МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство
$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE\perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED=45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе
$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

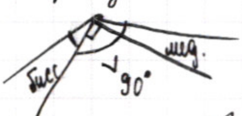
7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 19$, $3\leqslant y\leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

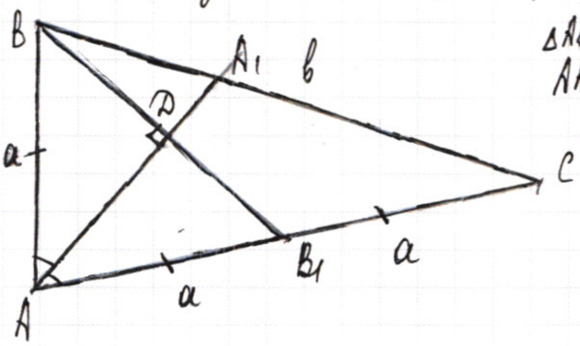
№2.

Рассмотрим такой треугольник (у которого бисс ⊥ медиане) и выразим его стороны

1. Заметим, что биссектриса и медиана не могут быть проведены из одного угла, т.к. тогда угол, из которого проведена биссектриса будет больше, чем $90° \cdot 2 = 180°$. Такого быть не может.



2. Значит, медиана и биссектриса проведены из разных углов треугольника.



ΔABC, AA_1 - бисс., BB_1 - медиана, $AA_1 \perp BB_1$
$AA_1 \cap BB_1 = D$

Рассмотрим ΔABD:
AD - бисс и высота $\Delta ABD \Rightarrow \Delta ABD$ - р/б ($AB = AB_1$)
Пусть $AB = a = AB_1$
Тогда в ΔABC: $AB_1 = B_1C$ (т.к. BB_1 - медиана) $= a \Rightarrow AC = 2a$

Пусть $BC = b$.

Запишем неравенство треугольника для ΔABC:

$$\begin{cases} a+b > 2a \\ a+2a > b \\ 2a+b > a \end{cases} \quad \begin{cases} AB+BC > AC \\ AB+AC > BC \\ AC+BC > AB \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} b > a \\ b < 3a \\ b > -a \text{ - верно всегда, т.к. } a \text{ и } b \in N \end{cases}$$

$$\begin{cases} a < b < 3a \\ \cancel{3a+b=300}\ 3a+b = 300 \end{cases}$$

Рассмотрим „пограничные" случаи: $b = a$ и $b = 3a$

1) если $b = a$, то $4a = 300 \Rightarrow a = 75$

~~a b 2a 75 75 150~~

	a	b	2a	
−	76	72	152	не удов. $b < a$, если будем увеличивать a, то b тоже будет увеличиваться и нерав-во все равно не будет выполняться
−	75	75	150	не удов. $b \leq a$
+	74	78	148	удов. Далее уменьшаем a на $1 \Rightarrow 2a$ уменьшается на 2, а b увелич. на 3.

2) если $b=3a$, то $6a=300 \Rightarrow a=50$

	a	b	$2a$	
$-$	49	153	98	не удов т.к. $b>3a$, если будем уменьшать a, то b будет увеличиваться и неравенство останется неверным
$-$	50	150	100	не удов. т.к. $b \geq 3a$
$+$	51	147	102	удов.

Значит, нам подходит $51 \leq a \leq 74$

$74-51+1=24$ треугольника

Ответ: 24 треугольника.

№1.

Рассмотрим отдельно числитель и знаменатель и сравним их с 0:

1. числитель $x^2-2x+5-4|x-1| = (x-1)^2+4-4|x-1| \geq 0$

$4|x-1| \leq 4$

$|x-1| \leq 1$

$-1 \leq x-1 \leq 1$

$0 \leq x \leq 2$

$-\quad 0 \quad + \quad 2 \quad -\quad x$

2. знаменатель $4x^2-12x+|x|\cdot|x-3| = 4x(x-3)+|x|\cdot|x-3|$ ≥ 0

О.Д.З: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3 \end{cases}$

		0		3	
x	$-$		$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$+$
$4x(x-3)$	$+$		$-$		$+$
знаменатель	$+$		$-$		$+$

если $0<x<3$

~~$4x(x-3)+x(x-3)$~~ $-4x(3-x)+x(3-x) = -3x(3-x) < 0$

3. Значение дроби ≤ 0, когда числитель и знаменатель имеют разные знаки или числитель $=0$.

числитель $-$ $+$ $-$

знаменатель $+$ $-$ $+$

0 2 3

Ответ: $(-\infty;0) \cup (0;2] \cup (3;+\infty)$

1. числитель $x^2-2x+5-4|x-1| = (x-1)(x-1) \mp 4|x-1|+4$

(1) $+$ (2) x; $+$ 1 $+$

(1) $(x-1)(x-1)+4(x-1)+4 = (x-1)(x+3)+4 = x^2+2x+4 = (x+1)^2+3>0$

(2) $(x-1)(x-1)-4(x-1)+4 = (x-1)(x-5)+4 = x^2-6x+9 = (x-3)^2 \geq 0$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

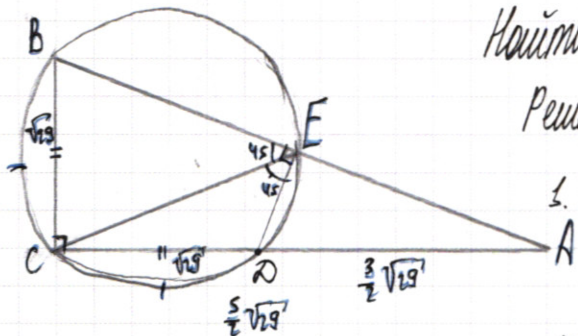
Т.е. числитель всегда ≥ 0

3. Значение дроби ≤ 0, когда числитель и знаменатель имеют разные знаки или числитель $=0$.

Значит, нам нужен отрицательный знаменатель.

Ответ: $(0; 3)$.

№5.



Дано: $\triangle ABC$ - п/у, $BC=\sqrt{29}$, $AC=\frac{5}{2}\sqrt{29}$, $\angle CED=45°$, $ED \perp AB$

Найти: $\frac{AD}{AC}$ - ? $S_{\triangle}AED$ - ?

Решение:

1. Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle ADE$:

$\angle A$ - общ
$\angle BCA = \angle AED = 90°$ $\Big|$ $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE$ (по 2-м углам)

из подобия:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = k$$

2. Рассмотрим CBED - впис (т.к. $\angle BCD + \angle BED = 180°$)

$\angle BEC = \angle CED = 45° \Rightarrow$ дуги BC и CD равны $\Rightarrow BC = CD = \sqrt{29}$

Значит, $AD = \frac{5}{2}\sqrt{29} - \sqrt{29} = \frac{3}{2}\sqrt{29}$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{3\sqrt{29}\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}\cdot 5\sqrt{29}} = \frac{3}{5}$$

3. в $\triangle ABC$ по Т. Пифагора:

$$AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{29 + \frac{25}{4}29} = \sqrt{29\left(1+\frac{25}{4}\right)} = \sqrt{\frac{29\cdot 29}{4}} = \frac{29}{2} = 14,5$$

$$k = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{29}\cdot 2}{29} = \cancel{\frac{2}{29\sqrt{29}}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$S_{\triangle}AED = \frac{1}{2}DE\cdot AE = \frac{1}{2}\left(\frac{AE}{AC}\cdot\frac{DE}{BC}\right)\cdot AC\cdot BC = \frac{1}{2}k^2\cdot AC\cdot BC = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{29}\cdot\frac{5\sqrt{29}\cdot\sqrt{29}}{2} = \frac{4\cdot 5\cdot 29}{2\cdot 2\cdot 29} = 5$$

Ответ: $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{5}$; $S_{\triangle}AED = 5$.

№3

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} & (1) \\ 2y+x^2=9 & (2) \end{cases}$$

возведем (1) в квадрат $\quad y^2-4xy+4x^2=xy$

$$y^2-5xy+4x^2=0$$

$$(y-4x)(y-x)=0$$

$$\left[\begin{array}{ll} 1)\; x=y & 1) \\ 2)\; y=4x & 2) \end{array}\right.$$

1) если $x=y$ подставим во (2) равенство

$$2x+x^2=9$$

$$(x+1)^2=10$$

$$y=x=-1\pm\sqrt{10}$$

2) если $y=4x$ подставим во (2) равенство

$$2y+16y^2=9$$

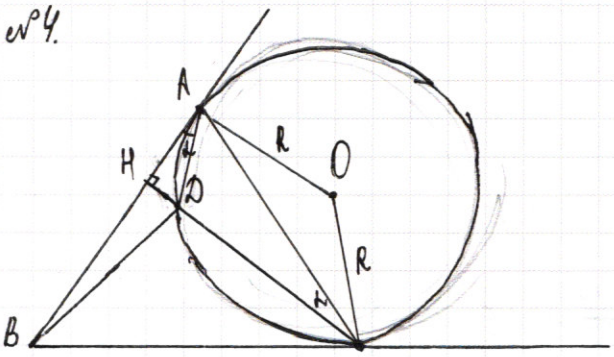
$$y^2+2\frac{y}{16}=\frac{9}{16}$$

$$\left(y+\frac{1}{16}\right)^2=\frac{145}{144}$$

$$y=\frac{\pm\sqrt{145}-1}{\cancel{144}\,16} \Rightarrow x=\frac{\pm\sqrt{145}-1}{64}$$

Ответ: $(-1-\sqrt{10};\,-1-\sqrt{10})$, $(-1+\sqrt{10};\,-1+\sqrt{10})$, $\left(\frac{-\sqrt{145}-1}{64};\,\frac{-\sqrt{145}-1}{16}\right)$, $\left(\frac{+\sqrt{145}-1}{64};\,\frac{\sqrt{145}-1}{16}\right)$

№4.



Решение:

$$AB=\frac{2S}{DH}=\frac{30}{DH}$$

$$\frac{AB}{CH}=\frac{30}{DH\cdot CH}$$

$$\angle HAD=\angle ACD=\alpha$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$DH = \sin\alpha \cdot AD$

по Th. синусов: $AD = 2R \cdot \sin\alpha = 12\sin\alpha$

$DH = 12\sin^2\alpha$

$CH = \cos\alpha \cdot AC$

$AC = 2R \cdot \cos(90-\alpha) = 12 \cdot \sin\alpha$

$CH = 12\cos\alpha \cdot \sin\alpha$

$\frac{AB}{CH} = \frac{30}{12 \cdot 12 \cdot \sin^3\alpha \cdot \cos\alpha}$

№6.

$x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0$

$x \leq 0$

$D < 0$

$D = 4 - 4(y^2 - 3y) = -4y^2 + 12y + 4 < 0$

$y^2 + 3y + 1 \geq 0$

$y \geq \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$

$y \leq \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

12

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\le 0$$

1. числитель $(x-1)^2+4-4|x-1| \geq 0$

$(x-1)(x-1)+4-4|x-1|$ $\quad 4|x-1| \le 4$

$|x-1|\le 1$

$2\le x\le 0$

$29\left(1+\frac{25}{4}\right)=\frac{29}{4}$

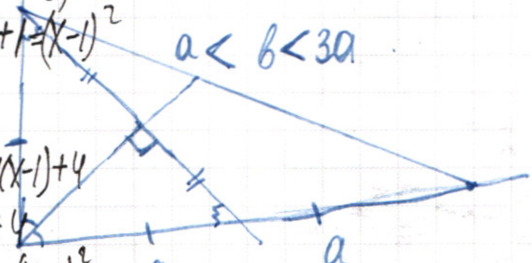
$\frac{29}{2}=1$

$(x-1)(x-1)+4(x-1)+4$

$(x-1)(x+3)+4$

$x^2-2x+1=(x-1)^2$

$a< b<3a$



$(x-1)(x-1)-4(x-1)+4$

$(x-1)(x-5)+4$

$x^2-6x+4=(x-3)^2-5$

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$

$\frac{AD}{AC}-?$ $\quad \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

$S=ED\cdot AE$

$y-2x=\sqrt{xy}$

$2y+x^2=9$

11

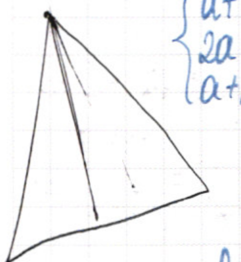
16

$\frac{12}{31}$

	S
1	30
2	40
3	40
4	50
5	50
6	50
7	50
	310

−	76	72	152
−	75	75	150
+	74	78	148

+	51	147	102
−	50	150	100
−	49	153	98



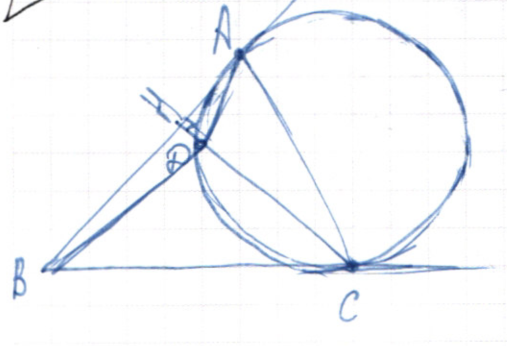
$\begin{cases} a+b>2a \\ 2a+b>a \\ a+2a>b \end{cases}$ $\quad \begin{cases} b>a \\ b>-a \\ b<3a \end{cases}$ $\quad a<b<3a$

$3a+b=300$

$a \quad a+1 \quad 2a = 4a+1=300 \Rightarrow a=$

$a \quad 3a-1 \quad 2a = 6a-1=300\Rightarrow a=60$

$\frac{AB}{CH}$ $\quad S_\triangle ABD=15 \Rightarrow AB=\frac{15}{DH}=\frac{2S}{CH-CD}=\frac{30}{(CH-CD)(CH)}$



$r=6$

$29^2+\frac{25\cdot 29}{4}=\frac{4\cdot 29^2+25\cdot 29}{4}=29($

$\frac{AD}{AC}-?$ $\quad S_\triangle AED$

$AC=\sqrt{29}$

$BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$

$\angle CED=45$

$x=4$

$9-8\cdot 4$

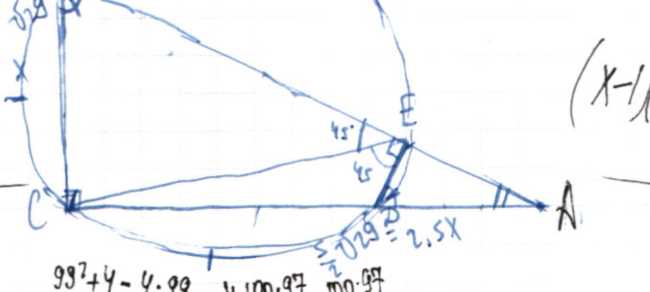
$8-8\cdot 4=-8\cdot 3=-24$

$\frac{9+4}{13}$ $\quad$ 12

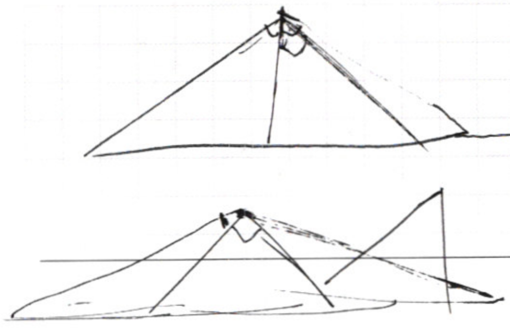
$16-8$

$8+5$

$13-4(3)=1$



$(x-1)(x-1)-4|x-1|+4$



$99^2+4-4\cdot 99$ $\quad 4\cdot 100\cdot 97$ $\quad 100\cdot 97$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$(x-1)(x-1)+4(x-1)+4=(x-1)(x+3)+4=x^2+2x+4=(x+1)^2+3$

ост. 2 часа

1,5

1 час

45 мин

$y-2x=\sqrt{xy}$

$2y+x^2=9$

$y^2-4xy+4x^2=|xy|$

$2y+x^2=9$

$y=\frac{(x-3)(x+3)}{2}$

$\frac{x^2-9}{2}-2x=\sqrt{xy}$

$\frac{x^2-4x-9}{2}=\sqrt{xy}$

9 4

$\frac{13}{2}>6$

$\frac{x+y}{2}>\sqrt{xy}$

$y^2-4xy+4x^2=xy$

$y^2-5xy+4x^2=0$

$(y-4x)(y-x)=0$

$x=y$ или $y=4x$

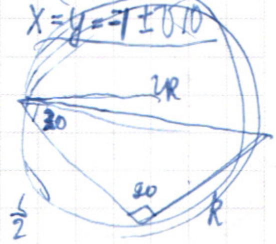
$x^2+2x=9$

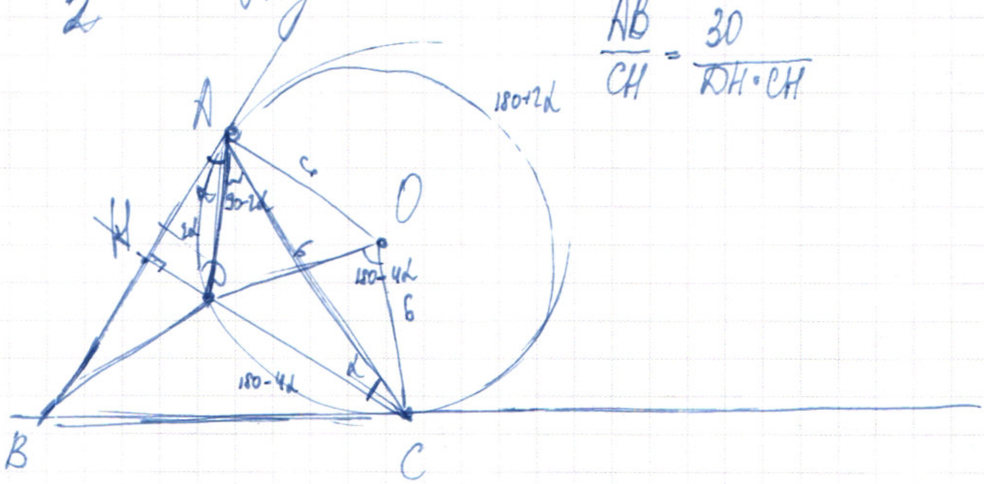
$(x+1)^2=10$

$x=y=-1\pm\sqrt{10}$

$AB=\frac{2S}{DH}=\frac{30}{DH}$

$\frac{AB}{CH}=\frac{30}{DH\cdot CH}$





$DH=\sin\alpha\cdot AD=12\sin^2\alpha$

теорема синусов: $\frac{AD}{\sin\alpha}=2R$

$AD=2R\cdot\sin\alpha=12\sin\alpha$

$CD=2R\sin(90-2\alpha)=2R\cdot\cos 2\alpha=12\cos 2\alpha$

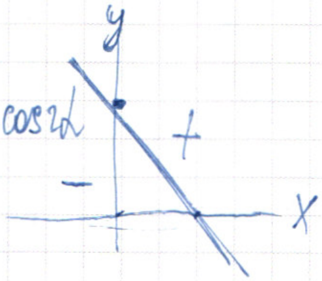
$|3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6$

$x^2-2x-3y+y^2\le 0$

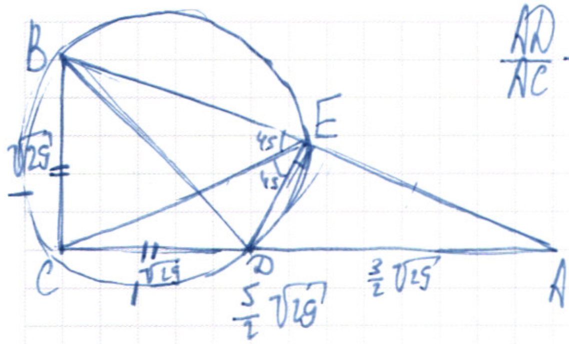
D

$3x+2y \vee 6$

x



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{AD}{AC}$ – ? $S_{\triangle AED}$ – ?
ED · AD

30 мин.

$\triangle ABC \sim$

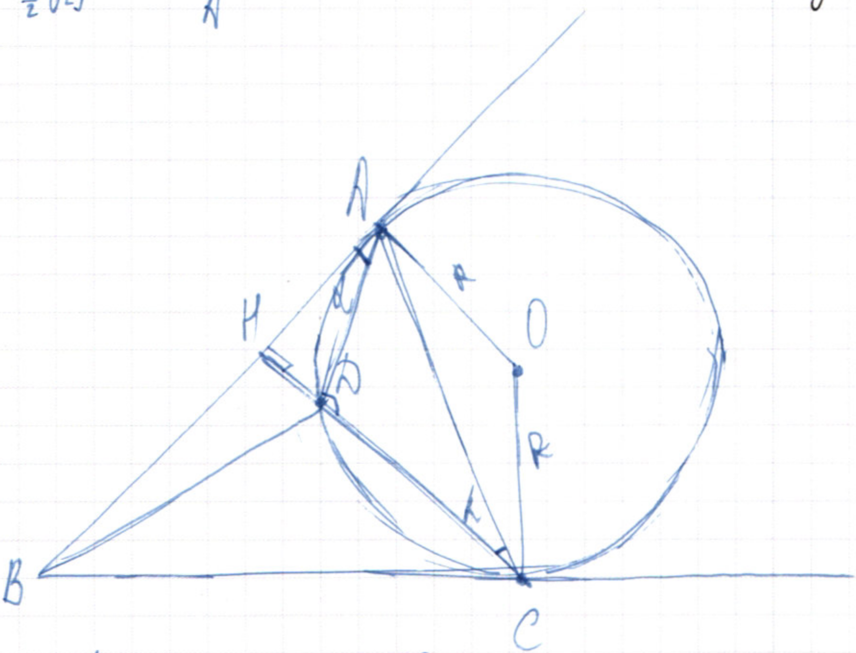
$16y^2+2y=9$

$y^2+\frac{4}{16}\cdot 2 \quad \frac{9}{16}$

$9\cdot 16 = 90 \; 54$
144

$14.5 \,|\, \frac{5}{129}$

$16\cdot 4 = 64$



$S=\frac{1}{2}AB\cdot DH$

$AB=\frac{2S}{DH}$

$\frac{AB}{CH}=\frac{30}{DH\cdot CH}=\frac{30}{(CD+DH)DH}$

$DH=\sin\alpha\cdot AD$ $AD=2R\cdot\sin\alpha=12\sin\alpha$

$CH=\cos\alpha\cdot AC$

$AC=2R\cdot\cos(90-\alpha)=12\sin\alpha$

$DH=12\sin^2\alpha$

$CH=12\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$X\le 0$

$D\le 0$

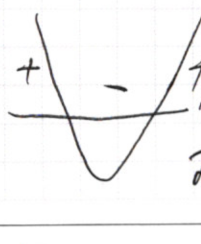
$4-4(y^2-3y)=$

$=-4y^2+12y+4\le 0$

$y^2+3y+1\ge 0$

$(y+1{,}5)^2\ge\frac{5}{4}$

$y\ge-\frac{3\pm\sqrt5}{2}$



$\frac{9}{4}$

$\frac{\sqrt5}{2}$

$D=9-4=\sqrt5$

$\frac{-3\pm\sqrt5}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)