МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 18$, $1\leqslant y\leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leq 0$$

$$x^2-6x+10-2|x-3| = (x-3)^2+1-2|x-3| =$$
$$= |x-3|^2+1-2|x-3| = (|x-3|-1)^2$$

То есть мы получили, что в числителе стоит точный квадрат, а он всегда ≥ 0, то есть вся дробь ≤ 0, либо если числитель равен 0, а знаменатель нет, либо если числитель >0, а знаменатель <0.

$|x-3|-1=0$

$|x-3|=1$

$\left[\begin{array}{l} x-3=1 \\ x-3=-1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=2 \end{array}\right.$

Но при $x=2$ знаменатель равен 0 значит это посторонний корень

Если $x \neq 2$ и $x \neq 4$, нам надо решить неравенство

$2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|<0$

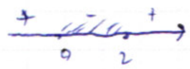
При $x \geq 2$

$2x^2-4x+x^2-2x<0$

$3x^2-6x<0$

$x^2-2x<0$

$x(x-2)<0$



нет решений

При $\cancel{0}x<2$

~~$2x^2-4x-|x|$~~

$2x^2-4x-x^2+2x<0$

$x^2-2x<0$

$0<x<2$

При $x<0$

$2x^2-4x+x^2-2x<0$

$3x^2-6x<0$

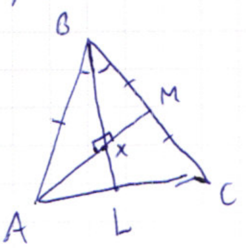
$x^2-2x<0$

нет решений

Ответ: $0<x<2$ и $x=4$

№ 2

Нарисуем треугольник ABC в котором медиана AM перпендикулярна биссектрисе BL



Несложно заметить, что $\triangle ABM$ равнобедренный (BX - высота и биссектриса)

Тогда $2AB=BC$

Также поймём, что если в треугольнике одна сторона в 2 раза больше другой, то в нём есть медиана перпендикулярная какой-то биссектрисе, то есть нам надо просто посчитать количество треугольников с периметром 600 у которых одна ~~которая~~ сторона в 2 раза короче другой и все стороны целочисленные.

Пусть стороны нашего треугольника равны x, $2x$, $3y$, тогда по неравенству треугольника $x+2x>3y \Rightarrow x>y$ и

$x+3y>2x \Rightarrow 3y>x \Rightarrow y>\frac{x}{3}$

При этом $3x+3y=600$ $\quad x+y=200$ тогда $2x>x+y=200 \Rightarrow x>100$

$200=x+y>\frac{4}{3}x \Rightarrow 150>x$

x мы можем выбрать 49 способами (из промежутка $[101; 149]$), а y определяется однозначно, то есть и треугольник определяется однозначно

Ответ: 49

№ 3

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases} \quad \begin{cases} 5-2y-y^2=\sqrt{y(5-y^2)} \\ x+y^2=5 \end{cases} \quad \begin{cases} y^4+4y^2+25-10y^2-20y+4y^3=5y-y^3 \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0 \\ x+y^2=5 \end{cases} \quad \begin{cases} (y-1)(y^3+6y^2-25)=0 \\ x+y^2=5 \end{cases} \quad \begin{cases} (y-1)(y^2(y+5)+(y-5)(y+5))=0 \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-1)(y+5)(y^2+y-5)=0 \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$y^2+y-5=0$

$y=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

Отсюда получаем, что y может быть равен 1, -5, $\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$

При $y=1$ $\quad x=4$

$4-2\cdot 1=\sqrt{4\cdot 1}$

$2=2$

При $y=-5$ $\quad x=-20$

$-20-2\cdot -5=\sqrt{-5\cdot -20}$

$-10\neq 10$

При $y=\frac{\sqrt{21}-1}{2}$

$x=\frac{\sqrt{21}-1}{2}$

$\frac{1-\sqrt{21}}{2}\neq\frac{\sqrt{21}-1}{2}$

При $y=\frac{-\sqrt{21}-1}{2}$

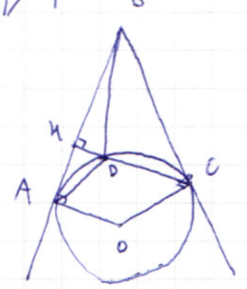
$x=\frac{-\sqrt{21}-1}{2}$

$\frac{\sqrt{21}+1}{2}=\frac{\sqrt{21}+1}{2}$

Ответ: $\begin{matrix} x=4 \\ y=1 \end{matrix}$ и $x=y=\frac{-\sqrt{21}-1}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



$S_{ABD} = 6$

$OA = OC = 4$

$\frac{AB}{CH}$ - ?

Пусть $\angle ACO = \alpha$, тогда $\angle CAO = \alpha$, тогда $\angle ACD = \alpha$ $(OA \parallel CH)$, тогда $\angle BAD = \alpha$

(угол между касательной и хордой равен ~~углу~~ вписан. нному углу, опирающемуся на эту хорду)

Тогда $\angle ABO = \angle ACO = \alpha$ ($ABCO$ - вписанный $\angle BAO + \angle BCO = 180°$)

Откуда получаем

$AB \cdot tg \angle ABO = AO \qquad AB \cdot tg\alpha = 4$

и

$\frac{AB \cdot AD \cdot \sin\angle BAD}{2} = S_{ABD} \qquad AB \cdot AD \cdot \sin\alpha = 12$

$\frac{AD}{\sin\angle ACD} = 2AO$ (теорема синусов для $\triangle ACD$)

$AD = 8 \cdot \sin\alpha$

$\longrightarrow AB \sin^2\alpha = 1{,}5$

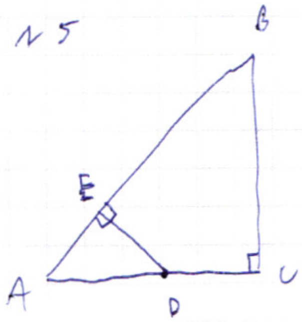
$\frac{AB \sin^2\alpha}{AB\, tg\alpha} = \frac{1{,}5}{4} \qquad \frac{2\sin^2\alpha}{tg\alpha} = 0{,}75 \qquad 2\sin\alpha\cos\alpha = 0{,}75 \qquad \sin 2\alpha = 0{,}75$

Также заметим, что $AB = BC$ как касательные ~~из~~ одной точки

$\frac{AB}{CH} = \frac{BC}{CH} = \frac{BC}{BC \cdot \sin\angle ABC} = \frac{1}{\sin 2\alpha} = \frac{4}{3}$

Ответ: $\frac{AB}{CH} = \frac{4}{3}$

№ 5



$AC = \sqrt{7}$

$BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\angle CED = 30°$

$\frac{AD}{AC}$ - ? $\quad S_{AED}$ - ?

$BCDE$ - вписанный $\Rightarrow \angle DBC = \angle CED = 30°$

$BC \cdot tg\, 30° = CD \qquad CD = \frac{2}{3}\sqrt{7}$

$AD = AC - CD = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$

Также $AE \cdot AB = AD \cdot AC$ (степень точки A)

$$AE = \frac{AD \cdot AC}{\sqrt{BC^2+AC^2}} \qquad AE = \frac{\frac{7}{3}}{\sqrt{\frac{28}{3}+7}} = \frac{\frac{7}{3}}{\sqrt{\frac{49}{3}}} = \frac{7\cdot\sqrt{3}}{3\cdot 7} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$ED = \sqrt{AD^2 - AE^2} \qquad ED = \sqrt{\frac{7}{9} - \frac{3}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$S_{AED} = \frac{AE \cdot ED}{2} \qquad S_{AED} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

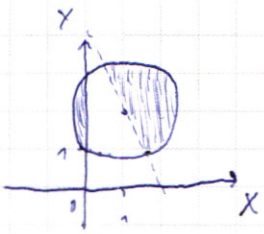
Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{3}$, $S_{AED} = \frac{\sqrt{3}}{9}$

№ 6

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4-2x-y| > 4 \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 2$$



Если точка удовлетворяет этой системе, то она точно лежит внутри круга с координатами центра $(1; 2)$ и радиусом $\sqrt{2}$

Теперь посмотрим на первое неравенство в системе, из второго неравенства видно, что $4 + y > 0$ (иначе точка точно не подходит)

Пусть $x < 0$

тогда $2x + y < 4$ $\quad 4 - 2x - y > 0$

то есть

$-2x + y + 4 - 2x - y > 4$

$4 - 4x > 4$

$1 - x > 1$

$0 > x$

это верно, то есть вся площадь круга где $x < 0$ нам подходит

Пусть $x \geq 0$

тогда $2x + y > 4$, иначе не получится

При $2x + y > 4$

$2x + y + 2x + y - 4 > 4$

$4x + 2y > 8$

$2x + y > 4$ верно

Также $y > 4 - 2x$

то есть все нужные нам точки лежат выше прямой

$y = 4 - 2x$

нарисуем её и заштрихуем те области, что нам подходят

Теперь посчитаем заштрихованную площадь

Площадь всего нашего круга πr^2, то есть 2π

Площадь половины π (так как прямая $y=4-2x$ проходит через центр, она отсекает ровно половину)

А оставшийся кусок это четверть площади круга за вычетом равнобедренного прямоугольного треугольника, то есть $\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}=$
$=\frac{\pi}{2}-1$

То есть общая площадь нашей фигуры $1{,}5\pi-1$

Ответ: $1{,}5\pi-1$

№7

Давайте посчитаем $f(1)$, мы знаем, что $f(2)=2$ и что
$f(2\cdot 1)=f(2)+f(1)$, то есть $2=2+f(1)$, $f(1)=0$

Тогда

$f\left(a\cdot\frac{1}{a}\right)=f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)$, то есть $0=f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)$ $\quad f\left(\frac{1}{a}\right)=-f(a)$

Тогда

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)$ это значение <0 при $f(x)<f(y)$

То есть нам надо найти количество пар $(x;y)$ таких, что

$1\le x\le 18$, $1\le y\le 18$, $f(x)<f(y)$ и x и y - натуральные

Давайте просто найдем все значения этой функции для ~~[illegible]~~ чисел от 1 до 18

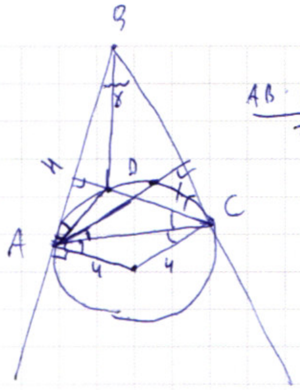
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$f(x)$	0	2	3	4	5	5	7	6	6	7	11	7	13	9	8	8	17	8

тогда у нас 8 значений встречающихся 1 раз, 2 значения встречающихся 2 раза и 2 значения встречающихся 3 раза, тогда исходя из несложных соображений комбинаторики ответ будет равен $\frac{8\cdot 17+4\cdot 16+6\cdot 15}{2}=4\cdot 17+2\cdot 16+3\cdot 15=$
$=68+32+45=145$

(Ответ считаем просто сложив количество способов для значений, которые встречаются 1, 2 и 3 раза*, а они такие потому что например для значений которые встречаются 2 раза у нас 4 способа выбрать одно число *, а потом 16 способов выбрать второе, делим на два так как неважен порядок из-за того, что значение $f(x)<f(y)$ и они сами упорядочатся, так как различны)

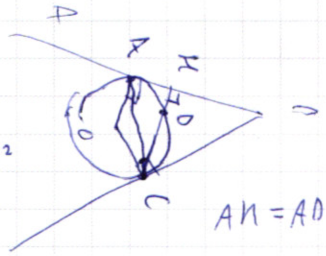
Ответ: 145

$x=5-y^2$



$\frac{AB\cdot HD}{2}=6$

$CH\cdot HD=AH^2$



$AH=AD\cdot\cos\alpha$

$AD=8\sin\alpha$

$\cancel{5-2y-y^2}=\sqrt{y(5-y^2)}$

$x^2+4y^2-4xy=\cancel{x}y$

$y^4+5y^3-6y^2-25y+25 \;|\; y-1$

$y^4-y^3 \qquad y^3+6y^2-25$

$6y^3-6y^2$

$-y^2-2y+5=\sqrt{y(5-y^2)}$ 2

$AC=8\cos\alpha$

$y^4+4y^2+25-10y^2-20y+4y^3=5y-y^3$

$\frac{AB\cdot AD\cdot\sin\alpha}{2}=6$

$AH=8\cos\alpha\cdot\sin\alpha$

$AH=4\sin2\alpha$

$y^4+5y^3-6y^2-25y+25=0$

$y^3+6y^2-25=0$

y^2-25

$AH^2=16\sin^2 2\alpha$

$1+4+25-10-20+4$

$\cancel{y^2}(y+5)$

$y^2(y+5)+(y+5)(y-5)$

4 $\quad 5-1$ 4

$y\cancel{(y^2}+$

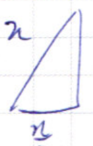
$CH\cdot HD=16\sin^2 2\alpha$

$y^3(y-1)+6y(y-1)-25(y+1)$

$y+5)$

$-125+6\cdot25$

150



$\frac{\sqrt3 x}{2}$

$AB\cdot tg\alpha=4$

$(y-1)(y+5)(y^2+y-5)=0$

$y^2+y-5=0$

$y=-5$

$\frac{AB\cdot AD\cdot\sin\alpha}{2}=6$

25

$\cancel{\cos\beta=1},70$

$1+20$

$x=-20$

21

$y^2+y=5 \quad \sqrt3$

$AD=8\sin\alpha$

$\sin\alpha=0,75$

$x=y$

$-20+10$

$\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \qquad \frac{-1-\sqrt{21}}{2}$

$-x=|x|$

$-x=\sqrt{x^2}$

$4AB\sin^2\alpha=6$

$\frac{21+1-2\sqrt{21}}{2}$

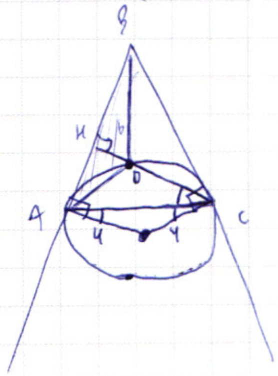
$\frac{11-\sqrt{21}}{2}=x^2$

$\frac{22+2\sqrt{21}}{4}$

$4\sin2\alpha\cos\alpha=6$

$x^2+x-5=0$

$\sqrt{21}-6 \quad 22+2\sqrt{21}$

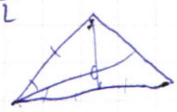


$(11-\sqrt{21})(\sqrt{21}-6)$

$\frac{-\sqrt{21}-1}{2} \qquad \frac{11+\sqrt{21}}{2}$

$\sin2\alpha=3$

$3\sqrt{21}-28$



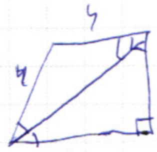
-66

$x=1+20$

$HD\cdot AB=6$

$\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

$\frac{\sqrt{21}-1}{2}=y$



$\frac{22-2\sqrt{21}}{4}$

$HD\cdot CH=AH^2$

$\frac{AB}{CH}$

$AB\cdot HD\cdot\frac{1}{HD\cdot CH}$

$\frac{\sqrt{21}-1}{2} \qquad \frac{11-\sqrt{21}}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

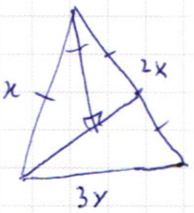
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leq 0$$

$x>y$

$(|x-3|)^2+1-2|x-3|$



$3x+3y=600$

$x+y=200$

$x>y$

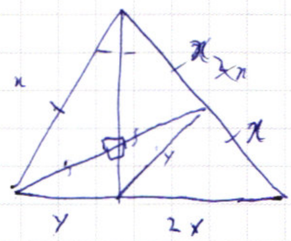
$101>99$ 151 49

150 50

$\frac{(|x-3|-1)^2}{} \leq 0$ ≥ 0

<0

$2x$ $|x|$

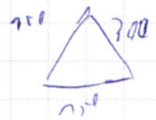


$2x^2-4x+|x|(x-2)<0$

$x>y$ $3y+x>2x$

$3y>x>y$

$2x(x-2)+|x|\cdot|x-2|<0$



$x>2$

$x<0$ $-2+1=-1$

$x>2$ $x<2$

$2x(x-2)+x\cdot(x+2)$ $x\geq 0$

$x-2y=\sqrt{xy}$

$3x(x-2)$ $2x(x-2)+x(2-x)$

$x+y^2=5$

$2x^2-4x-x^2+2x$

$\sqrt{x}=-\sqrt{y}$

x^2-2x

$2y+\sqrt{xy}-x=0$

$(x-2)x<0$

$x=y$

$x=y=0$

$(2\sqrt{y}-\sqrt{x})(\sqrt{y}+\sqrt{x})=0$

0 2

~~$-2y=0$~~

~~$x-2x=x$~~

~~$-x$~~$=x$

$x=1$

$(x-2)^2+16=5xy$

$4y^2+x^2-4xy=xy$

$y=2$

$x^2-4x+20=5xy$

$x=4$ $4y^2+x^2=5xy$ $y^2=5-x$

$y=1$

$x^2y+xy^3=5xy$ $20-4x+x^2=5xy$

☑ черновик ☐ чистовик

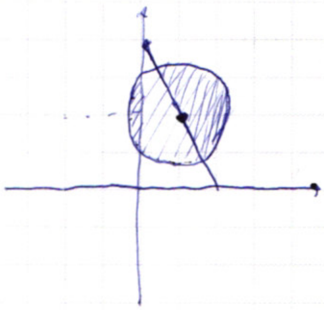
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x^2-2x-4y^2+y^2\le 0$

$(x-1)^2+(y-2)^2\le 2$



17 16 15 14 13 13 10 10 10

7 7 7 6 5 3 2

$4>y>0$

~~17 16 15 14 12 12 10 10~~

~~7 7 7 4 4 4 3 2 1 0~~

$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$ $\quad x<0$ $\quad y>0$

$17\cdot 4+2\cdot 16+3\cdot 15$

$\sin 2\alpha=0{,}75$ $\quad \cos\beta=0{,}75$

$\frac{1}{1-2\sin\alpha}$

$BC\cos\beta=BC\cos\alpha\cdot BC\sin\alpha$ $\quad \cos\beta=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$|2x|+|y|+|4-2x-y|>4$ $\quad \frac{BC}{BC\cdot\cos\beta}$

$4>2x+y$

$2\sin 2\alpha=1{,}5$

$4>4$

$y>4-2x$ $\quad 4>2x+y$

20 + 15

$-2x+y+4-2x-y>4$ $\quad 1-\sin^2\alpha$ $\quad BC\cos\beta=BC-2BC\sin^2\alpha$

$2x+y+$ $\quad AB=4\operatorname{tg}\alpha$ $\quad 2x+y>4$

45

$4-4x>4$ $\quad x<0$ $\quad x>1$

$\frac{AB\cdot AD\cdot\sin\alpha}{2}=6$ $\quad AD=8\sin\alpha$ $\quad 4AB\sin^2\alpha=6$ $\quad BC\sin^2\alpha=1{,}5$

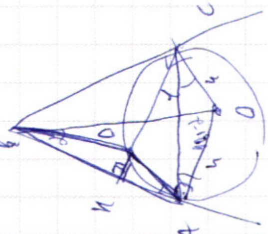
$1-x>1$ $\quad 4>2x+y$

$\frac{4\sin^2\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}=1{,}5$

$2>x$ $\quad \pi R^2$ $\quad -2x+y$

$\frac{4\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=1{,}5$ $\quad \sqrt{2}$ $\quad 2\pi$ $\quad \pi$

$\frac{\pi}{2}-1$ $\quad \frac{3\pi}{2}-1$



$x\ 1$

1	~~1~~	$\frac{1}{1}$	0
2	2	$\frac{1}{2}$	-2
3	3	$\frac{1}{3}$	-3
4	4	$\frac{1}{4}$	-4
5	5	$\frac{1}{5}$	-5
6	5	$\frac{1}{6}$	-5
7	~~7~~	$\frac{1}{7}$	-7
8	~~6~~	$\frac{1}{8}$	-6
9	~~6~~	$\frac{1}{9}$	-6
10	~~7~~		-7
11	~~11~~		-11
12	7		-7
13	13		-13
14	~~9~~		-9
15	8		-8
16	8		-8
17	~~17~~		-17
18	8		-8

$BC\operatorname{tg}\beta=4$ $\quad AB\operatorname{tg}\alpha=4$

$\frac{1}{2}$ −2 $\quad \frac{1}{3}$ −3 $\quad \frac{1}{5}$ −5 $\quad \frac{1}{7}$ −7 $\quad \frac{1}{11}$ −11 $\quad \frac{1}{13}$ −13 $\quad \frac{1}{17}$ −17

$f(2)=2$ $\quad f(1)=1$ $\quad f(2)=f(1)+f(2)$

$f(3)=3$ $\quad f(4)$ $\quad 2=0\quad 2$

$f(5)=5$ $\quad f(1)=0$

$f(7)=7$ $\quad f(1)=f(\frac{1}{2})+f(2)$

$0\quad -2\quad 2$

$f(11)=11$ $\quad f(\frac{1}{2})=-2$

$f(13)=13$ $\quad f(4)=4$ $\quad f(2)=f(\frac{1}{2})+f(4)$

$f(17)=17$ $\quad 2\quad -2\quad 4$

$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})$

$x\le y$

$x=1$ $\quad 4\cdot 17+2\cdot 16+3\cdot 15$ $\quad$ ~~0 1 2 3 4 5~~ 6

~~0 2~~ 3

~~18~~ 17 $\quad \frac{8\cdot 17+4\cdot 16+6\cdot 15}{2}$

17

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	17
1	0	1	1	1	2	2	3	3	2	0	1	0	1	1

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$32\cos\alpha\sin^3\alpha=6$

$\sin\beta=\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\frac{AB\cdot HD}{2}=6$ $\quad \frac{AD}{\sin\alpha}=8$ $\quad \frac{BC}{CH}$ $\quad \cos x$

$\cos(90-2\alpha)$

$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\frac{AB\cdot AD\cdot\sin\alpha}{2}=6$

$AC=8\cos\alpha$

$\sin 2\alpha$

$S=\frac{abc}{4R}$

$6=\frac{AB\cdot AD\cdot\sin\alpha}{2}$

$CH=AC\cos\alpha$

$CH=4\cos2\alpha+4$

$HD=AD\cdot\sin\alpha$

$8\cos^2\alpha$ $\quad \frac{8\cos\alpha\sin\alpha\cdot 8\sin^2\alpha}{2}=$

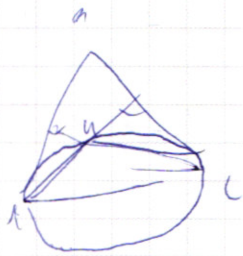
$\frac{AB}{CH}=\frac{12}{AD\cdot\sin\alpha\cdot AC\cdot\cos\alpha}=\frac{12}{AD\cdot\sin\alpha\cdot 8\cos^2\alpha}=\frac{12}{64\cdot\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$

$4\cos2\alpha+4=8\cos^2\alpha$ $\quad 6$

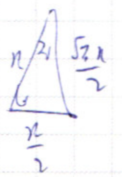
$(8\cos\alpha\sin\alpha)^2=8\cos^2\alpha\cdot8\sin^2\alpha$

$4\cos^2\alpha-4\sin^2\alpha+4=8\cos^2\alpha$

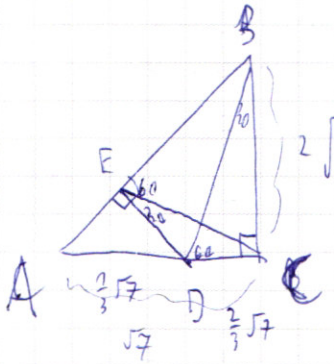
$8\cos\alpha\sin\alpha\cdot8(\cos^2\alpha-\sin^2\beta)$



$8\cos^2\alpha$



$8\cos\alpha\sin\alpha$



$\frac{1}{\cos\beta}$

BC^2

$4\sqrt7$ $\quad \frac{4}{9}\sqrt7$

$CH=BC\cdot\cos\beta$

$\frac{4}{3}\sqrt7$

$8\sin\beta$

$\beta=90-2\alpha$

$\frac{1}{3}$ $\quad \frac13\sqrt7\cdot\sqrt7$ $\quad AE\cdot\frac{7}{\sqrt3}\cdot7$ $\quad 7+\frac43\cdot7$

$\frac{CH}{BC}$

$AB\cdot\sin\alpha=CH$

$\frac{7}{3}$ $\quad \frac{7}{3}\cdot7$

$\frac{1}{\sin x}$

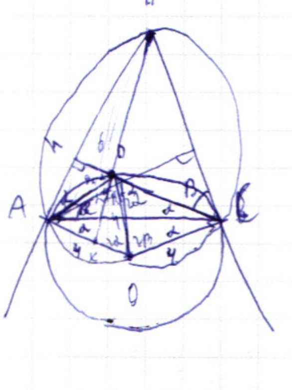
$\sin(90-2\alpha)$

$\frac{1}{\sqrt3}$

$BH^2+HC^2=AB^2$

$AB^2-BH^2=HC^2$

$AH\cdot(AB+BH)=HC^2$



$\frac{BC}{CH}$

$\frac{1}{\cos\beta}$

$\frac{AD}{\sin\alpha}=8$

$AB\cdot HD=12$ $\quad AC=8\cos\alpha$

$DC=8\sin\beta$

$\frac{AB}{HB}=\frac{AX}{HD}$ $\quad AD=8\sin\alpha$

$\beta=90-2\alpha$

AD $\quad 64\sin^2\alpha=64\cos^2\alpha+64\sin^2\beta-2\cos\alpha\,64\cos\alpha\sin\beta$

$\cos\beta=\sin(2\alpha)$