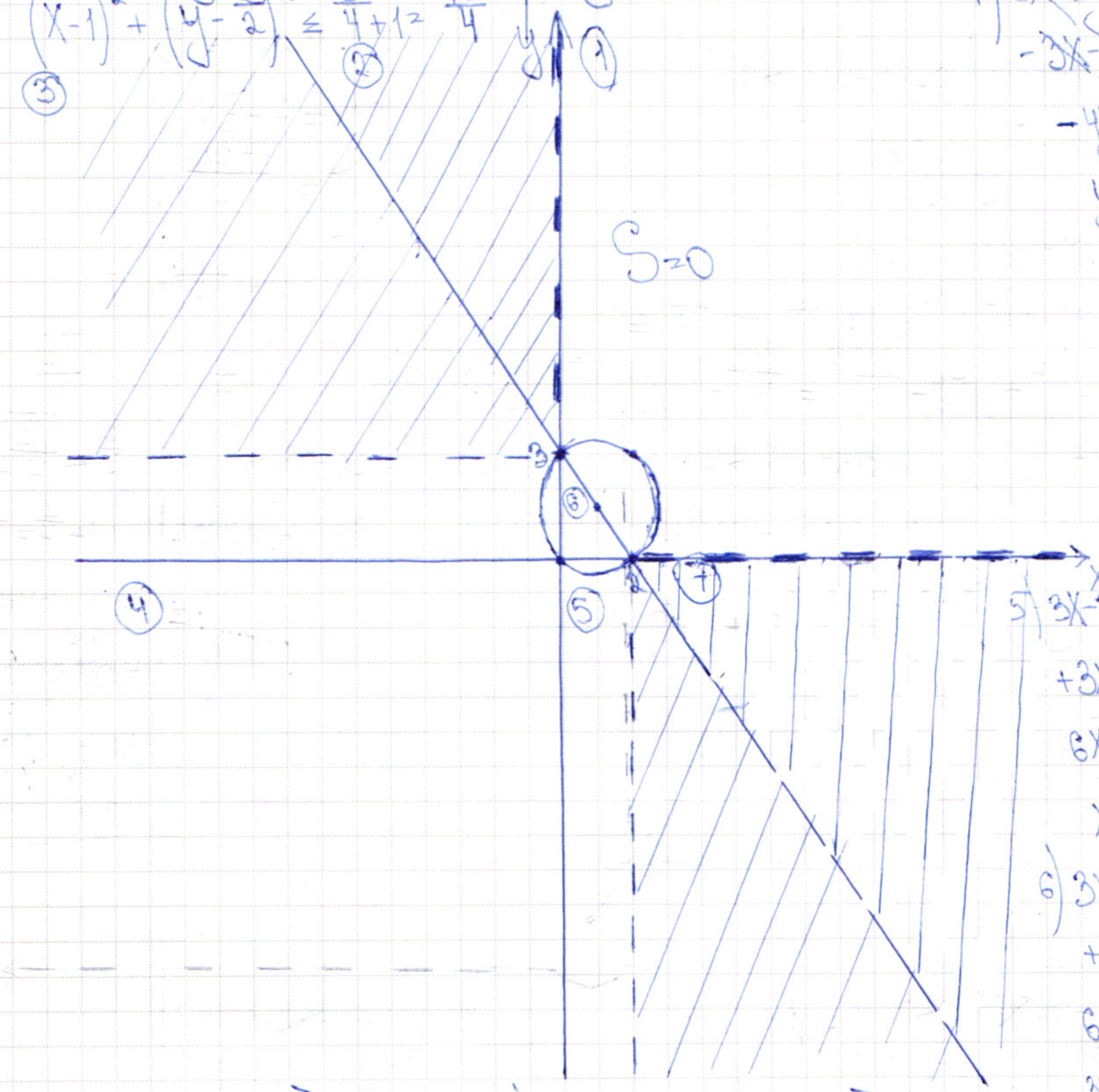
$x^2-2x-3y+y^2 \le 0$

$(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2 \le \frac{9}{4}+1=\frac{13}{4}$

7) $3x-2y+6-3x-2y>6$

$-4y>0$

$y<0$



5) $3x-2y-6+3x+2y>6$

$6x>12$

$x>2$

6) $3x+2y-6+3x+2y>6$

$6x+4y>12$

$3x+2y>6$

$2y>6-3x$

$y>\frac{6-3x}{2}$

1) $3x+2y+6-3x-2y \overset{>}{\le} 6$

$6 \overset{>}{\le} 6$ – ложь $\forall\ x, y$

2) $-3x+2y+6-3x-2y<6$

$-6x \overset{>}{\le} 0$

$x<0$

3) $-3x+2y-6+3x+2y \overset{>}{\le} 6$

$4y \overset{>}{\le} 12$

$y>3$

4) $-3x-2y-6+3x+2y>6$

$-6>6$ – ложь $\forall\ x, y$

Ответ: 0.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$$\begin{cases}|3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6\\ x^2-2x-3y+y^2\le 0\end{cases}$$

$6-3x-2y=0$

$2y=6-3x$

$y=\frac{6-3x}{2}$

$x=1:\ y=\frac{6-3}{2}=\frac{3}{2}$

$x^2-2x-3y+y^2\le 0$

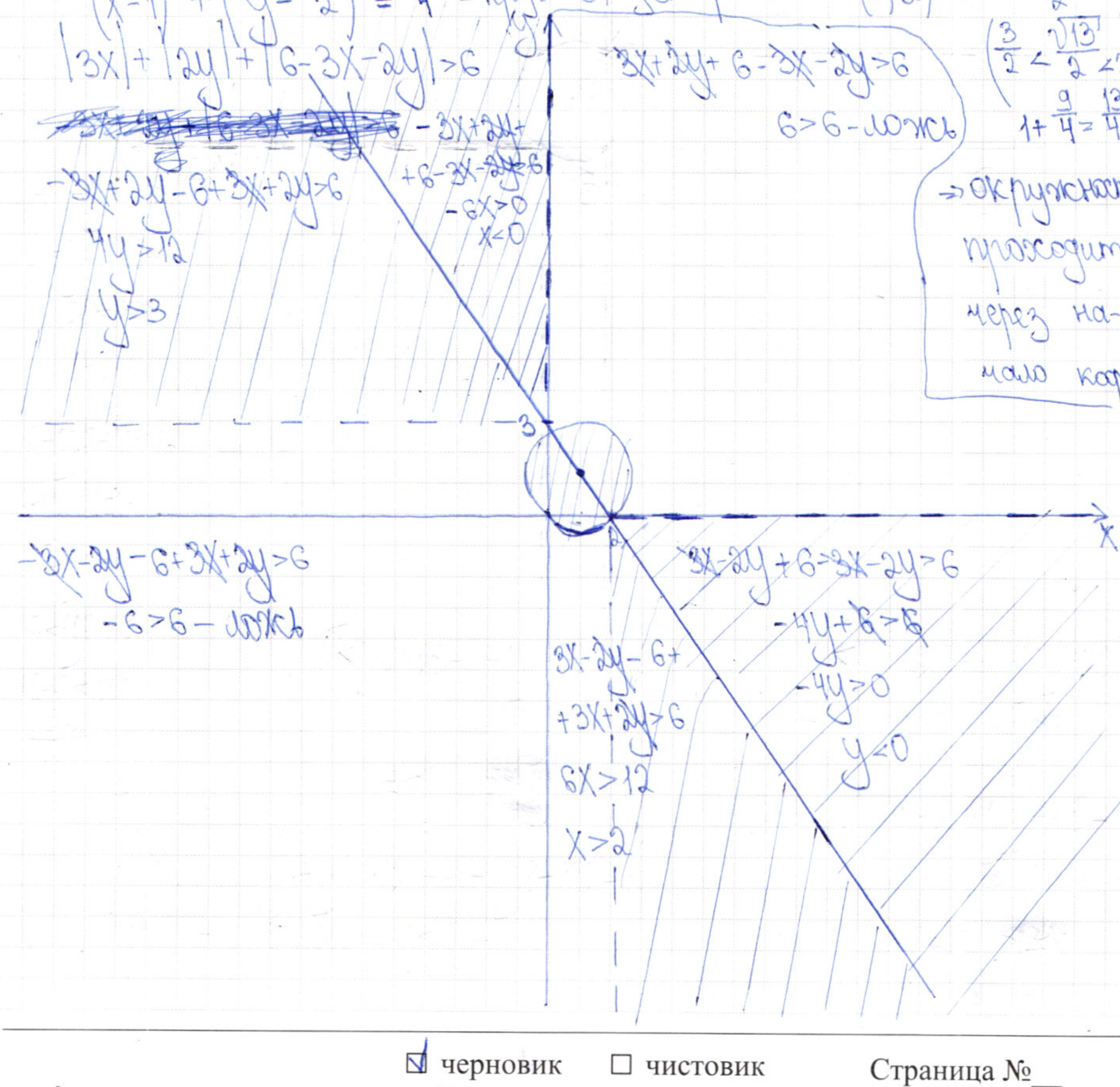
$x^2-2x+1+y^2-3y+\frac{9}{4}-\frac{13}{4}\le 0$

$(x-1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2\le\frac{13}{4}$ – круг с центром в $\left(1;\frac{3}{2}\right)$ и $r=\frac{\sqrt{13}}{2}$

$\left(\frac{3}{2}<\frac{\sqrt{13}}{2}<2\right)$

$1+\frac{9}{4}=\frac{13}{4}\Rightarrow$ окружность проходит через начало коорд.

$|3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6$



~~$3x+2y+6-3x-2y>6$~~

$-3x+2y+6-3x-2y>6$

$-6x>0$

$x<0$

$-3x+2y-6+3x+2y>6$

$4y>12$

$y>3$

$3x+2y+6-3x-2y>6$

$6>6$ – ложь

$-3x-2y-6+3x+2y>6$

$-6>6$ – ложь

$3x-2y+6-3x-2y>6$

$-4y+6>6$

$-4y>0$

$y<0$

$3x-2y-6+3x+2y>6$

$6x>12$

$x>2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{6}{\frac{5}{13}} = \frac{6\cdot 13}{5} =$ $\quad x = \frac{12+\sqrt{119}}{2}$

$144-25=119$

$\sin(2\alpha-\beta) = \frac{5}{12}\cdot\frac{12}{13} + \frac{\sqrt{119}}{12}\cdot\frac{5}{13} =$

$= \frac{x\cdot \cancel{12}\cdot 13}{5(12+\sqrt{119})}$ $\quad \frac{2x}{12+\sqrt{119}} = 1$

$= \frac{5}{13}\left(1+\frac{\sqrt{119}}{12}\right) = \frac{5(12+\sqrt{119})}{156}$

$\cos 2\alpha = -\sqrt{1-\frac{25}{144}} = -\frac{\sqrt{119}}{12}$

$f(ab) = f(a)+f(b)$

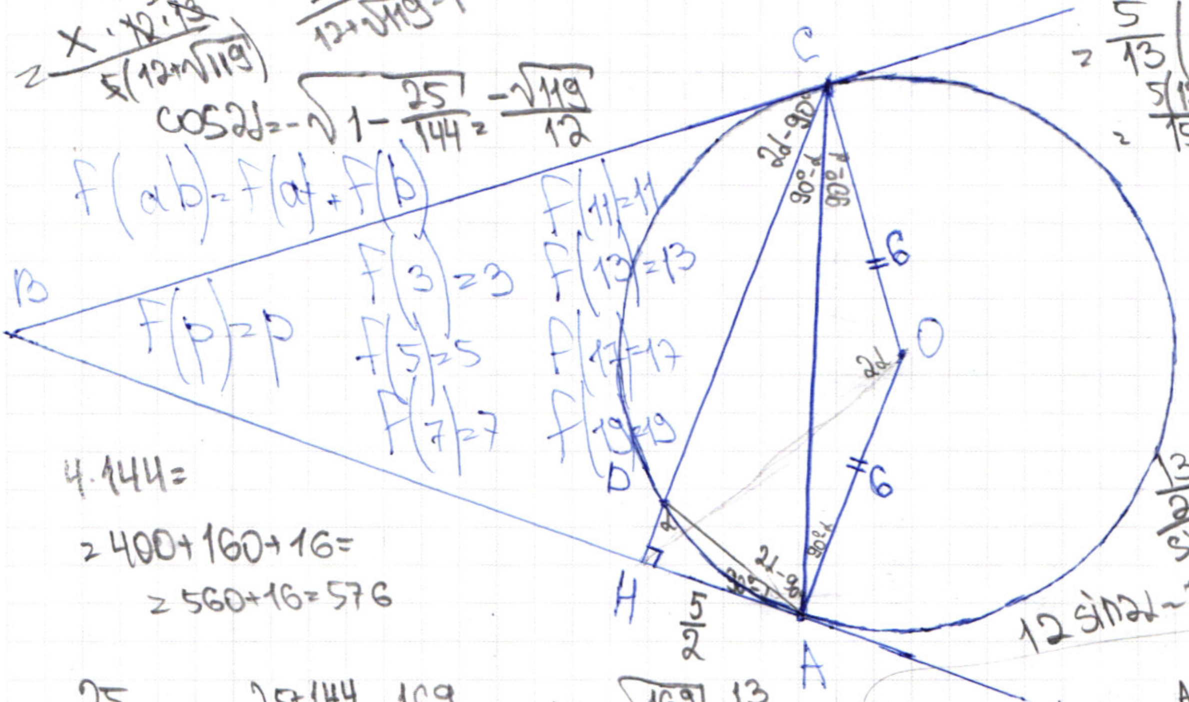
$f(p)=p$

$f(3)=3$ $\quad f(11)=11$

$f(5)=5$ $\quad f(13)=13$

$f(7)=7$ $\quad f(17)=17$

$f(19)=19$



$\frac{12}{13}$ $\quad \frac{5}{13}$

$4\cdot 144 =$

$= 400+160+16=$

$= 560+16=576$

$\frac{\frac{13}{2}}{\sin 2\alpha} = \frac{13}{2\sin 2\alpha} = \frac{6\cdot\frac{13}{2}}{\frac{5}{2}}$

$12\sin 2\alpha = 5$ $\quad \frac{5}{12}$ $\quad = \frac{6\cdot 13}{5}$

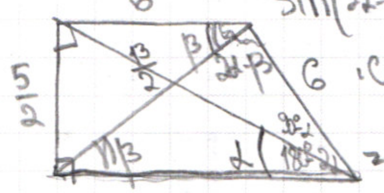
$\frac{25}{4}+36 = \frac{25+144}{4} = \frac{169}{4} \Rightarrow OH = \sqrt{\frac{169}{4}} = \frac{13}{2}$

$HD = AH\cdot ctg\alpha = \frac{AC\cdot\cos\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha} =$

$AH = AC\cdot\cos\alpha$ $\quad = \frac{AC\cdot\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$

$36\cdot 4 = 120+24 = 144$

$\sin(2\alpha-\beta) = \sin 2\alpha\cdot$



$6 \cdot\cos\beta - \sin\beta\cdot\cos 2\alpha =$

$\frac{AB}{\cancel{\sin\alpha}} = \frac{AC}{\sin(180^\circ-2\alpha)} = \frac{AC}{\sin 2\alpha} = \frac{AC}{2\cancel{\sin\alpha}\cos\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = \frac{AC}{2\cos\alpha}$

$\frac{1}{2}\cdot AB\cdot DH = 15$

$AB\cdot DH = 30 = \frac{AC}{2\cancel{\cos\alpha}}\cdot\frac{AC\cdot\cos^2\alpha}{\sin\alpha} =$

$\frac{\frac{13}{2}}{\sin 2\alpha} = \frac{6}{\sin\beta} = \frac{6}{\frac{5}{2}:\frac{13}{2}} = \frac{6\cdot 13}{5}$

$= \frac{AC^2}{2}\cdot ctg\alpha = 30 = \frac{AC}{\sin\alpha}\cdot AC\cdot\cos\alpha = 30$ $\quad \frac{AC}{\sin\alpha} = 12$

$\frac{AB}{CH} = \frac{AC\cdot\sin\alpha}{AC\cdot 2\cos\alpha} = \frac{1}{2}tg\alpha$

$\frac{1}{2\sin 2\alpha} = \frac{6}{5}$

$2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{5}{12}$

$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{5}{24}$

$AC^2\cdot ctg\alpha = 60$

$AH = AC\cdot\cos\alpha = \frac{30}{12} = \frac{5}{2}$

$AB = \frac{AC}{2\cos\alpha}$ $\quad 12\cdot\sin 2\alpha = 5$ $\quad t\sqrt{1-t^2} = \frac{5}{24}$

$\frac{6}{\sin(90^\circ-\alpha)} = \frac{AC}{\sin 2\alpha}$

$\sin 2\alpha = \frac{5}{12}$ $\quad t^2(1-t^2) = \frac{25}{4\cdot 144}$

$CH = \frac{AC}{\sin\alpha}$ $\quad -x^2+x = \frac{25}{4\cdot 144}$

$\frac{6}{\cancel{\cos\alpha}} = \frac{AC}{2\sin\alpha\cancel{\cos\alpha}}$

$\frac{AB}{\cancel{\sin\alpha}} = \frac{AC}{\sin 2\alpha} \quad \frac{AB}{\sin\alpha} = \frac{AC}{\sin 2\alpha} = \frac{12 AC}{5}$

$\frac{AC}{2\sin\alpha} = 6$ $\quad \frac{AC}{\sin\alpha} = 12$

$x = \frac{1+\frac{\sqrt{119}}{12}}{2} =$

$= \frac{AC}{2\cancel{\sin\alpha}\cos\alpha}$ $\quad 5AB = 12AC\sin\alpha$ $\quad x^2-x+\frac{25}{576}=0$

$D = 1-4\cdot\frac{25}{576} = 1-\frac{25}{144} = \frac{119}{144}$ $\quad = \frac{\sqrt{119}+12}{24}$

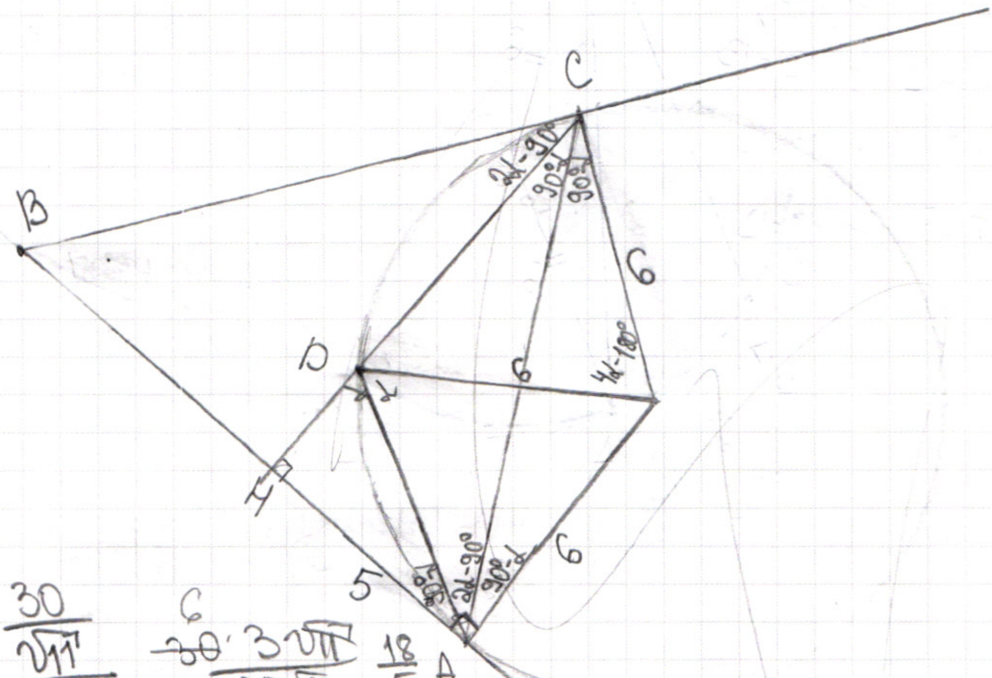
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$r=6$

$S_{ABD}=15$

$180^\circ-(360^\circ-4\alpha)=$
$=4\alpha-180^\circ$

$\frac{AD}{\sin(90^\circ-\alpha)}=2R=12$

$\frac{AD}{\cos\alpha}=12$

$AD=12\cos\alpha$

$DH=AD\cdot\cos\alpha=$
$=12\cos^2\alpha$

$\frac{AB}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin 2\alpha}\Rightarrow AB=\frac{AC}{2\cos\alpha}$

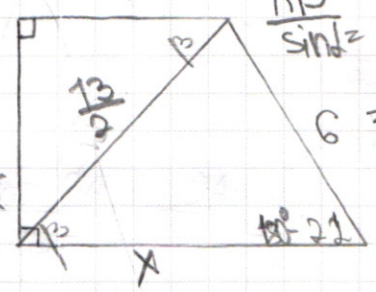
$AB\cdot DH=2S=30$

$\frac{AC}{2\cos\alpha}\cdot 12\cos^2\alpha=$
$=6AC\cos\alpha=30$

$AC\cos\alpha=5\Rightarrow$

$\frac{\frac{30}{\sqrt{11}}}{\frac{25}{3\sqrt{11}}}=\frac{\cancel{30}\cdot 3\sqrt{11}}{\cancel{25}\sqrt{11}}=\frac{18}{5}$

$\frac{AB}{\sin\alpha}=\frac{18}{5}\Rightarrow\frac{6AB}{5}=\frac{18}{5}\Rightarrow AB=3$



$\sin\beta=\frac{5}{13}$

$\sin(180^\circ-2\alpha)=\sin 2\alpha=$
$=2\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{\sqrt{11}}=\Rightarrow$
$=\frac{25}{3\sqrt{11}}$

$\frac{6}{\frac{5}{13}}=\frac{6\cdot 13}{5}=\frac{13}{2\sin 2\alpha}$

$36+25=61$

$\sin\beta=\frac{5}{\sqrt{61}}$

$12\cdot\sin 2\alpha=5$

$\sin 2\alpha=\frac{5}{12}$

$2R=\frac{AC}{\sin 2\alpha}=\frac{12AC}{5}=$ $\frac{12}{5}$

$\frac{6}{\frac{5}{\sqrt{61}}}=\frac{6\sqrt{61}}{5}=\frac{\sqrt{61}}{\sin\alpha}=$

$=\sin\alpha=\frac{5}{6}\Rightarrow$

$\Rightarrow\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{25}{36}}=\sqrt{\frac{11}{36}}=\frac{\sqrt{11}}{6}\Rightarrow AH=5$

$CH=AC\cdot\sin\alpha$

$=R=\frac{6}{5}AC$

$tg\alpha=\frac{5}{\sqrt{11}}$

$AB=2R\cdot\sin\alpha=AC$
$=\frac{12}{5}\sin\alpha AC$

$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot x\cdot\sin 2\alpha=$
$=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot x\cdot\frac{5}{12}=\frac{5x}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)