МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

задача 1

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x||x-2|} \leq 0$$

заметим, что $x \neq 0$ и $x \neq 2$, т.к. знаменатель будет равен нулю.

при $x<0$ дробь принимает вид

$$\frac{x^2-6x+10-2(3-x)}{2x^2-4x+(-x)(2-x)} = \frac{(x-2)^2}{3x^2-6x} \text{ при } x<0$$

$(x-2)^2>0$ и $3x^2-6x>0 \Rightarrow$ при $x<0$

$\frac{(x-2)^2}{3x^2-6x}>0 \Rightarrow$ при $x<0$ решений нет

при ~~x~~ $0<x<2$ дробь принимает вид

$$\frac{x^2-6x+10-2(3-x)}{2x^2-4x+x(2-x)} = \frac{(x-2)^2}{x^2-2x} \text{ при } x\in(0;2)$$

$(x-2)^2>0$ а $x^2-2x<0 \Rightarrow$ при всех $x\in(0;2)$

$\frac{(x-2)^2}{x^2-2x} < 0$

при $2<x\leq 3$ дробь принимает вид

$$\frac{x^2-6x+10-2(3-x)}{2x^2-4x+x(x-2)} = \frac{(x-2)^2}{3x^2-6x} \text{ при } x\in(2;3]$$

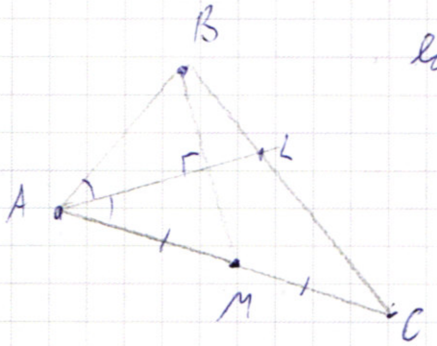
$(x-2)^2>0$ и $3x^2-6x>0 \Rightarrow$ на данном интервале решений нет при $x > 3$ дробь принимает вид

$$\frac{x^2-6x+10-2(x-3)}{2x^2-4x+x(x-2)} = \frac{(x-4)^2}{3x^2-6x} \quad \text{при } x \in (3;\infty)\setminus\{4\}$$

$3x^2-6x>0$ и $(x-4)^2>0$, а в точке 4 дробь равна нулю. $\Rightarrow$ подходит только 4.

Ответ: $x \in (0;2)\cup\{4\}$

Задача 2



Заметим, что если $AL \perp BM$, то AL — биссектриса и высота в $\triangle ABM \Rightarrow AM=AB \Rightarrow AC=2AB$.

(примечание: из одной вершины не могут выходить перпендикулярные биссектриса и медиана, т.к. биссектриса AL со сторонами AC и AB образует угол не более 90° и медиана лежит между этих сторон)

Таким образом надо перебрать все такие треугольники, стороны которых равны a, $2a$ и $600-3a$, при этом должно выполняться неравенство треугольника, т.е.

$$\begin{cases} 2a < 600-3a+a = 600-2a & \text{откуда } a<150 \\ 600-3a < 2a+a & \text{откуда } a>100 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Таким образом подходящие треугольники со сторонами $(101;202;297)$, $(102;204;294)$ ... ... $(149,298,153)$, таких треугольников 49.

Ответ: 49

Задача 3

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$x=5-y^2 \Rightarrow x-2y=5-y^2-2y=\sqrt{y\cdot 5-y^3}$

$5-y^2-2y=\sqrt{y\cdot5-y^3}$

$(5-y^2-2y)^2=5y-y^3$

$y^4+4y^2+25+4y^3-10y^2-20y=5y-y^3$

$y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0$, т.е. разложив на множ. получим

$(y-1)(y+5)(y^2+y-5)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-5 \\ y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$ – 4 подходящих „игрика"

- при $y=1$: $x=5-y^2=4$ и $x-2y=2$ и $\sqrt{xy}=2 \Rightarrow$ при $y=1$, $x=4$ верно
- при $y=-5$: $x=5-y^2=-20$ и $x-2y=-10$ и $\sqrt{xy}=10 \Rightarrow$ при $y=-5$ и $x=-20$ неверно

• при $y = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$; $x = 5 - y^2 = \frac{20}{4} - \frac{1 - 2\sqrt{21} + 21}{4} =$

$= \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$ и $x - 2y = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$ и $\sqrt{xy} = \frac{-1+\sqrt{21}}{2} \Rightarrow$

при $x = y = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$ неверно

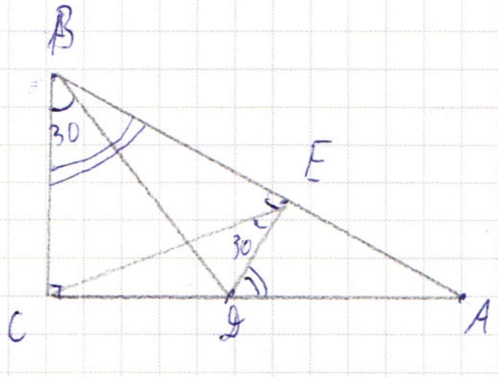
• при $y = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$ $x = 5 - y^2 = \frac{20}{4} - \frac{1 + 2\sqrt{21} + 21}{4} =$

$= \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$ и $x - 2y = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$ и $\sqrt{xy} = \frac{1+\sqrt{21}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ верно. При найденных значениях y подходит только два: 1 и $\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

Ответ: $y = 1$ и $x = 4$ или $x = y = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$

задача 5



т.к. $\angle BCD + \angle DEB = 180°$, то четырехугольник $CBED$ - вписан $\Rightarrow$ $\angle CED = \angle CBD = 30° \Rightarrow$

$CD = BC \cdot \tan 30 = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} =$

$= \frac{2}{3}\sqrt{7} \Rightarrow AD = \frac{1}{3}\sqrt{7} \Rightarrow AD : AC = 1 : 3$

найдем AB: $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{\frac{28}{3} + 7} = 7\sqrt{\frac{1}{3}}$

$\triangle AED \sim \triangle ACB$ по 2 углам с коэффициентом $K =$

$\frac{AD}{AB} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{7}}{7\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{21}} \Rightarrow$ их площади относятся как K^2, т.е. $\frac{1}{21}$, т.е. $S_{AED} \cdot 21 = S_{ABC}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$S_{ABC} = \frac{BC\cdot AC}{2} = \sqrt{7}\cdot 2\sqrt{\frac{7}{3}} = 7\sqrt{\frac{1}{3}}$

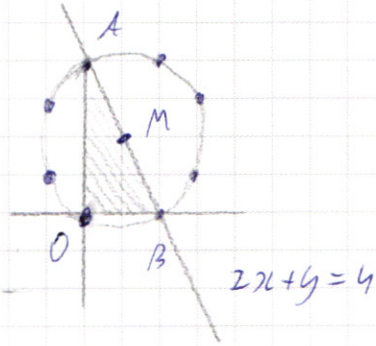
$S_{AED} = \frac{S_{ABC}}{21} = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}}}{3} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

Ответ: $AD : AC = 1:3$ и $S_{AED} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

задача 6

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y| > 4 \\ x^2-2x-4y+y^2 \le 0 \end{cases}$$

второе уравнение дает, что $(x-1)^2+(y-2)^2 \le 5$, т.е. данные точки лежат внутри круга с радиусом $\sqrt{5}$ и с центром $(1;2)$



проведя прямую $2x+y=4$ мы отсекли часть круга: в нем все точки подходят, т.к. $2x+y>4$ и x и $y>0$. при x и y больше 0 одного знака ~~данное неравенство~~ и ниже данной прямой (я имею ввиду прямую $2x+y=4$) данное неравенство неверно: $|2x|+|y|+|4-2x-y| = 2x+y+4-2x-y = 4 \Rightarrow$ в $\triangle OAB$ не подходит (ни одна точка, лежащая в нем)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при x и y разного знака верно, т.к.

$|2x+y| < |2x|+|y| \Rightarrow |2x|+|y|+|4-2x-y| > 4.$

Итак, нам подходят все точки ~~окружности~~ круга с центром в $M(1;2)$ за исключением $\triangle OAB$. $S = S(OAB) - S_{\triangle OAB} = \pi r^2 - \frac{OB \cdot OA}{2} =$

$= 5\pi - 4$ ну или $\approx 15{,}7$

Ответ: $15{,}7$ $(5\pi - 4)$

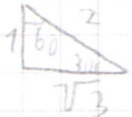
$y = \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$ $x = 5 - \frac{(-1+\sqrt{21})^2}{4} = \frac{20-1-21+2\sqrt{21}}{4} = \frac{-2+2\sqrt{21}}{4}$

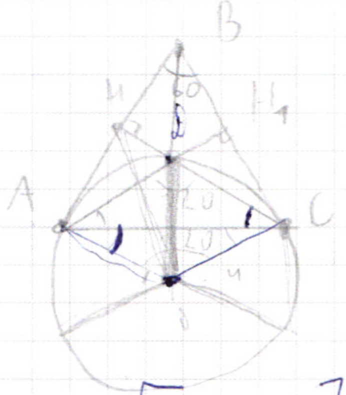
$= \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

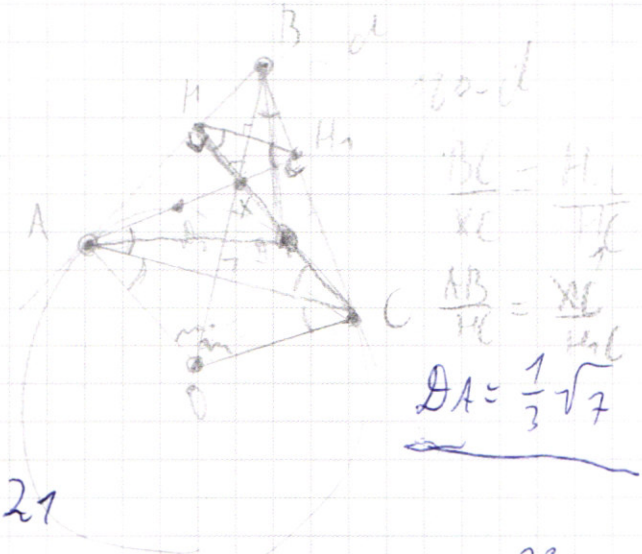
$y_2 = \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$ $x = 5 - \frac{(1+\sqrt{21})^2}{4} = \frac{20-1-21-2\sqrt{21}}{4} =$

$= \frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

$\operatorname{tg} 30 = \frac{1}{\sqrt{3}}$



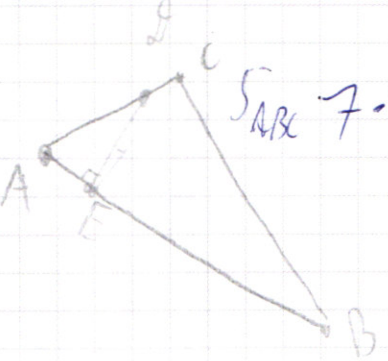




$DA = \frac{1}{3}\sqrt{7}$

$\frac{AB}{DA} = \frac{7\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}}{\frac{7}{3}\cdot\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{\frac{1}{3}}}$ $\frac{7}{\frac{1}{3}} = 21$

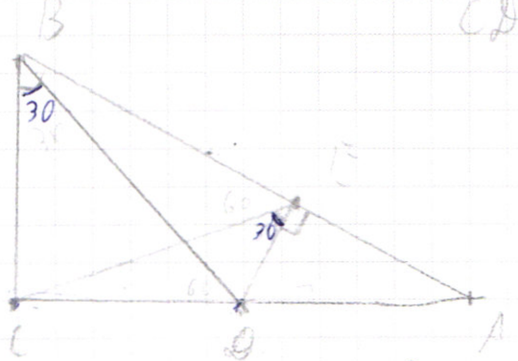
$AB = 7 + \frac{28}{3} =$



$S_{ABC}\ 7\cdot\sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow S_{AEBD} =$ $2\frac{\sqrt{\frac{1}{3}}}{3} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ $S_{ABD} = \frac{49}{3} = 7\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}$

$DH \cdot HC = HA^2$

$CD =$ $BC \cdot \cos 30$



$2\sqrt{\frac{7}{3}}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\frac{2}{3}\sqrt{7}$ $2\sqrt{\frac{7}{3}}$ $\frac{1}{3}\sqrt{7}$

$3{,}14\cdot5-4$

$15{,}7-4 = 11{,}7$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases}$

$x=5-y^2$

$|2x|+|y|+|4-2x-y|>4$

$(x-1)^2+(y-2)^2\leq 5$

$r=\sqrt{5}$

$5-y^2-2y=\sqrt{5y-y^3}$

$25+y^4+4y^2+4y^3-10y^2-20y=5y-y^3$

если $4>2x+y$, то

$|2x|+|y|+4-2x-y>4$

$25+y^4-6y^2+5y^3-25y=0$

$y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0=$

$y=1,\ y=-5$

$(y^2+ay+b)(y^2+cy+d)=0$

$-20\cdot-5=$

$-20+10$

$(y^2+2y-5)(y^2+3y-5)=$

$a+c=5$

$d+b+ac=-6$

$bd=25$

$ad+bc=-25$

$(y^3+6y^2-25)(y-1)=(y-1)(y+5)\cdot(y^2+y-5)$

$y^4+5y^3-6y^2-25y+25 \;\big|\; y-1$

$-\ y^4+y^3 \qquad\qquad y^3+6y^2\,\cancel{...}-25$

$6y^3-6y^2-25y+25$

$-6y^3+6y^2$

$\cancel{1}4y^2-25y+25$

$-12y^2$

$y=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

$\dfrac{3}{2}<y_1<2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \le 0 \quad \text{при } x \ge 0$$

$2x^2-4x+x^2-2x=3(x^2-2)$

$$\frac{x^2-6x+10-2x+6}{2x^2+x^2-2x-4x} \le 0$$

$$\frac{(x-4)^2}{3(x^2-2x)} \le 0$$

$$\frac{(x-4)^2}{3x^2-5x}$$

$2x^2-5x<0$

$x\in(0;2)\cup\{4\}$

$2x-5<0$

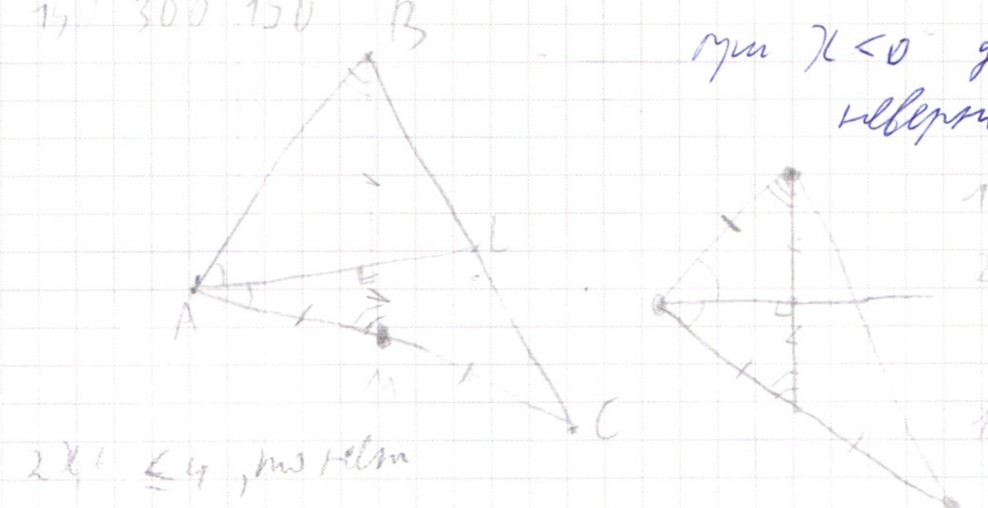
$x<\frac{5}{2}$ $\quad x\in\left(0;\frac{5}{2}\right)$

при $x<0$

$$\frac{x^2-6x+10-6+2x}{2x^2-4x+2x-x^2} = \frac{(x-2)^2}{x^2-2x}$$

$x^2-2x<0$

при $x<0$ данное нер. неверно



$b = 2a$, $c = 600 - 3a$

$c < a + b$

$b < a + c$

$600 - 3a < 3a \Rightarrow a > 100$

$2a < 600 - 2a \Rightarrow a < 150$

$101, \dots 149$

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy} \\ x + y^2 = 5 \end{cases}$$

$5 - y^2 - 2y = \sqrt{5y - y^2}$

при $x \geq 0$

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2|x-3|}{2x^2 - 4x + |x||x-2|} =$$

при $x > 3$

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2x + 6}{3x^2 - 6x} = \frac{(x-4)^2}{3x^2 - 6x}$$

$1 - 6 + 10 - 4$

$2 - 4 + 1$

при $x \leq 0$:

$-6 + 2x = x^2 - 4x + 4$

$(x-2)^2$

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2(3-x)}{2x^2 - 4x + (-x)(2-x)} = \frac{\cancel{x^2 - 6x + 10}}{3x^2 - 6x}$$

$3x^2 - 6x < 0$

$3x - 6 < 0$

$x \in (0; 2)$

при $0 < x \leq 2$:

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2(3-x)}{2x^2 - 4x + x(2-x)} = \frac{(x-2)^2}{x^2 - 2x}$$

$x \in (0; 2) \cup \{4\}$

$x \in (0; 2)$

$$\begin{array}{r} 298 \\ +149 \\ \hline 447 \end{array}$$

при $2 < x \leq 3$:

$$\frac{x^2 - 6x + 10 - 2(3-x)}{2x^2 - 4x + x(x-2)} = \frac{(x-2)^2}{3x^2 - 6x}$$

$x \in (0; 2)$

153

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)