МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE\perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 18$, $1\leqslant y\leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3

$$\begin{cases} \underbrace{x-2y}_{\geq 0} = \underbrace{\sqrt{xy}}_{\geq 0} \quad |\,{}^\wedge 2 \\ x+y^2=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y \geq 0 \\ xy \geq 0 \\ (x-2y)^2 = xy \\ x = 5-y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y \geq 0 \\ xy \geq 0 \\ x^2-5xy+4y^2=0 \\ x=5-y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2y \\ xy \geq 0 \\ (x-4y)(x-y)=0 \\ x=5-y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2y \\ xy \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x-4y=0 \\ x-y=0 \end{array}\right. \\ x=5-y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2y \\ xy \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 5-y^2-4y=0 \\ 5-y^2-y=0 \end{array}\right. \\ x=5-y^2 \end{cases}$$

$5-y^2-4y=0 \quad |\cdot(-1)$

$y^2+4y-5=0$

$y_1=1\,;\ y_2=-5$

$5-y^2-y=0 \quad |\cdot(-1)$

$y^2+y-5=0$

$D=1+20=21$

$y=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

$$\begin{cases} x \geq 2y \\ xy \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-5 \\ y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ \cancel{x=5-y^2} \quad y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \end{array}\right. \\ x=5-y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2y \\ xy \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1 \\ x=4 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-5 \\ x=-20 \end{cases} \text{(не уд-ет усл. } x\geq 2y) \\ \begin{cases} y=\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ x=\frac{-1+\sqrt{21}}{2} \end{cases} \text{(не уд-ет усл. } x\geq 2y) \\ \begin{cases} y=\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \\ x=\frac{-1-\sqrt{21}}{2} \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y = 1 \\ x = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{-1-\sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{-1-\sqrt{21}}{2} \end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(4;1)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}; \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$

1

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leq 0$$

$$\frac{(x^2-6x+9)+1-2|x-3|}{2(x(x-2))+|x(x-2)|} \leq 0$$

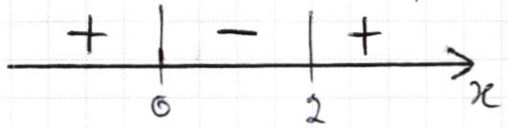
$$\frac{(x-3)^2-2|x-3|+1}{2(x(x-2))+|x(x-2)|} \leq 0$$

$$\frac{(|x-3|-1)^2}{2(x(x-2))+|x(x-2)|} \leq 0$$

т.к. $(|x-3|-1)^2 \geq 0$, то $2(x(x-2))+|x(x-2)| < 0$

Узловые точки: $x=0$, $x=2$

$x(x-2)$



1) $x < 0$

$2(x(x-2))+(x(x-2))<0$

$3(x(x-2))<0$

$x \in (0;2)$

Но $x<0$, зн., $x \in \varnothing$

2) $0 \leq x < 2$

$2(x(x-2))-(x(x-2))<0$

$x(x-2)<0$

$x \in (0;2)$

3) $x \geq 2$

$2(x(x-2))+(x(x-2))<0$

$3(x(x-2))<0$

$x \in (0;2)$

Но $x \geq 2$, зн., $x \in \varnothing$

Объединим полученные решения: $x \in (0;2)$

Ответ: $(0;2)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

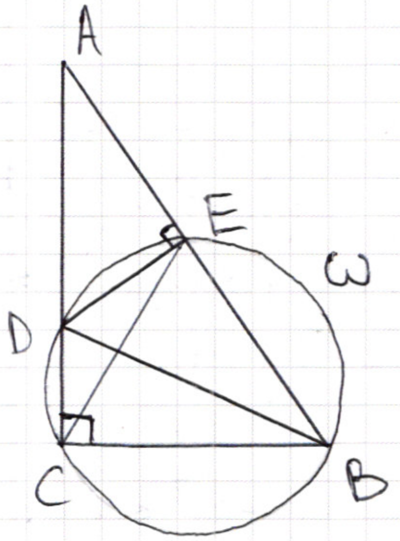
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5



Дано: $\triangle ABC$ – п/у ($\angle C = 90°$)

$D \in AC$, $E \in AB$, $DE \perp AB$

$AC = \sqrt{7}$, $BC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\angle CED = 30°$

Найти: $AD : AC$

$S_{\triangle AED}$

Решение:

Т.к. отрезок BD виден из точек C и E под прямым углом, то около чет-ника $CDEB$ можно описать окр. ω. $\angle CED$ и $\angle CBD$ – вписанные и опираются на CD, зн., $\angle CED = \angle CBD = 30°$.

$\sphericalangle$ $\triangle CBD$ – п/у ($\angle DCB = 90°$), $tg \angle CBD = \frac{CD}{BC}$

$tg\, 30° = \frac{CD}{BC}$

$CD = BC \cdot tg\, 30°$

$CD = 2\sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{7}}{3}$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC - CD}{AC} = \frac{\sqrt{7} - \frac{2\sqrt{7}}{3}}{\sqrt{7}} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$\sphericalangle$ $\triangle ABC$ и $\triangle ADE$, в них $\angle A$ – общий, $\angle ACB = \angle AED = 90°$, зн., $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, $k = \frac{AD}{AB} = \frac{AC - CD}{\sqrt{AC^2 + BC^2}} = \frac{\sqrt{7} - 2\frac{\sqrt{7}}{3}}{\sqrt{7 + \frac{4 \cdot 7}{3}}} =$

$$= \frac{\sqrt{7}\left(1 - \frac{2}{3}\right)}{\sqrt{7}\sqrt{1 + \frac{4}{3}}} = \frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{7}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt{\frac{7}{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{21}}.$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ABC} \cdot k^2 = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot k^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{7} \cdot 2\sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \frac{1}{21} = \frac{\sqrt{7} \cdot 2 \cdot \sqrt{7}}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot 21} = \frac{7}{21\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

6

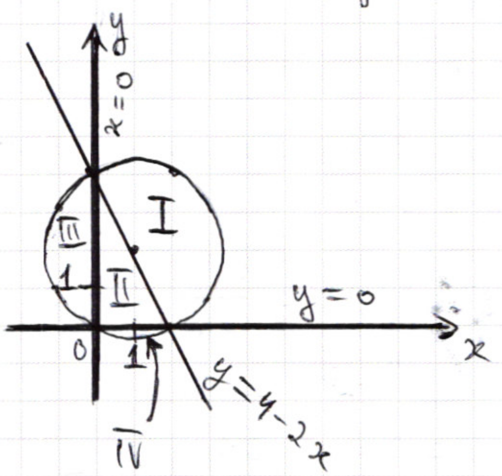
$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4-2x-y| > 4 \\ x^2 - 2x - 4y + y^2 \leq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} |2x| + |y| + |2x+y-4| > 4 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 5 \end{cases}$$

∢ первое ~~ур-ние~~ нер-во системы $|2x| + |y| + |2x+y-4| > 4$

$2x = 0$ $\qquad$ $y = 0$ $\qquad$ $2x + y - 4 = 0$

$x = 0$ $\qquad\qquad\qquad$ $y = 4 - 2x$

∢ второе нер-во системы $(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 5$,
оно описывает круг с центром $(1;2)$ и радиусом $\sqrt{5}$



I) $\begin{cases} y \geq 4-2x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y-4 \geq 0 \\ 2x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$2x + y + 2x + y - 4 > 4$

$4x + 2y - 8 > 0$

$y > 4 - 2x$

II) $\begin{cases} y \leq 4-2x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y-4 \leq 0 \\ 2x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$2x + y - 2x - y + 4 > 4$

$0 > 0$

III) $\begin{cases} y \leq 4-2x \\ x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y-4 \leq 0 \\ 2x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$-2x + y - 2x - y + 4 > 4$

$x < 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{IV}$) $\begin{cases} y \le 4-2x \\ x \ge 0 \\ y \le 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+y-4 \le 0 \\ 2x \ge 0 \\ y \le 0 \end{cases}$

$2x-y-2x-y+4>4$

$y<0$

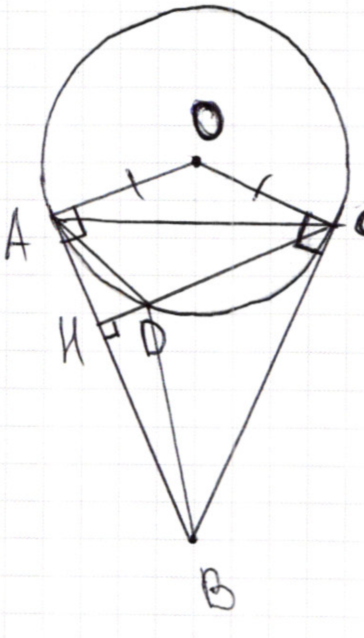
Получим, что искомую фигуру можно получить исключением из круга области $\underline{II}$.

Искомая площадь $S = \cancel{4}\cdot\pi\cdot(\sqrt{5})^2 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4 = 5\pi - 4$

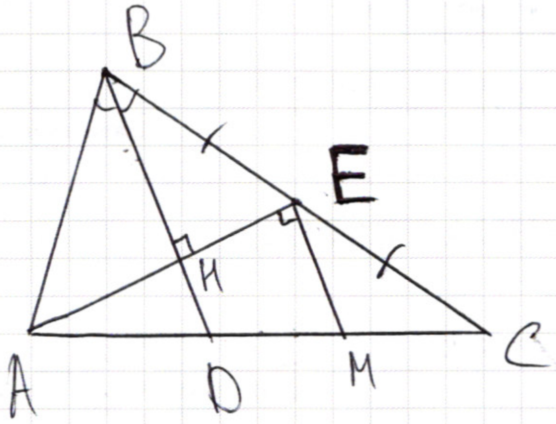
Ответ: $5\pi - 4$

4

Решение:



2

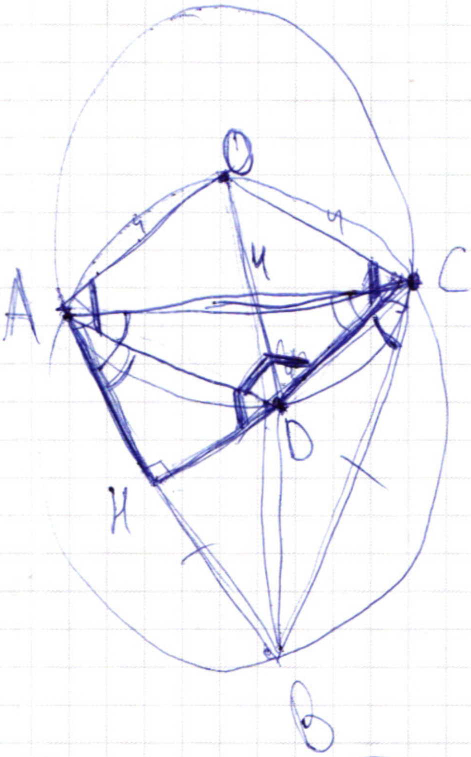


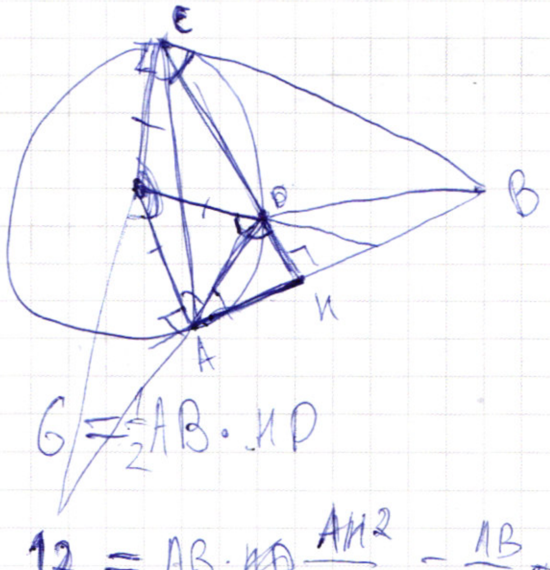
Решение:

∢ $\triangle ABE$, в нём BH – высота и бис-са, зн., $\triangle ABE$ – р/б осн. AE, зн., $AB = BE$, $\angle BAE = \angle BEA$, $AH = HE$. Проведём $EM \parallel BD$, т.к. E – середина BC, то EM – ср. л. $\triangle BCD$, зн., $DM = MC$.

∢ $\triangle AEM$, в нём H – середина AE, $HD \parallel EM$, зн., HD – ср. л. $\triangle AEM$, зн., $AD = DM = MC$.

4.





$6 = \frac{1}{2} AB \cdot HD$

$12 = AB \cdot \cancel{HD} \frac{AH^2}{HC} = \frac{AB}{CH} \cdot AH^2$

$\cancel{AB^2 =}$

$AH^2 = HD \cdot HC$

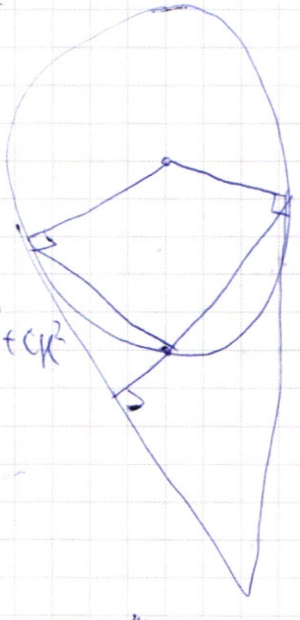
$6 = HD \cdot \frac{1}{2} AB$

$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{AD^2 - HD^2}$

$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R = \frac{ab}{h}$

$\frac{AH^2}{12} = \frac{HC}{AB}$

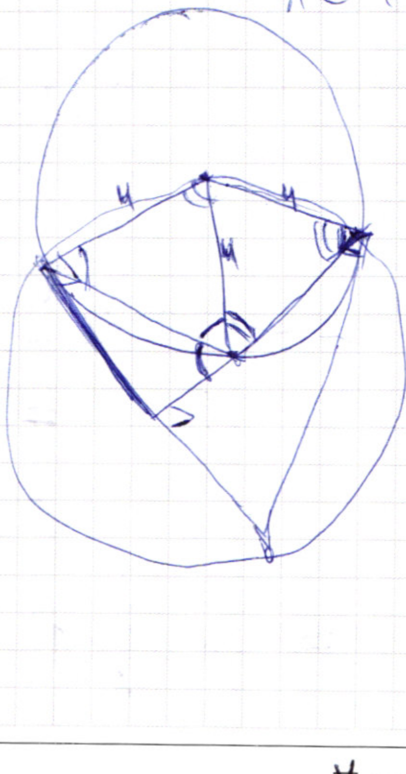
$\frac{AB}{CH} = \frac{12}{AH^2}$



$AC^2 + HD^2 = AD^2 + CK^2$

$8 = \frac{AC \cdot \cancel{AD}}{AH \ \cancel{HD}}$

$\cancel{8 = \frac{AD \cdot AC}{AH}}$



AB

$AH = \cancel{CD \cdot HC - D}$

$HC \cdot HD =$

$= AC$

$\frac{AC}{AD} = \frac{HD}{AH}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \le 0$$

$$(x^2-6x+9)+1-2|x-3| = |x-3|^2-2|x-3|+1 = (|x-3|-1)^2$$

$$x^2-2x+x^2$$

$$(x^2-4x+4)-4+x^2+|x|\cdot|x-2|$$

$$(x-2)^2+x^2+|x|\cdot|x-2|-4$$

$$2x^2(x^2-2x)+|x^2-2x|$$

$$2(x^2-2x)+(x^2-2x)$$

$$2x(x-2)+$$

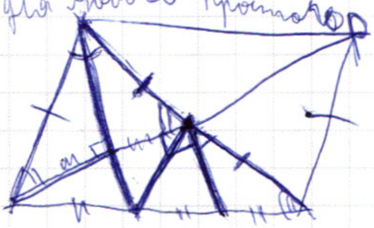
$$x^2-2x-4y+y^2 \le 0$$

$$(x^2-2x)+1+(y^2-4y+4)-4 \le 5$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2 \le 5$$

$$f(ab)=f(a)+f(b)$$

$f(p)=p$ для любого простого



$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy} \\ x+y^2=5 \end{cases} \Big|^{\wedge 2}$$

$x-2y \ge 0$ $\quad x \ge 2y$

$xy \ge 0$

$5-y^2$

$x=5-y^2$

$$5-y^2-2y=\sqrt{5y-y^3}$$

$$x=2y+\sqrt{xy}$$

$$x^2-4xy+4y^2=xy$$

неудает $x^2-5xy+4y^2=0$

$$(x^2-4xy)-(xy-4y^2)=0$$

$$x(x-4y)-y(x-4y)=0$$

$$(x-4y)(x-y)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=4y = 4, -5 \\ x=y = \end{array}\right.$$

4 16, −20

1 1, −5

$$-\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}+\left(\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}\right)^2=$$

$$\frac{-2\mp2\sqrt{21}+1+21\pm2\sqrt{21}}{4}=5$$

$x<0$

$y>0$

$x=0$

$y=0$

$y=4-2x$

$$\left[\begin{array}{l} 5-y^2=4y \\ 5-y^2=y \end{array}\right.$$

$$y^2+4y-5=0$$

$$y^2+y-5=0$$

$$D=1+20=21$$

$y_1=1,\ y_2=-5$

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

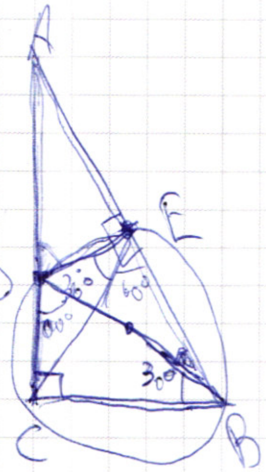
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.



$$\frac{BC}{AC} = \frac{2\sqrt{\frac{7}{3}}}{\sqrt{7}} = 2\sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}$$

tg

0	30	45	60	90
0	$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—

$$CD = BC \cdot tg\, 30° =$$

$$= 2\sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

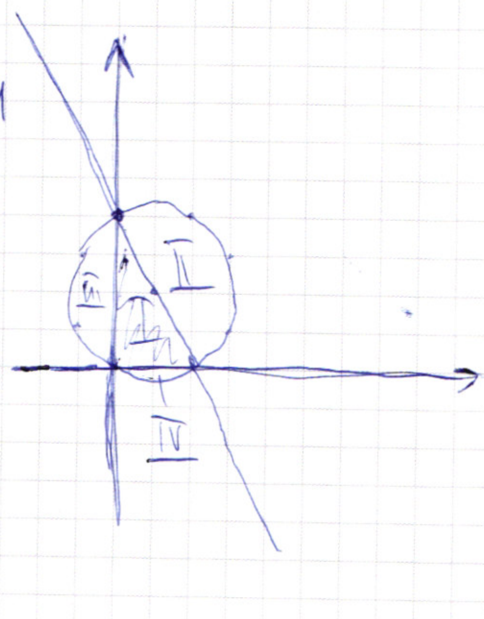
$$\frac{2\sqrt{7}}{3}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{\sqrt{7} - \frac{2\sqrt{7}}{3}}{\sqrt{7}} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 5$$

$$|2x| + |y| + |(2x+y) - 4| > 4$$

$2x \geq 4 \qquad y \geq 4$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)