# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 9 класс

ВАРИАНТ 13 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство
$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром $O$ касается прямых $AB$ и $BC$ в точках $A$ и $C$ соответственно. Высота $CH$ треугольника $ABC$ пересекает эту окружность в точках $C$ и $D$. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника $ABD$ равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике $ABC$ на катете $AC$ и гипотенузе $AB$ отмечены точки $D$ и $E$ соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника $AED$, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED = 30^\circ$.

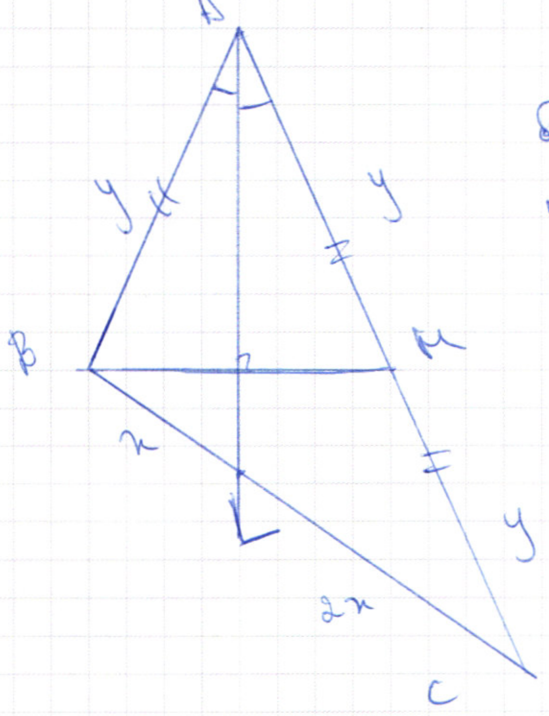
6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе
$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y| > 4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа $p$. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y) < 0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА




№2

Заметим, что биссектриса может быть перпендикулярна одной из медиан, проведенной из другой вершины и не может быть перпендикулярна медиане из той же вершины. Докажем второе утверждение. ~~Т.к.~~ Отрезки медианы и биссектрисы лежат внутри треугольника. Биссектриса делит угол на две равных, каждый из которых $< 90$, а медиана либо совпадает, либо делит один из образованных углов на 2 меньших, каждый из которых тоже $< 90 \Rightarrow$ утв. доказано.

Итак, не умаляя общности, скажем, что $BM \perp AL$

Тогда $\triangle BAM$ - равнобедренный, ибо высота совпала с медианой $\Rightarrow$ $AB = AM = MC$. Мы знаем, что $\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$. Обозначим $AB$ за $y$, $BL$ за $x$, тогда $3y + 3x = 600 \Leftrightarrow x + y = 200$.

При этом должно выполняться нер-во треугольника.

Т.к. $\underset{BC + AB > AC}{3x + y > 2y}$ ; $\begin{cases} 3x > y \\ y = 200 - x \end{cases} \Leftrightarrow 3x > 200 - x$

$4x > 200$ ; $x > 50$. Также $\underset{AB + AC > BC}{3y > 3x}$, или $y > x$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$y = 200 - x \Rightarrow 200 - x > x$ ; $2x < 200$ и $x < 100$

Очевидно, что $AC + BC > AB$ выполняется всегда.

$2y + 3x > y$

Тогда имеем возможные значения $x \in [51, 99]$, $x \in N$

Каждому значению $x$ подходит только 1 значение $y \Rightarrow$ всего треугольников 49

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

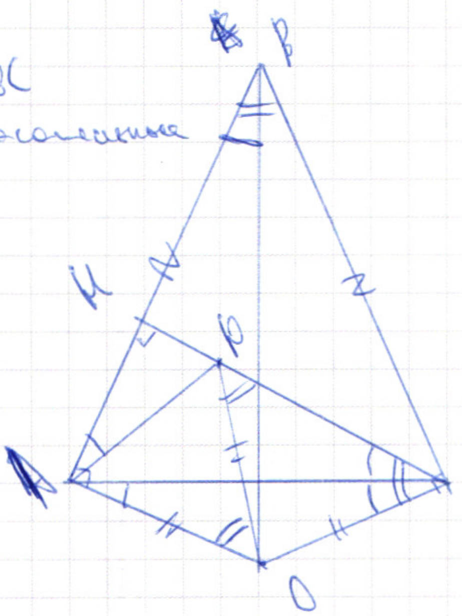
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

BA = BC как касательные



№4

ABCO − вписанный, ибо ∠BCO + ∠BAO = 90 + 90 = 180 ⇒

∠ABC + ∠AOC = 180

Но CH ∥ AO ⇒ ∠AOC + ∠OCH = 180

Тогда ∠OCH = ∠ABC

Но ∠OCH = ∠OPC из OP = OC −

~~и ∠OAC = ∠OBC из~~

А ∠OPC = ∠POA из AO ∥ PC ⇒

Еще △POA − равнобедренный ⇒ △ABC ∼ △POA и ∠PAO = ∠BAC, но ∠PAC у них общий ⇒ ∠BAP = ∠CAO,

но ∠CAO = ∠ACO из AO = CO и ∠CAO = ∠ACP из AO ∥ CP

Тогда ~~AC~~ ∠OCP = ∠ABC = 2∠BCA = 2∠ABO, ибо BO − биссектриса △ABC.

Тогда заметим, что △ABO ∼ △HCA по 2 углам ⇒

$\frac{AB}{CH} \overset{1}{=} \frac{AO}{AH}$ Также △AHP ∼ △CHA по 2 углам ⇒

⇒ $\frac{AH}{CH} = \frac{HP}{AH}$ AO = 4 по условию и AB · HP = 72 тоже по условию.

~~Перемножим эти равенства: $\frac{AB}{CH} \cdot \frac{HP}{AH} =$~~

Из 2 предыдущих подобий: △ABO ∼ △HAP ⇒

$\frac{AO}{HP} \overset{2}{=} \frac{AB}{AH}$

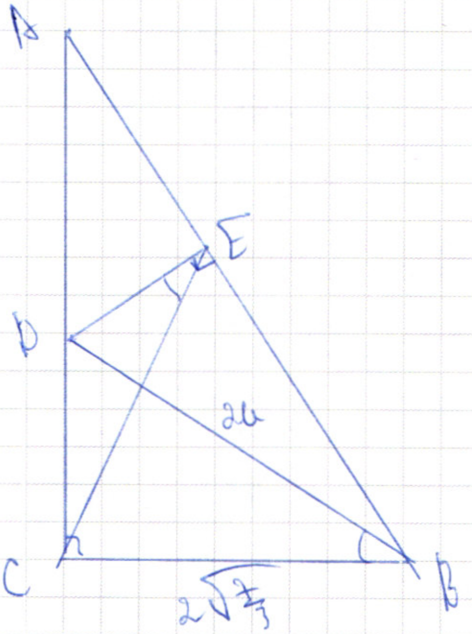
☑ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Перемножив равенства ① и ② получим:

$$\cancel{\frac{AO}{AH}}\ \cancel{AB}\qquad \frac{AB\cdot KD}{CH\cdot AO}=\frac{AO}{\cancel{AH}}\cdot\frac{\cancel{AH}}{AB}\Rightarrow$$

$$\frac{12}{CH\cdot 4}=\frac{4}{AB}\qquad \frac{3}{CH}=\frac{4}{AB}\Rightarrow\frac{AB}{CH}=\frac{4}{3}$$

№5




$DEBC$ вписанный $\Rightarrow\angle CED=$

$=\angle DBC=30$

$\angle CDB=180-90-30=60\Rightarrow$

$CD=\frac{BD}{2}\qquad CD=a;\ BD=2a$

$BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}=a\sqrt{3}$

$a=\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{7}=CD$

$\cancel{CD}\quad AD=AC-CD=\sqrt{7}-\frac{2}{3}\sqrt{7}=\frac{1}{3}\sqrt{7}\Rightarrow$

$\frac{AD}{AC}=\frac{\frac{1}{3}\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\frac{1}{3}$

Найдём $AB$: $AB=\sqrt{4\cdot\frac{7}{3}+7}=\sqrt{\frac{49}{3}}=7\sqrt{\frac{1}{3}}$

Заметим, что $\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}\Rightarrow\triangle AED\sim\triangle ACB\Rightarrow$

$AE=\frac{AD\cdot AC}{AB}=$

$=\frac{\frac{1}{3}\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}{7\sqrt{\frac{1}{3}}}=\sqrt{\frac{1}{3}}\qquad DE=\sqrt{\frac{1}{9}\cdot 7-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда $S_{\Delta E D} = \frac{DE \cdot DE}{2} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{7}{3}}}{2} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$

N 4

~~Заметим, что f(x), где x ∈ N~~

$f(2) = f(2) + f(1) = 2 \Rightarrow f(1) = 0$

Заметим, что $f(x)$, где $x \in N$, больше или равно 0, ибо

и раскладывая на простые множители, что если

$f(x) = (f(p_1) + f(p_2) \ldots = p_1 + p_2 \ldots \geq 0$

Пусть $f(\frac{k}{y}) < 0$, тогда

$(f(\frac{1}{y})) > f(\frac{1}{y})$

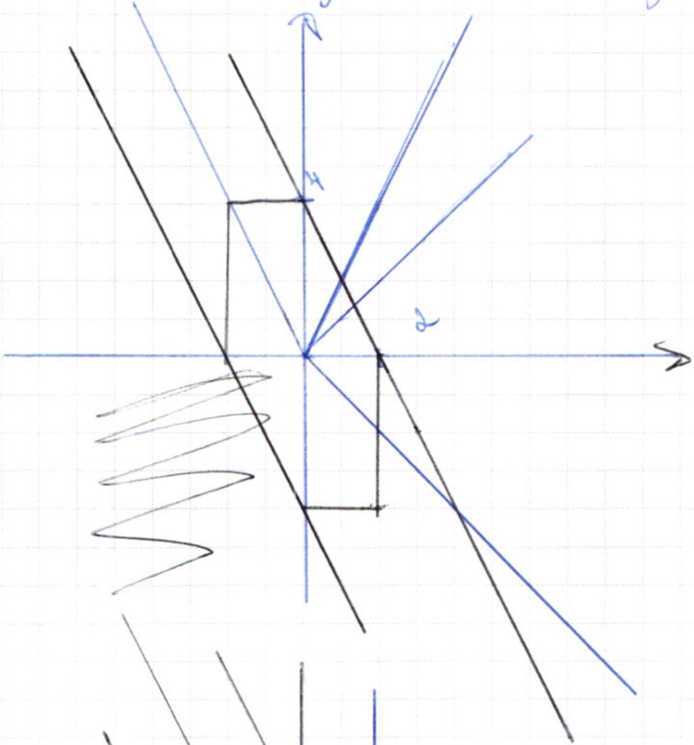
$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$f(1) = f(1) + f(1)$

$x^2 - 2x + y^2 - 4y \le 0$

$x \ge 0 \qquad y < 0$

(5) $|2x| + |y| + |4 - 2x - y| = 4$




$4 - 2x - y = 0$

$y = 4 - 2x$


$f(x)$

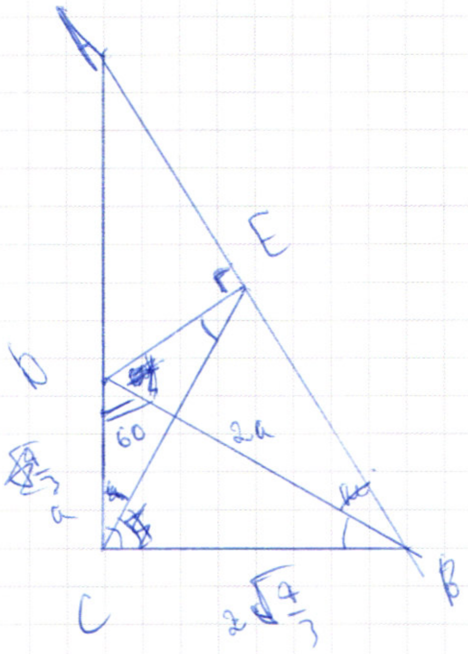
$x^2 - 2x \le 0$

4

$x^2 - 2x + 2$

$4 + -$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА




$DE^2 = AD^2 - AE^2 = \frac{7}{9}\cdot 4 - \frac{3}{9} = \frac{4}{9}$

$DE = \frac{2}{3}$

$\sqrt{7}$

$2\sqrt{\frac{7}{3}} =$

$4 + 4\cdot\frac{7}{3} = 16\frac{7}{3} = \frac{49}{3}$

$\sqrt{\frac{49}{3}} = 7\sqrt{\frac{1}{3}}$

$\cancel{2}\cdot 4\sqrt{\frac{7}{3}} = \sqrt{\frac{56}{3}}$

$\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} = \frac{\cancel{\sqrt{7}}\ 4\sqrt{\frac{7}{3}}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$ ~~$\triangle ADB \sim \triangle AEC$~~

$AE = \frac{AD}{\sqrt{\frac{7}{3}}} = \frac{\frac{7}{3}\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

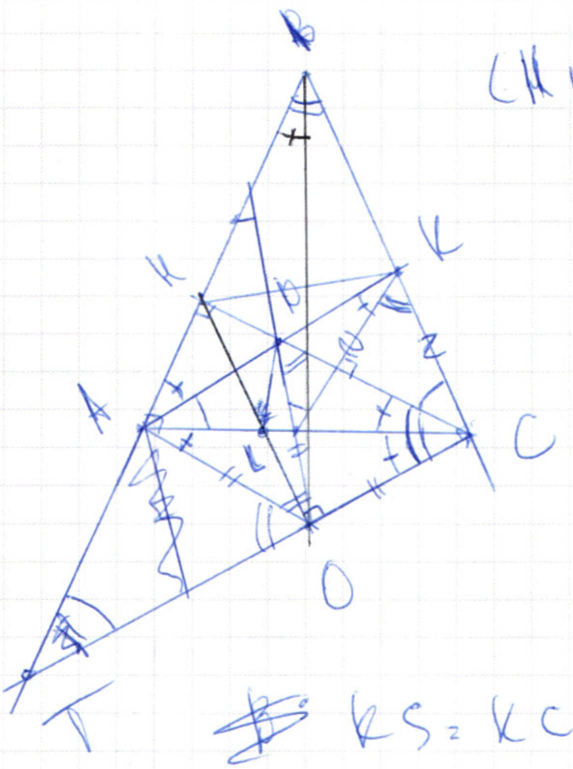
$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{\frac{7}{3}}} = \sqrt{\frac{7}{7}\cdot 3} = \sqrt{3} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow$ " $AE$

$\frac{\frac{7}{\sqrt{3}}\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{7}{3}$ $\quad 2\sqrt{\frac{7}{3}} = \cancel{\sqrt{3}}\, a\sqrt{3}$ $\quad \frac{AD}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{AD}{AC} = \cancel{\sqrt{7}}\ a = 2\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{7}$ $\quad 2\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{7}$

~~$\frac{2}{3}\sqrt{7} = DC$~~ $AD = AC - DC =$ " $DC$

$= \sqrt{7} - \frac{2}{3}\sqrt{7} = \frac{1}{3}\sqrt{7} = AD$



$CH \parallel$

$\angle DAO = \alpha + \beta = \angle BAC$

$\angle DSC = \angle BKA$ и

⇓

$SDKC$ – вписан.

и $KS \parallel AB$

$\cancel{B}$: $KS = KC$

$\triangle DAO \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AB}{AO} = \frac{AC}{AD} = \frac{AK}{KS}$

$\frac{\cancel{CO}}{\cancel{BH}} =$

и $\frac{BC}{CO}$

$\frac{4}{AH} = \frac{AB}{CH}$ $\quad AB \cdot DH = 12$

$\frac{AB}{4} = \frac{AC}{AD}$

$\begin{cases} AB \cdot HD = 12 \\ \frac{HD}{AH} = \frac{AD}{AC} = \frac{BC}{4} \end{cases}$

$BC \cdot HD =$

$\frac{\cancel{CT}}{BC} = \frac{\cancel{CH}}{HD}$

$\frac{4}{AH} = \frac{AB}{CH}$

$\frac{TH}{TA} = \frac{TC}{TO}$ $\quad \frac{TH}{TC} = \frac{TC}{TB}$ $\quad \frac{CT}{CH} = \frac{BC}{BH} = \frac{AT}{AH}$

$\cancel{\frac{AB \cdot HD}{CH \cdot AH}} = \cancel{\frac{12 \cdot BC}{AH}}$ $\quad \frac{CH}{CT} = \frac{AH}{AT}$

$\frac{AT}{CH} = \frac{4}{BH}$

$\frac{4}{CH} = \frac{TA}{TH}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x - 2y = \sqrt{xy}$

$x^2 + 4y^2 - 4y = xy$ $\qquad x + y^2 = 5$

$x^2 + y^2 x = 5x$

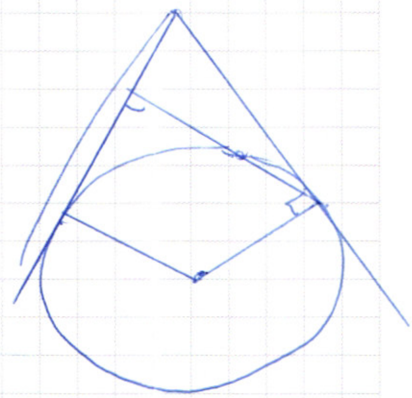
$x = 5 - y^2$ $\qquad 4y^2 - 4y - y^2 x = xy - 5x$

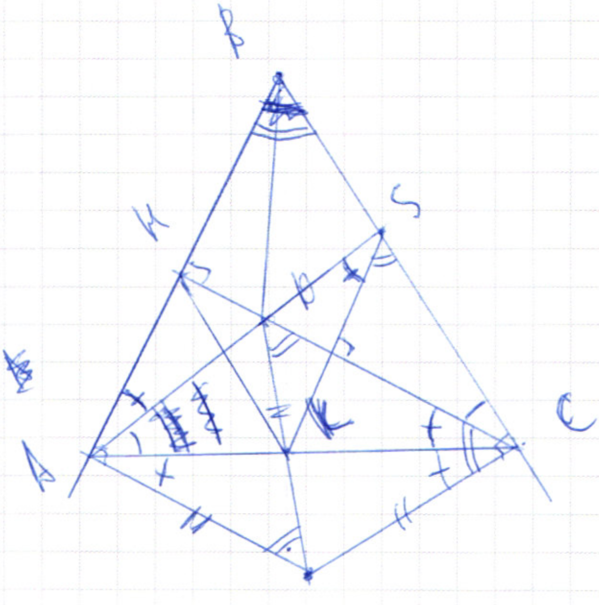
$x + 2y = -\sqrt{xy}$

$y^2 + 2y = 5 - \sqrt{xy}$

$\cancel{((\sqrt5 - y)(\sqrt5 + y))^2} + 4y^2 - 4y = (5 - y^2) \cdot y$

$x^2 + 4y^2 - y(4 + x) = 0$






$AB \cdot DH = 8\sqrt2$

$AO \parallel CH$

$\frac{AO}{AB} = \frac{AD}{AC}$ $\qquad \frac{4}{AB} = \frac{AD}{AC}$

$\triangle ABC \sim \triangle DOA$

$\angle DAO = \angle BAC$, ибо равнобед

$\Downarrow$

$\angle BAD = \angle CAO = \angle \frac{ABC}{2}$

$\frac{DC}{4} = \frac{DK}{KO}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{x^2-6x+10-2(x-3)=0}$

$\cancel{36-40}<0 \quad x^2-6x+10 > 0$

$\cancel{2x^2-4x>0}$

$x\neq 0$

$x\geq 3 \quad 3>x\geq 2 \quad 2>x\geq 0 \quad x\leq 0$

$x\neq 2$

иначе.

$2\cdot 4-4\cdot 2=0$

$$\frac{x^2-6x+10-2x+6}{2x^2-4x+x^2-2x}\leq 0$$

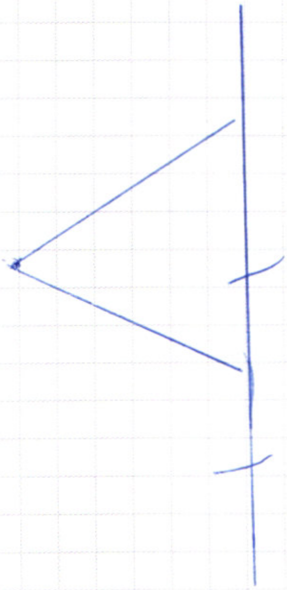
$$\cancel{x^2}6 \quad \frac{x^2-8x+16}{3x^2-6x}$$

$\cancel{x\geq 20}$

$x^2+4y^2-4y=xy$

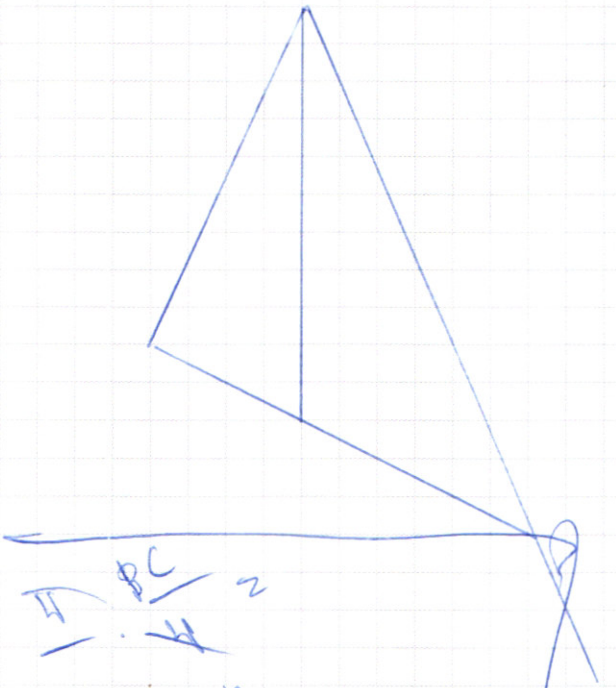
$\cancel{x^2+y^4+2y^2\cdot x=25}$

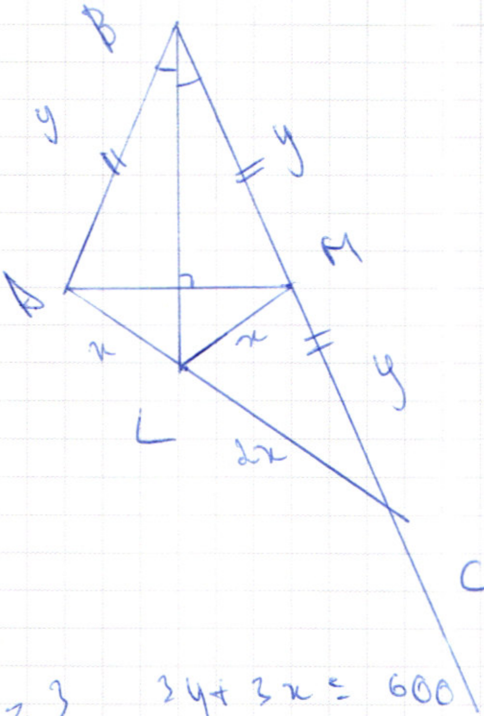
f i



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)






$\frac{\Pi}{AH} \cdot \frac{BC}{H} =$

$2 \frac{AB}{CH} \cdot \frac{HD}{AH}$

$AH = \frac{AB \cdot HD}{4} = \frac{72}{4} = 3$

$\frac{4}{HD} = \frac{AB}{AH}$

$3y > 3x$

$y = 200 - x$

~~$x = 200 - y$~~

$y > x$

$3y + 3x = 600$

$x + y = 200$

$y + 3x > 2y$

$3x > y$

$3x > 200 - x$

~~$x = 200 - y$~~

$y = 200 - x$

$4x > 200$

$x > 50$

$200 - x > x$

$2x < 200$ $\quad x < 100$

~~$200 - x$~~ $\quad x \in [51; 99] \in N$

49

---

$f(p) = f(1) + f(p) = p + f(1) = p$

$f(1) = 0$

$f \qquad f(2) = 2 \quad f(3) = 3 \quad f(5) = 5$

$f(\frac{3}{4}) = f(3) + f(\frac{1}{4})$

$f$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$5-y^2-2y=\sqrt{(5-y^2)y}=\sqrt{-y^3+5y}$~~

$x-2y\le\frac{x+y}{2}$

$2x-4y\le x+y$

$x+5y\le 0$

$\sqrt{x}=k$

$k^2-2y=k\sqrt{y}$

$k^2+y^2=5$

$f$ ~~$(N)$~~ $f(x)\ge 0,\ x\in N$

$f(\frac{1}{k})<0 \quad k\in N;\ k\ge 1$

~~$f(\frac{1}{k})$~~ $f(k)$

$f(k)=f(k^2)+f(\frac{1}{k})\ge 0$

$f(k^2)>|f(\frac{1}{k})|$

~~$f(\frac{1}{k})$~~ $|f(\frac{1}{2})|<f(2)=2$

$f(\frac{1}{k})<f(1)$

$f(\frac{k}{k+1})=f(k)+f(\frac{1}{k+1})$

$f(\frac{1}{k+1})>$

$f(\frac{1}{k})=f(1)+$

~~$f(1)=f(1)+f(\frac{1}{k})$~~

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)