МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED=45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 19$, $3 \leqslant y \leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

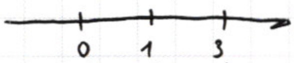
№1. $\dfrac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|} \le 0;$

Рассмотрим уравнение на интервалах, чтобы понять, как в каждом случае будут раскрыты модули:

нули модулей: $x=0$

$x-1=0 \Rightarrow x=1;$

$x-3=0 \Rightarrow x=3;$



	$x<0$	$0\le x<1$	$1\le x<3$	$x\geq 3$
$\|x\|$	−	+	+	+
$\|x-1\|$	−	−	+	+
$\|x-3\|$	−	−	−	+

при $x<0$:

$\dfrac{x^2-2x+5-4(1-x)}{4x^2-12x+(-x)(-x+3)} \le 0;$

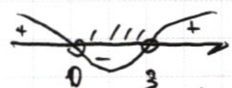
$\dfrac{x^2-2x+5-4+4x}{4x^2-12x+x^2-3x} \le 0;$

$\dfrac{x^2+2x+1}{5x^2-15x} \le 0;$

$\dfrac{(x+1)^2}{5x(x-3)} \le 0;$

т.к. $5x(x-3)\neq 0$; $(x+1)^2 \geq 0$

$\left[\begin{array}{l}(x+1)^2=0\\ 5x(x-3)<0\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x(x-3)<0\end{array}\right. \Rightarrow$ 

т.к. мы рассматриваем интервал $x<0$

$x=-1;$

при $0 \le x < 1$:

$$\frac{x^2-2x+5-4(1-x)}{4x^2-12x+x(3-x)} \le 0;$$

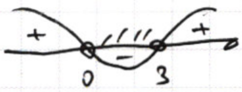
$$\frac{x^2-2x+5-4+4x}{4x^2-12x+3x-x^2} \le 0;$$

$$\frac{x^2+2x+1}{3x^2-9x} \le 0;$$

$$\frac{(x+1)^2}{3x(x-3)} \le 0;$$ т.к. $(x+1)^2 \geq 0$; $3x(x-3) \neq 0$

$$\left[\begin{array}{l}(x+1)^2=0\\ 3x(x-3)<0\end{array}\right.$$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x(x-3)<0\end{array}\right.$



т.к. $0 \le x < 1$ $\quad x \in (0;1)$

при $1 \le x < 3$:

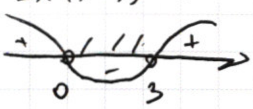
$$\frac{x^2-2x+5-4(x-1)}{4x^2-12x+x(3-x)} \le 0;$$

$$\frac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x+3x-x^2} \le 0;$$

$$\frac{x^2-6x+9}{3x^2-9x} \le 0;$$

$$\frac{(x-3)^2}{3x(x-3)} \le 0;$$ т.к. $3x(x-3) \neq 0 \Rightarrow (x-3) \neq 0$; $(x-3)^2 > 0$

$3x(x-3) < 0$ (т.к. $(x-3)^2 \neq 0$)



$\Rightarrow$ т.к. $x \in [1;3)$ (интервал)

$x \in [1;3)$

при $x \geq 3$:

$$\frac{x^2-2x+5-4(x-1)}{4x^2-12x+x(x-3)} \le 0;$$

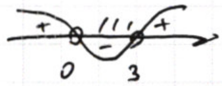
$$\frac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x+x^2-3x} \le 0$$

$$\frac{x^2-6x+9}{5x^2-15x} \le 0;$$

$$\frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} \le 0;$$ т.к. $5x(x-3)\ne 0$; $\Rightarrow (x-3)\ne 0 \Rightarrow (x-3)^2\ne 0$

$\Rightarrow (x-3)^2>0$

$\Rightarrow 5x(x-3)<0;$



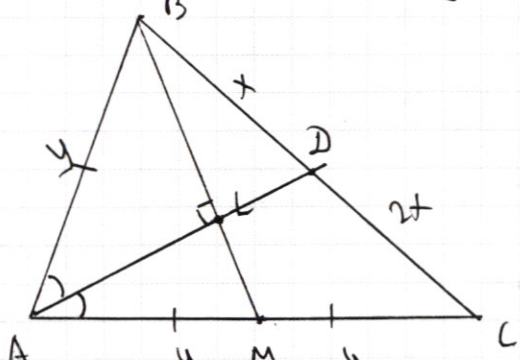
$\Rightarrow x\in(0;3)$ но мы рассматриваем $x\in[3;+\infty)$

$\Rightarrow x=\varnothing$

$\Rightarrow$ Ответ: $x\in\{-1\}\cup(0;3)$.

№2. Понятно, что перпендикулярные медиана и биссектриса выходят из разных углов, т.к. иначе бы получилось, что $\frac{1}{2}$ какого-то угла превосходит $90°$ $\Rightarrow$ один из углов превосходил бы $180°$, что невозможно;

Рассмотрим треугольник, удовлетворяющий условию:



Пусть в $\triangle ABC$ BM - медиана; AL - биссектриса $\Rightarrow$ $BM\perp AL$

Рассмотрим $\triangle ABM$ ~~и $\triangle ABL$~~ - он равнобедренный, т.к. в нем совпадают биссектриса и высота $\Rightarrow AB=AM$

Продолжим биссектрису до $\cap$ с BC (пусть $AL\cap BC=D$); тогда по теореме об отрезках, на которые биссектриса делит противолежащую сторону,

$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2}$, тогда пусть $BD=x$; $DC=2x$; $AB=y$; $AC=2y$

$\Rightarrow P_{\triangle ABC}=3x+3y=300 \Rightarrow x+y=100$; т.к. y-целое (стороны

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{x^2-6x+9}{5x^2-15x} \le 0;$

$\frac{(x-3)^2}{5x(x-3)} \le 0;$ т.к. $5x(x-3) \neq 0 \Rightarrow (x-3) \neq 0 \Rightarrow (x-3)^2 \neq 0$

$(x-3)^2 > 0$

$\Rightarrow 5x(x-3) \le 0;$

$+ \quad 0 \quad - \quad 3 \quad +$

$x \in (0;3)$ но т.к. $x \in [3;+\infty)$

$x = \varnothing$

$\Rightarrow$ Ответ: $x \in \{-1\} \cup (0;3)$.

$3x+2y \frac{2x}{x} 6 \quad y<0 \quad \cancel{3x}-2y+6 \cancel{+2y} \cancel{3x} > 6$

$3x > 12;$

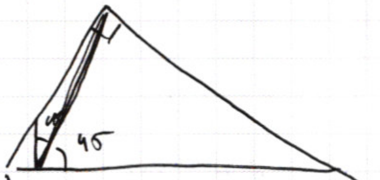
$x > 4$

$-4y > 12$

$y < -3;$

$45 - 26 = 23$

4



$x^3+11x^2+9x-81 \,\big|\, x+9$

x^2+2x-9

$-x^3 + 9x^2$

$2x^2+9x$

$-2x^2+18x$

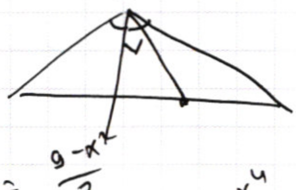
$-9x-81$

$D = 4+36 = 40$

$\frac{-2 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -1 \pm \sqrt{10}$

№3. $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}; \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \Rightarrow y-2x \geq 0$

$\sqrt{xy} \geq 0$ всегда; $xy \geq 0$



$\begin{cases} (y-2x)^2 = xy \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$ $\quad y = \frac{9-x^2}{2}$

$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy \\ x^2=9-2y \end{cases}$

$\begin{cases} y^2-4(\end{cases}$

$\frac{81-18x^2+x^4}{4} - 5x\left(\frac{9-x^2}{2}\right)+4x^2=0$

$\frac{81-18x^2+x^4}{4} - \frac{45\cancel{x}+5x^3}{2}+4x^2=0;$

$81-18x^2+x^4-90x+10x^3+16x^2=0;$

$81-18x^2+x^4-90x+81=0;$

$x^4+10x^3-2x^2 \cancel{+81} -90x+81$

$1+10-2-90+81$

$x^4+10x^3-2x^2-90x+81 \,\big|\, x-1$

$x^3+11x^2+9x-81$

$-x^4-x^3$

$11x^3-2x^2$

$-11x^3-11x^2$

$9x^2-90x$

$-9x^2-9x$

$-81x+81$

$-27+99+27-81$

147

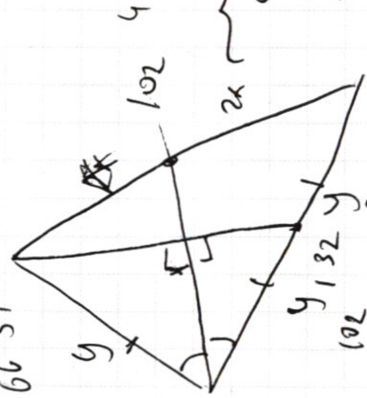
132

51

45:3

102

2x



$y \; 132 \; \frac{81}{+9} \; 102 \; 3x \le 3y$

$34 \; 66$

$x+y=103$

$45 \; 51$

x - угол

$3x \le 3y \quad :3$

$y > x$

$2x > y$

$2x < x+y < 3x$

$2x < 103 < 3x$

$x+y$

$881 - 81 - 81$

$102 \; 68$

$34 \; 98$

45

66 51

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ~~2~~

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

усиливании) $\Rightarrow$ x - тоже целое;

Из неравенства треугольника:

$3y > 3x \Rightarrow y > x$;

$y + 3x > 2y$; $\Rightarrow 3x > y$;

~~$-\begin{cases} y > x \\ 3x > y \end{cases}$ т.к. все числа в неравенствах положительные, ... этих случаях~~

~~$3x - y > y - x$;~~

Знаем:

$\begin{cases} x < y < 3x \\ x + y = 100 \end{cases}$

$\Rightarrow 2x < x + y < 4x$

$\Rightarrow 2x < 100 < 4x$ это выполняется при x от 26 до 49 включительно

$x < 50 < 2x$

при нахождении y и подставлении полученных значений в неравенство Δ оно выполнится (например: 74; 78; 148; или 51; 102; 147)

$\Rightarrow$ всего таких Δ 24 $(49 - 26 + 1)$

Ответ: 24.

№3. $\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$ Заметим, что обязательно условие $y-2x\geqslant 0$; $xy\geqslant 0$;

$\begin{cases} (y-2x)^2=xy \\ 2y+x^2=9 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2-4xy+4x^2=xy \\ y=\frac{9-x^2}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} y^2-5xy+4x^2=\cancel{xy}\ 0 \\ y=\frac{9-x^2}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} \left(\frac{9-x^2}{2}\right)^2-5x\cdot\frac{9-x^2}{2}+4x^2=0 \quad \Big|\cdot 4 \\ y=\frac{9-x^2}{2} \end{cases}$

Рассмотрим отдельно 1-ое уравнение

$81-18x^2+x^4-90x+10x^3+16x^2=0$;

$x^4+10x^3-2x^2-90x+81=0$; $\quad x:\pm1;\pm3;\pm9;\pm81;\pm27$

при $x=1$: $1+10-2-90+81=0$;

$\Rightarrow$ $x^4+10x^3-2x^2-90x+81 \,\big|\, x-1$

$-\ x^4-x^3 \qquad x^3+11x^2+9x-81$

$11x^3-2x^2$

$-\ 11x^3-11x^2$

$9x^2-90x$

$-\ 9x^2-9x$

$-81x+81$

$-\ -81x+81$

0

Рассмотрим $x^3+11x^2+9x-81=0$;

при $x=-9$: $-729+891-81-81=0$

$\Rightarrow$ $x^3+11x^2+9x-81 \,\big|\, x+9$

$-\ x^3+9x^2 \qquad x^2+2x-9$

$2x^2+9x$

$-\ 2x^2+18x$

$-9x-81$

$-\ -9x-81$

0

Рассмотрим $x^2+2x-9=0$

$D=4+36=40$

$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm2\sqrt{10}}{2}=$

$=-1\pm\sqrt{10}$

$\Rightarrow$ $x^4+10x^3-2x^2-90x+81 = (x-1)(x+9)(x+1-\sqrt{10})(x+1+\sqrt{10}) = 0$

$\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-9 \\ x=-1+\sqrt{10} \\ x=-1-\sqrt{10} \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ $y = 4; -36; -1+\sqrt{10}; -1-\sqrt{10}$

Проверим условия:

$y-2x \geq 0;$ при $x=1; y=4$: при $x=-9; y=-36$:

$xy \geq 0$ $\quad 4-2 \geq 0;$ $\quad (-9)\cdot(-36) \geq 0;$

$1\cdot 4 \geq 0$ $\quad -36+18 < 0$ $\Rightarrow$ не подходит

при $x=-1+\sqrt{10}$; $y=-1+\sqrt{10}$

$x\cdot y = (-1+\sqrt{10})^2 \geq 0;$

$-1+\sqrt{10}+2-2\sqrt{10} = 1-\sqrt{10} < 0$ $\Rightarrow$ не подходит

при $x=-1-\sqrt{10}$; $y=-1-\sqrt{10}$;

$x\cdot y = (-1-\sqrt{10})^2 \geq 0$

$-1-\sqrt{10}+2+2\sqrt{10} = 1+\sqrt{10} \geq 0;$

$\Rightarrow$ Ответ: $(1;4)$; $(-1-\sqrt{10}; -1-\sqrt{10})$.

№6. $\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y| > 6 \\ x^2-2x-3y+y^2 \leq 0 \end{cases}$

Рассмотрим несколько ситуаций:

1) при $x<0$ и $y<0$

во 2-ом неравенстве: $x^2-3x-2y+y^2$ все слагаемые ≥ 0

$\Rightarrow$ этого не может быть;

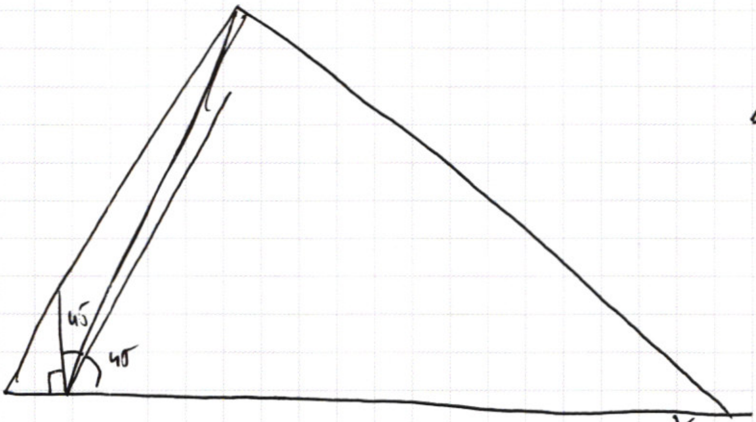
2) при $x \geq 0$ и $y \geq 0$ и $3x+2y \geq 6$:

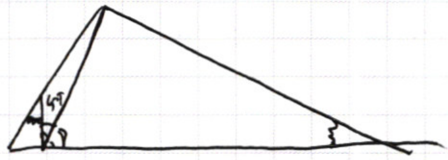
из 1-го: $3x+2y-6+3x+2y > 6$;

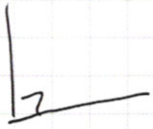
$3x+2y > 6$, $\quad x^2-(2x+3y)+y^2 \leq 0$ - противоречие нет.

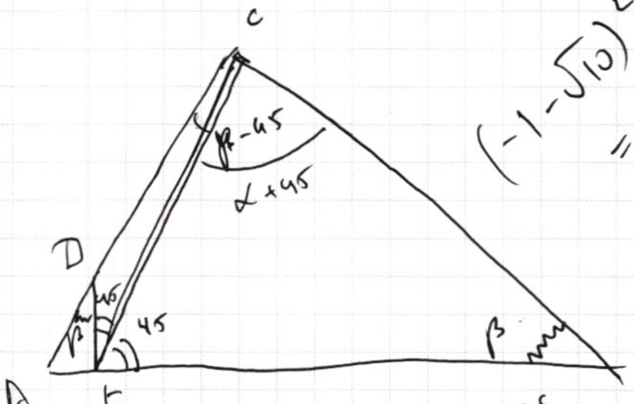
☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА









$(-1-\sqrt{10})^2 = (1+\sqrt{10})^2 = 11+2\sqrt{10}$

$\sin 90 - \sin 30$

1

$= \dfrac{-2+2\sqrt{10}}{-1+\sqrt{10}}$

$-2-2\sqrt{10}+11$

$1+\sqrt{10}$

$\dfrac{25}{4} = 6{,}25$

$\dfrac{DE}{\cos\beta} = AD \qquad \cos\beta = \dfrac{DE}{AD}$

$\dfrac{CE}{\sin\beta} = \dfrac{AC}{\sin 45}; \quad AC = \dfrac{CE}{\cos\beta} \cdot \sin 45$

$\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DE}{\cancel{\cos\beta}} \cdot \dfrac{\cancel{\cos\beta}\, tg\beta}{CE \cdot \sin 45} = \dfrac{DE \cdot tg\beta}{CE \sin 45}$

$(x+1-\sqrt{10})(x+1+\sqrt{10})$

$x^2+x+\sqrt{10}x+x+1+\sqrt{10} - \sqrt{10}x - \sqrt{10} - 10$

$\dfrac{EC}{\sin\beta} = \dfrac{DE}{\sin(\beta-45)} \Rightarrow$

$\dfrac{DE}{EC} = \dfrac{\sin(\beta-45)}{\sin\beta} \; tg\beta \; \cos\beta$

$\sin(\beta-45)\cdot\cos\beta)$

$\sin\theta \cdot \sin 45$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$1 \cdot \sqrt{2}/2$

$\sqrt{3}/2 \cdot$

$\sqrt{6}/4$

25

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) при $x \geq 0$ и $y \geq 0$ и $3x+2y \leq 6$:

$3x+2y+6-3x-2y>6$;

$6>6$ - противоречие;

4) при $x<0$ и $y \geq 0$ и $3x+2y \geq 6$;

$-3x+2y-6+3x+2y>6$;

$y>3$;

в этом промежутке точек нету;

5) при $x<0$ и $y \geq 0$ и $3x+2y \leq 6$:

$-3x+\cancel{2y}+6-3x-\cancel{2y}>6$;

$-6x>0$;

$x<0$ нет противоречий;

6) при $x \geq 0$ и $y<0$ и $3x+2y>6$;

$3x-\cancel{2y}-6+3x+\cancel{2y}>6$;

$x>2$; нет противоречий;

7) при $x \geq 0$ и $y<0$ и $3x+2y \leq 6$:

$3x-2y+6-3x-2y>6$;

$-4y>0$;

$y<0$ - нет противоречий;

Заметим, что $x^2-2x-3y+y^2 \leq 0$

$(x-1)^2+(y-1{,}5)^2-1-2{,}25 \leq 0$;

$(x-1)^2+(y-1{,}5)^2 \leq 3{,}25$

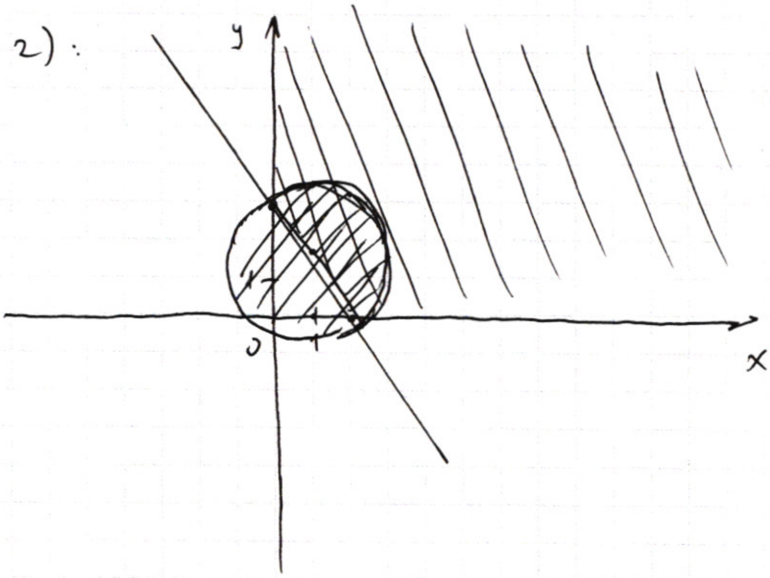
т.е. круг с центром $(1;1{,}5)$ и радиусом $\sqrt{3{,}25}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) при $3x+2y>6$

$y > 3-1{,}5y$ т.е. область выше графика $y=3-1{,}5x$)

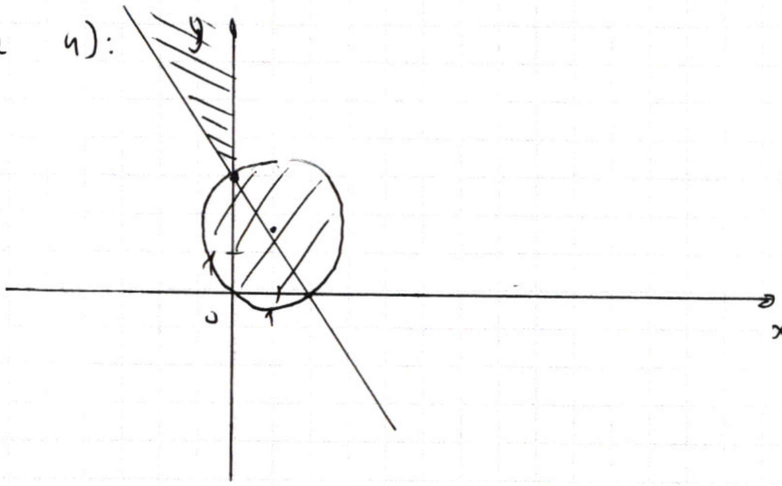
при $3x+2y \le 6$ область ниже этого графика;

для 2):



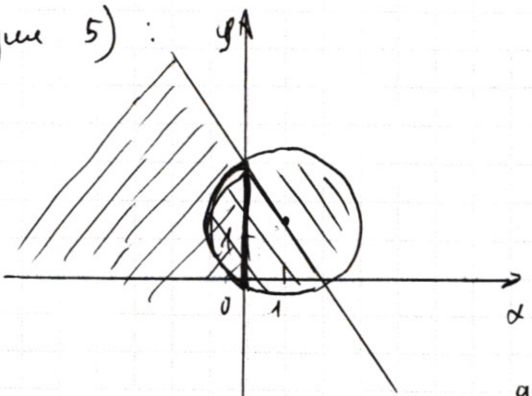
XXX – решение системы

для 4):



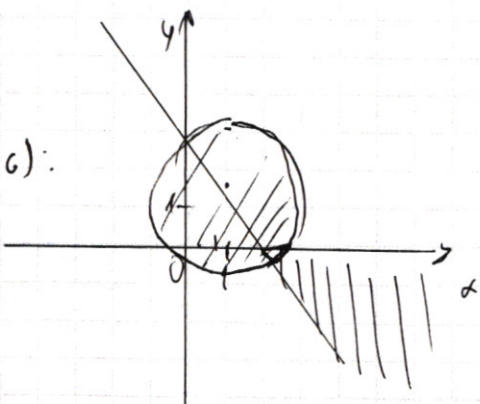
решение единственно $(0;3)$

для 5):

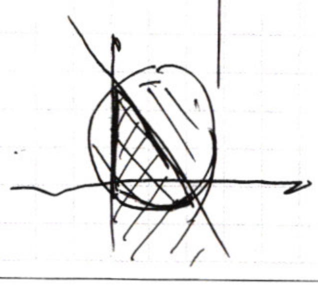


XXX – решений нет

для 6):



для 7):

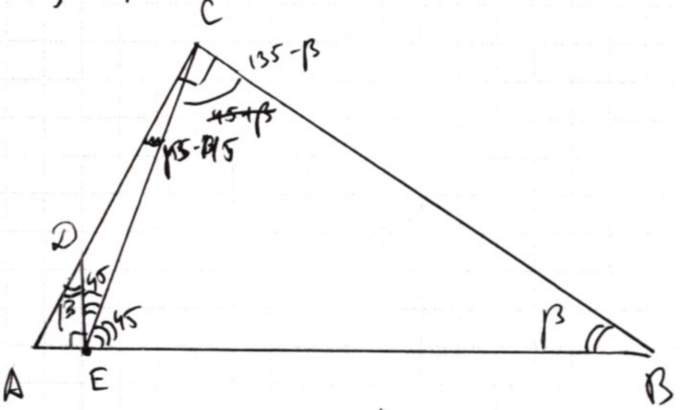


=> вместе выделенная область для S круга: $\frac{2}{4}\pi\cdot 3{,}25$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: 3,25П.

№5.



Дано: $\triangle ABC$; $\angle C = 90°$

$D \in AC$; $E \in AB$;

$DE \perp AB$; $AC = \sqrt{29}$;

$BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$; $\angle CED = 45°$

Найти: $\frac{AD}{AC}$; $S_{\triangle AED}$

Решение:

Заметим, что т.к. $DE \perp AB$, $\angle DEC = 45° \Rightarrow \angle CEB = 45° \ (= 90° - 45°)$

Пусть $\angle B = \beta$, тогда $\angle ADE = \beta$ $(90° - \angle A)$

т.к. $\angle ADE$ – внешний к $\triangle EDC$, $\angle DCE + \angle DEC = \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DCE = \beta - 45°$;

тогда в прямоугольном $\triangle ADE$ $\cos\beta = \frac{DE}{AD} \Rightarrow$

$\Rightarrow AD = \frac{DE}{\cos\beta}$;

По теореме синусов в $\triangle ECA$: $\frac{CE}{\sin(90° - \beta)} = \frac{AC}{\sin 135°} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CE}{\cos\beta} = \frac{AC}{\sin 45} \Rightarrow AC = \frac{CE \cdot \sin 45}{\cos\beta} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{\cancel{\cos\beta}} \cdot \frac{\cancel{\cos\beta}}{CE \cdot \sin 45} = \frac{DE}{CE \cdot \sin 45}$;

Из $\triangle EDC$ по теореме синусов:

$\frac{EC}{\sin(180° - \beta)} = \frac{DE}{\sin(\beta - 45)} \Rightarrow \frac{DE}{EC} = \frac{\sin(\beta - 45)}{\sin\beta} \Rightarrow$

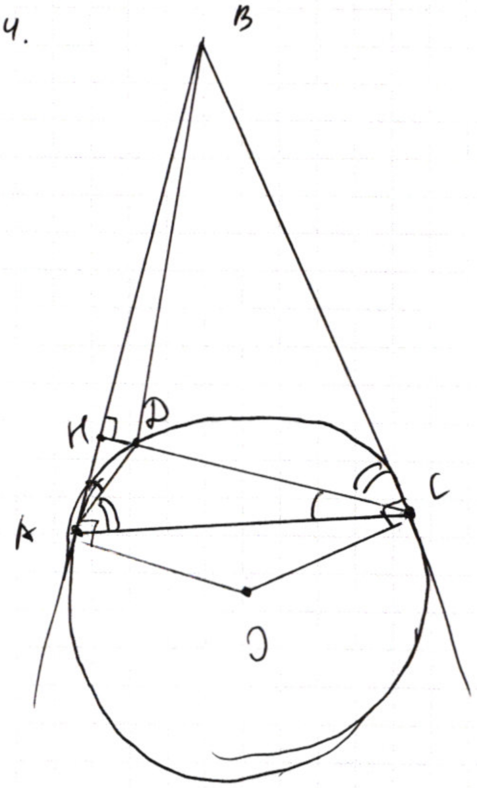
$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{\sin(\beta - 45)}{\sin\beta \cdot \sin 45}$; Заметим, что $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (по двум $\angle$) $\Rightarrow \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = k^2$, где

- коэффициент пропорциональности Δ

$k = \frac{AD}{AC}$; $S_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{5\sqrt{29}}{2} \cdot \sqrt{29} = 1{,}25 \cdot 29 = 36{,}25$

$\Rightarrow S_{\Delta ADE} = 36{,}25 \cdot \frac{AC^2}{AD^2} = 36{,}25 \cdot \frac{\sin^2\beta \cdot \sin^2 45}{\sin^2(\beta - 45)}$

№4.



$\frac{AB}{CH} = ?$

т.к. $S_{\Delta ABD} = 15 = \frac{AB \cdot HD}{2} \Rightarrow AB = \frac{30}{HD}$

$\Rightarrow \frac{AB}{CH} = \frac{30}{HD \cdot HC}$

$HD \cdot HC$ – степень точки $H = AH^2$

$\Rightarrow \frac{AB}{CH} = \frac{30}{AH^2}$;

Также в решении можно использовать теорему синусов для ΔADC, где будет использоваться радиус.

№7. Заметим, что для чисел представимых как произведение двух простых верно: $f(p_1 \cdot p_2) = f(p_1) + f(p_2) = p_1 + p_2$;

$f(p_1 \cdot p_2 \cdot p_3) = f(p_1) + f(p_2) + f(p_3) = p_1 + p_2 + p_3$

$\Rightarrow$ для любых чисел ~~представимых как~~ верно

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\le 0;$$

$0 \quad 1 \quad 3$

$-\quad x-1 \quad -x-1 \quad +x-1 \quad +$

$-\quad x \quad +x \quad +x \quad +$

$-\quad x-3 \quad -x-3 \quad -x-3 \quad +$

при $x\le 0$:

$$\frac{x^2-2x+5-4(1-x)}{4x^2-12x+(-x)(3-x)}\le 0;$$

$$\frac{x^2-2x+5-4+4x}{4x^2-12x+x^2-3x}\le 0;$$

$$\frac{x^2+2x+1}{5x^2-15x}\le 0;$$

$$\frac{(x+1)^2}{5x(x-3)}\le 0; \quad x\ne 0; \quad x\ne 3;$$

$(x+1)^2\ge 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}(x+1)^2=0\\ x=-1;\\ x(x-3)<0\end{array}\right. \Rightarrow$

$+ \quad - \quad +$
$0 \quad 3$

$x\in(0;3)$

т.к. $x\le 0$ $\Rightarrow$ $x=-1$

$$\frac{x^2-2x+5-4(x-1)}{4x^2-12x+x(x-3)}\le 0;$$

$$\frac{(x-3)^2}{4x^2-12x+x^2-3x} \quad 5(x)(x-3)<0$$

при $0\le x\le 1$:

$$\frac{x^2-2x+5-4(1-x)}{4x^2-12x-x(x-3)}\le 0;$$

$$\frac{x^2-2x+5-4+4x}{4x^2-12x-x^2+3x}\le 0;$$

$$\frac{(x+1)^2}{3x^2-9x}\le 0;$$

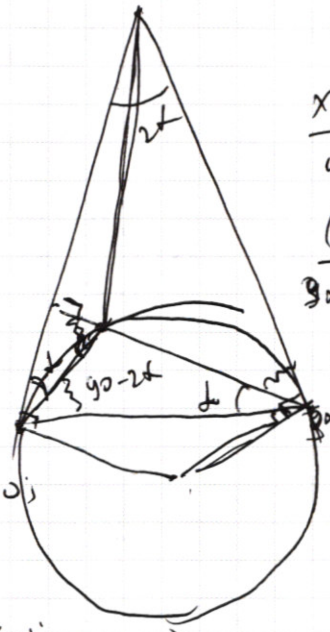
$$\frac{(x+1)^2}{3x(x-3)}\le 0;$$

$\left[\begin{array}{l}x+1=0\\ 3x(x-3)<0\end{array}\right.$

$+ \quad - \quad +$
$0 \quad 3$

$\left[\begin{array}{l}x=-1;\\ x\in(0;1)\end{array}\right.$

$\Rightarrow x\in(0;1)$



$\frac{\cos(2\alpha)}{CD}=$

$\frac{CD}{\cos(2\alpha)}=2\cdot 6;$

$\cos 2\alpha=\frac{4A}{AD}$

при $1\le x\le 3$;

$$\frac{x^2-2x+5-4x+4}{4x^2-12x-x^2+3x}\le 0;$$

$$\frac{x^2-6x+9}{3x(x-3)}\le 0;$$

$$\frac{(x-3)^2}{3x(x-3)}\le 0;$$

$x-3\ne 0;$

$\Rightarrow x(x-3)<0;$

$+ \quad - \quad +$
$0 \quad 3$

$x\in[1;3);$

исп. реш.

$\left\{\begin{array}{l}x<0\\ x^2-2x-3y+y^2\le 0\end{array}\right.$

$(6-3x+2y)$

$3x+2y\le 6;$

$x<0 \quad 3x+2y>6$

$x\ge 0 \quad y\ge 0 \quad 6>6 \quad x$

$6\ge x^2+y^2-2x-3y+y^2\le 0$

$6-6x>6 \quad 6-4y>6$

$x^2-t+y^2\Rightarrow t\ge x^2+y^2$

$f(p_1\cdot p_2) = p_1\cdot p_2$

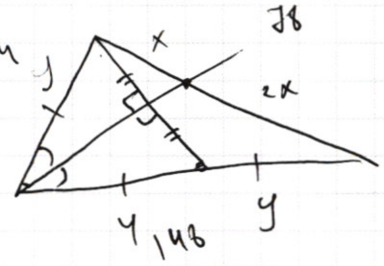
$f(p_1\cdot p_2\cdot p_3) = f(p_1 p_2)+f(p_3) \quad p_1 p_2+p_3$

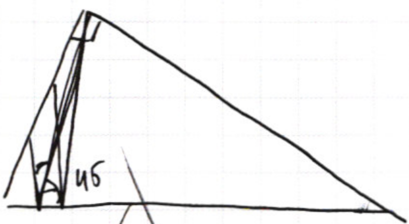
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)





$\frac{29}{4}$

$29 + \frac{25}{4} \cdot 29$

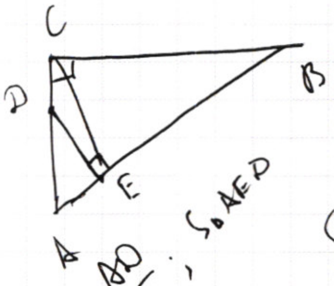
$y + 3x > 2y;$

$3x > y;$

$3y > 3x;$

$y > x;$

$180 - 90 - 180 + 2\alpha$



$3x - y > y - x;$

$4x > 2y > 2x$

$4x > 2y;$

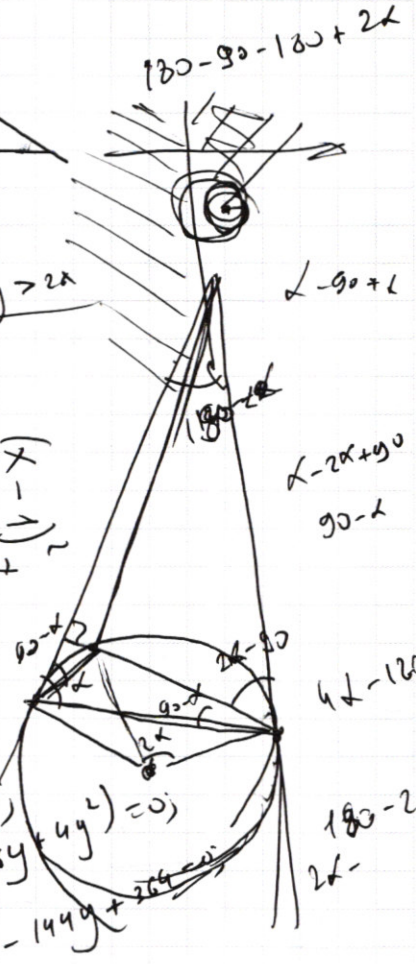
$2x > y;$

$2x > y > x$

$\alpha - 90 + \alpha$

$\alpha - 2\alpha + 90$

$90 - \alpha$



$(x-1)^2 + (y-1,5)^2 = 1 + 2,25$

$\frac{AD}{AC}$; $S_{\triangle AED}$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$x \cdot y \geq 0;$

$y - 2x \geq 0;$

$3x + 2y \leq 6$

$y \leq 3 - 1,5x$

$$\begin{cases} y^2 - 4xy + 4x^2 = xy \\ 2y + x^2 = 9 \end{cases}$$

$x^2 = 9 - 2y$

$y^2 - 5(9-2y)y + 4(9-2y)^2 = 0;$

$$\begin{cases} y^2 - 5(9-2y)y + 4(81 - 36y + 4y^2) = 0; \\ y^2 + 5(2y-9)y \end{cases}$$

$y^2 + 10y^2 - 45y + 16y^2 - 144y + 324 = 0;$

$27y^2 - 189y + 324 = 0;$

$3y^2 - 7y + 12 = 0;$

$(y-3)(y-4) = 0$

$y = 3 \quad x^2 = 9 - 6 = 3 \quad x = \pm\sqrt{3}$

$y = 4 \quad x^2 = 9 - 8 = 1 \quad x = \pm 1$

$y = 4; x = 1$

$2 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12}$

$\sqrt{9}$

$5 > 3$

$-2 > -9$

$S_{\triangle ABD} = 5;$

AHD

DHC

$364 \mid 5$

$324 \mid 27$

$-27 \quad 12$

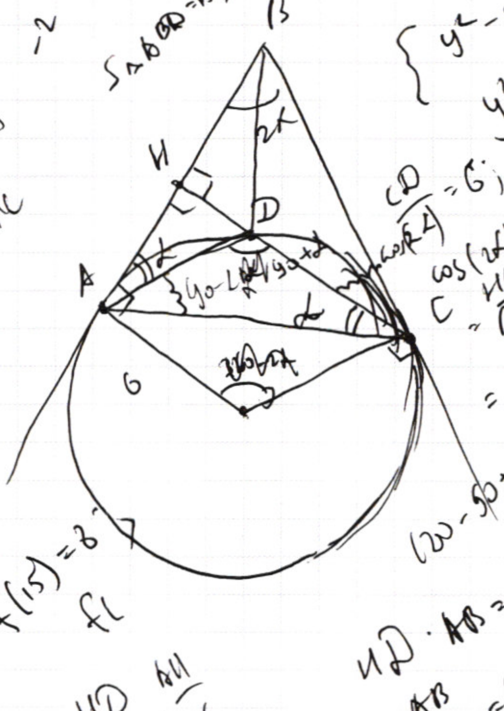
54

$189 \mid 27$

7

$\frac{CD}{\cos(2\alpha)} = 6;$

$\cos(2\alpha) = \frac{HB}{BC} = 1 - \frac{AH}{BC}$



$180 - 90 + 2\alpha - \alpha$

$5 > 2$

$f(15) = 3$

fl

$HD \cdot AB = 15$

$AB = \frac{15}{HD};$

$6 > 5$

$\frac{HD}{AH} = \frac{AH}{HC}$

$\frac{AB}{CH} = ?$

$\frac{15}{HD \cdot CH} = ?$

$= \frac{15}{HA^2}$

fl

x

$f\left(\frac{x}{y}\right) =$

$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$3x > y > x$

$f(9) = f(3) + f(3)$

$f(3) = 6$

$f(1) = f(9) + f(1)$

$f(1) = 0$

$x + y = 100$

$26 \quad 74$

$2x < x + y < 4x$

26