МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 14

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+5-4|x-1|}{4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|}\leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 300 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy}, \\ 2y+x^2=9. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB : CH$, если площадь треугольника ABD равна 15, а радиус окружности равен 6.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE\perp AB$. Найдите отношение $AD : AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{29}$, $BC=\frac{5\sqrt{29}}{2}$, а $\angle CED=45^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6, \\ x^2-2x-3y+y^2\leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 19$, $3\leqslant y\leqslant 19$ и $f(x/y)<0$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

Рассм. числитель

$\underline{x \geq 1}$ $\quad x^2-2x+5-4|x-1| = x^2-2x+5-4(x-1) = x^2-2x+5-4x+4 =$

$= x^2-6x+9 = (x-3)^2 \geq 0$

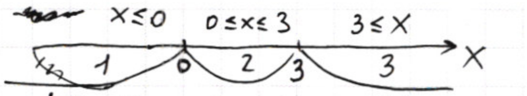
$\underline{x<1}$ $\quad x^2-2x+5-4|x-1| = x^2-2x+5-4(1-x) = x^2-2x+5-4+4x =$

$= x^2+2x+1 = (x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ числитель ~~всегда~~ ≥ 0 при любом x $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ знаменатель <0 (т.к. он $\neq 0$)

$y = 4x^2-12x+|x|\cdot|x-3| < 0$



$|x| = -x$ $\quad |x| = x$ $\quad |x| = x$

$|x-3| = 3-x$ $\quad |x-3| = 3-x$ $\quad |x-3| = x-3$

1. $y = 4x^2-12x+(-x)(3-x) =$

$= 4x^2-12x+x(x-3) = 4x^2-12x+x^2-3x =$

$= 5x^2-15x = 5x(x-3) < 0$

$5x \leq 0 \Rightarrow$

$x-3>0$

$x>3$ – не входит в промежуток 1

2. $y = 4x^2-12x+(x)\cdot(3-x) = 4x^2-12x+3x-x^2 = 3x^2-9x = 3x(x-3) < 0$

$3x \geq 0 \Rightarrow$ $\quad x-3<0$ $\quad\quad \boxed{0<x<3}$

($x=0$ не подходит) $\quad x<3$ $\quad \Rightarrow$

3. $y = 4x^2-12x+x(x-3) = 4x^2-12x+x^2-3x = 5x^2-15x = 5x(x-3) < 0$

$5x>0 \Rightarrow$ $\quad x-3<0$

$x<3$ – не входит в промежуток 3

Ответ: $0<x<3$

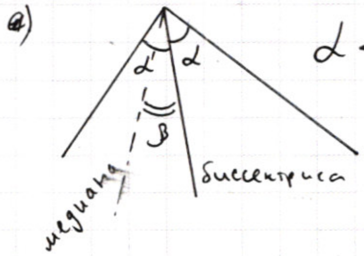
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 2

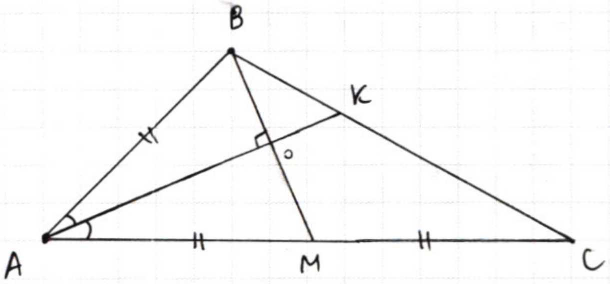
1. Рассмотрим $\triangle ABC$, у которого биссектриса $\perp$ медиане

а)



$\alpha < 90° \Rightarrow \beta < 90° \Rightarrow$ эти биссектриса и медиана из разных вершин $\triangle ABC$

б)



$AK \perp BM$

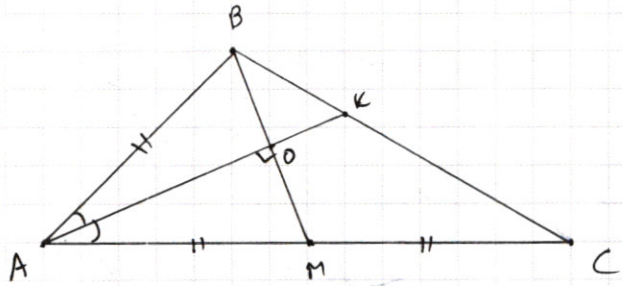
Рассм. $\triangle ABM$ – бис-са это высота $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABM$ – равнобедренный $\Rightarrow AB = AM \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = 2AB \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~$AC \perp BM \Rightarrow$~~ В таком $\triangle ABC$ одна сторона в 2 раза больше другой

2. Рассмотрим $\triangle ABC$, у которого одна сторона в 2 раза больше другой



Проведем медиану BM

$AB = AM = MC = \frac{1}{2}AC$

Проведем бис-су AK

$\triangle ABM$ – равнобедренный $\Rightarrow$

$\Rightarrow AO$ – высота (т.к. бис-са) $\Rightarrow$

$\Rightarrow BM \perp AK$

$\Updownarrow$

В треугольнике ~~вы~~ биссектриса $\perp$ медиане тогда и только тогда, когда одна сторона в 2 раза больше другой.

Обозначим длину меньшей из этих сторон как X

Тогда у большей – $2x$

У третьей стороны длина $P - 3x$

$P - 3x > 0 \Rightarrow 3x < P \Rightarrow x < \frac{P}{3} = \frac{300}{3} = 100 \Rightarrow$

$1 \le x \le 99$ – 99 чисел

Заметим, что если выбрать x, то остальные стороны задаются однозначно $\Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle$ задаётся однозначно (3 признак равенства $\triangle$ – по 3-м сторонам)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2

Алгоритм выбора Δ:

1. X
2. $2x$
3. $P-3x$

Докажем что не могло быть совпадений при выборе всех возможных X

~~стороны~~ $\cancel{2x}$

а) Пусть выбрали изначально сторону $2x$

1. $2x$
2. $4x$
3. $P-6x$

$x \neq 4x \Rightarrow$

$\Rightarrow$ для равенства с треугольником $\{x, 2x, P-3x\}$:

$\begin{cases} x = P-6x \\ P-3x = 4x \end{cases}$ $\begin{cases} P = 7x \\ P = 7x \end{cases}$ — но $300 \not\vdots 7 \Rightarrow$ не может быть

б) Пусть изначально выбрали $P-3x$

1. $P-3x$
2. $2(P-3x)$
3. $P-3(P-3x) = 9x-2P$

~~Тогда~~ $\cancel{\left[\begin{array}{l} 2(P-3x) = 2\cdot(9x-2P) \\ 9x-2P = 4(P-3x) \end{array}\right.}$ ~~стороны относятся как 2 : 1~~

$\cancel{\left[\begin{array}{l} 2P-6x = 18x-4P \\ 9x-2P = 4P-12x \end{array}\right.}$

$\cancel{6p = 24x}$

$\cancel{6P = 21}$

~~Тогда~~ $\cancel{\left[\begin{array}{l} 2(P-3x) = x \\ 9x-2P = x \end{array}\right.}$ ~~одна из сторон~~ $- X$

$\cancel{2P-6x = x}$

$\cancel{8x =}$

Если $x = 9x-2P$, то $2(P-3x) = 2x$

$P-3x = x \rightarrow$ этот набор уже выбирали

Если $x = 2(P-3x)$

$x = 2P-6x$

$7x = 2P$, но $P \not\vdots 7 \Rightarrow$ не может быть $\Rightarrow$ совпадений Δ нет $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: таких Δ — 99

Задача 3

$\boxed{xy \geq 0}$

$$\begin{cases} y - 2x = \sqrt{xy} & (1) \\ 2y + x^2 = 9 & (2) \end{cases}$$

$(1)^2$

$$(y-2x)^2 = (\sqrt{xy})^2$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 = xy$$

$$y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$$

$$y = \frac{5x \pm \sqrt{25x^2 - 4x^2 \cdot 4}}{2} = \frac{5x \pm \sqrt{9x^2}}{2} = \frac{5x \pm 3|x|}{2} = \frac{5x \pm 3x}{2}$$

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \left[\begin{aligned} y_1 &= 4x \\ y_2 &= x \end{aligned} \right. \Rightarrow \left[\begin{aligned} xy &= 4x^2 \geq 0 \\ xy &= x^2 \geq 0 \end{aligned} \right.$$

$4x - 2x \geq 0$ – из (1)

$2x \geq 0$

$x \geq 0$ – в (1) (при y_1)

$x - 2x \geq 0$ – из (1)

$-x \geq 0$

$x \leq 0$ – в (2) (при y_2)

Подставим $y_1 \rightarrow$ во 2

$$8x + x^2 = 9$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot 9}}{2} = \frac{-8 \pm 10}{2} \geq 0$$

$$x = \frac{-8+10}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad ; \quad y = 4x = 4$$

Подставим $y_2 \rightarrow$ во 2

$$2x + x^2 = 9$$

$$x^2 + 2x - 9 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 9}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{10}}{2} \leq 0$$

$$x = \frac{-2 - 2\sqrt{10}}{2} = -1 - \sqrt{10} \quad ; \quad y = x = -1 - \sqrt{10}$$

Ответ: $(1; 4)$, $(-1-\sqrt{10}; -1-\sqrt{10})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6

$$\begin{cases} |3x| + |2y| + |6-3x-2y| > 6 & (1) \\ x^2 - 2x - 3y + y^2 \le 0 & (2) \end{cases}$$

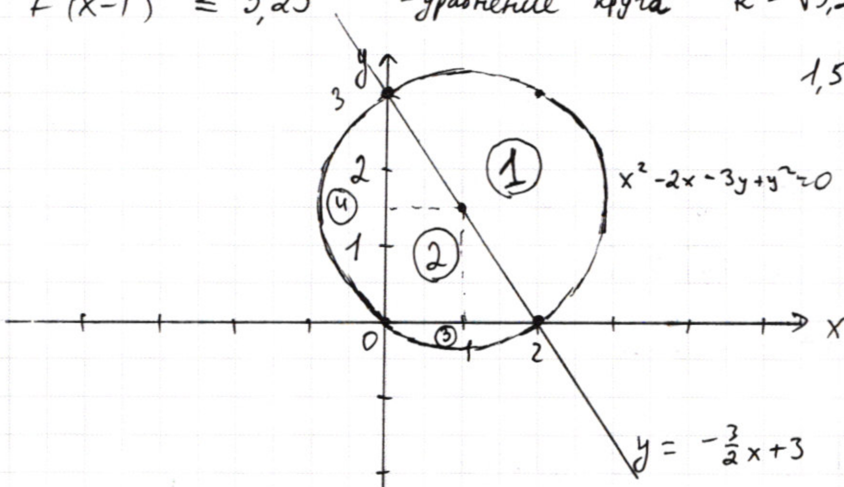
(2):

$x - 2x - 3y + y^2 \le 0$

$\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (x-1)^2 - 1 - \frac{9}{4} \le 0$

$\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (x-1)^2 \le 3{,}25$ - уравнение круга $R = \sqrt{3{,}25}$

$1{,}5^2 + 1^2 = \left(\sqrt{3{,}25}\right)^2 = 3{,}25$



Рассмотрим $|6-3x-2y|$ из (1)

$|6-3x-2y| = 0$

$6 - 3x - 2y = 0$

$y = -\frac{3}{2}x + 3$

x	0	2
y	3	0

- диаметр круга $\in$ этой прямой

Разобьём круг на 4 области

~~1 $|3x| + |2y| + |6-3x-2y|$~~

1 $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 6-3x-2y \ge 0 \end{cases}$ 2 $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 6-3x-2y \le 0 \end{cases}$ 3 $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \le 0 \\ 6-3x-2y \le 0 \end{cases}$ 4 $\begin{cases} x \le 0 \\ y \ge 0 \\ 6-3x-2y \le 0 \end{cases}$

Задача 6

① $|3x|+|2y|+|6-3x-2y| \geq 6$

$3x+2y+6-3x-2y>6$

$6>6$ — не верно

② $|3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6$

$3x+2y-6+3x+2y>6$

$6x+4y>12 \quad |:2$

$3x+2y>6$

$y>-\frac{3}{2}x+3$ — не входит во ② участок (выше прямой)

③ $|3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6$

$3x-2y-6+3x+2y>6$

$6x>12$

$x>2$ — не входит в ③ участок

④ $|3x|+|2y|+|6-3x-2y|>6$

$-3x+2y-6+3x+2y>6$

$4y>12$

$y>3$ — не входит в ④ участок

Нет решений $\Rightarrow$

$\Rightarrow S=0$

Ответ: $S=0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 7

1. $f(ab) = f(a) + f(b)$

2. $f(p) = p$

$f(p) = f(p \cdot 1) = f(p) + f(1)$

$\boxed{f(1) = 0}$

$f(1) = f\left(\frac{1}{y}\right) + f(y) = 0$

$\boxed{f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)}$

$f(a^n) = f(a) + f(a^{n-1}) =$

$= f(a) + f(a) + f(a^{n-2}) = \ldots =$

$= n f(a)$

$\boxed{\begin{matrix} 3 \le x \le 19 \\ 3 \le y \le 19 \end{matrix}}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$

$f(x) < f(y)$

Разобьем число a на простые множители

$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$

$f(a) = f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2}) + \ldots + f(p_n^{\alpha_n}) = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_n p_n$ –

– сумма всех простых делителей (с учётом степени)
$\Rightarrow f(a) \in \mathbb{N}$ при $a \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow$ для чисел a и ka ($k \in \mathbb{N}$; $a \in \mathbb{N}$)

$f(ka) = f(k) + f(a) \Rightarrow f(ka) > f(a)$, т.к. $f(k) \in \mathbb{N}$

Пусть $p_1 < p_2$ (простые) $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(p_1) < f(p_2)$

Задача 7

Пусть $f(a) = f(b)$ $(a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N})$

$f(3) = 3$

$f(4) = 2+2 = 4$

$f(5) = 5$

$f(6) = 3+2 = 5$

$f(7) = 7$

$f(8) = 3 \cdot 2 = 6$

$f(9) = 3 \cdot 2 = 6$

$f(10) = 5+2 = 7$

$f(11) = 11$

$f(12) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$

$f(13) = 13$

$f(14) = 7+2 = 9$

$f(15) = 5+3 = 8$

$f(16) = 2 \cdot 4 = 8$

$f(17) = 17$

$f(18) = 3 \cdot 2 + 2 = 8$

$f(19) = 19$

Возьмём пару чисел a и b (будем считать кол-во пар $(x;y)$

Заметим, что если $f(a) = f(b)$ – то к кол-ву пар $(x;y)$ не прибавится ничего

А если $f(a) \neq f(b)$, тогда $\left[\begin{array}{l} f(a) < f(b) \\ f(a) < f(b) \end{array}\right.$ → к кол-ву пар $(x;y)$ прибавим 1

⇒ кол-во пар $(x;y)$ – кол-во пар a и b таких, что $f(a) \neq f(b)$

~~f(a)~~

~~N – кол-во таких a~~

Общее кол-во пар a и b:

$$\frac{17 \cdot 16}{2} = 17 \cdot 8 = 136 = n_{общ}$$

Кол-во пар a и b, когда $f(a) = f(b)$ $(n_{повтор})$

$f(a)$	~~3~~	~~4~~	5	7	6	8
N – кол-во таких a (только $N > 1$)			2	3	2	3

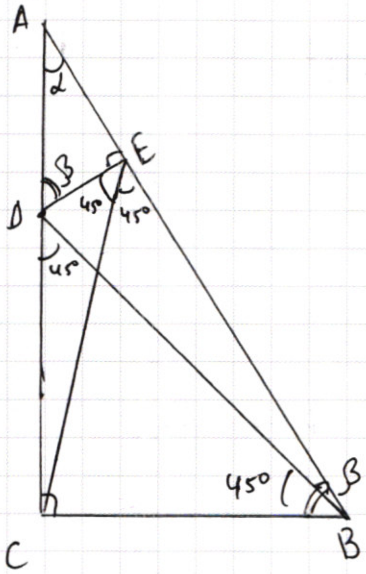
$$n_{повтор} = \frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{3 \cdot 2}{2} = 1 + 3 + 1 + 3 = 8$$

$n_{неповтор} = 136 - 8 = 128$ – пар $(x;y)$

Ответ: 128

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5



1. $\triangle AED \sim \triangle ABC$ (по 2-м углам)

2. $\square DEBC$ – вписанный $\left(\begin{matrix}\angle DEB = 90^\circ \\ \angle DCB = 90^\circ\end{matrix}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DBC = \angle DEC = 45^\circ$ (на 1 дугу опир.)

$\angle CDB = \angle CEB = 45^\circ$ (на 1 дугу опир.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle CDB$ – равнобедренный

$DC = CB = \sqrt{29}$

$AD = AC - DC = \frac{5}{2}\sqrt{29} - \sqrt{29} = \frac{3}{2}\sqrt{29}$

$0 < \beta < 90^\circ$

$tg\beta = \dfrac{\frac{5}{2}\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = \dfrac{5}{2}$

$1 + tg^2\beta = \dfrac{1}{\cos^2\beta} \Rightarrow \cos\beta = \sqrt{\dfrac{1}{1+tg^2\beta}} = \sqrt{\dfrac{1}{1+\frac{25}{4}}} = \dfrac{2}{\sqrt{29}}$

$\sin\beta = tg\beta \cdot \cos\beta = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$

$AE = AD \cdot \sin\beta = \dfrac{5}{\sqrt{29}} \cdot \dfrac{3}{2}\sqrt{29} = \dfrac{15}{2}$

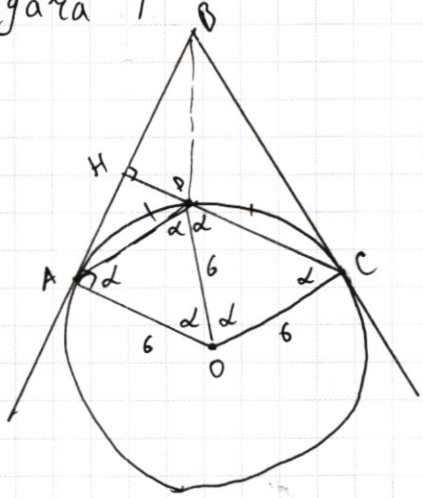
$DE = AD \cdot \cos\beta = \dfrac{2}{\sqrt{29}} \cdot \dfrac{3}{2}\sqrt{29} = 3$

$S_{\triangle AED} = \dfrac{AE \cdot DE}{2} = \dfrac{15 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \dfrac{45}{4} = 11{,}25$

Ответ: $AD = \frac{3}{2}\sqrt{29}$

$S_{\triangle AED} = 11{,}25$

Задача 4



$R = 6 = AO = OC = OD$

Пусть $\frac{AB}{CH} = x$

$AB = xCH$

$S_{\triangle ABD} = \frac{DH \cdot AB}{2} = 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow DH \cdot AB = 30$

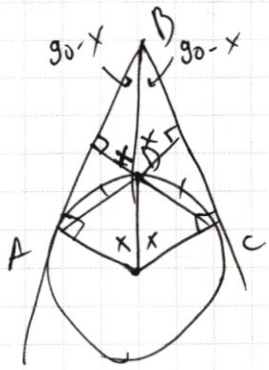
$x\, DH \cdot CH = 30$

$\underbrace{DH \cdot CH}_{\text{степень точки } H} = \frac{30}{x} = AH^2$

~~OAH~~ $OA \perp AH \perp HC \Rightarrow$

$\Rightarrow OA \parallel HC \Rightarrow OAHCO$ – трапеция

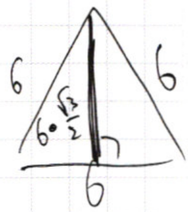
Заметим, что если D – середина $\overset{\frown}{AC}$, то CH – высота

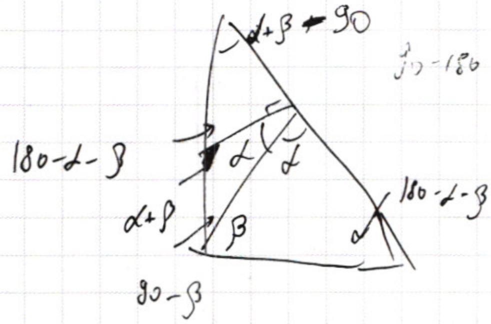


$\Rightarrow D$ – середина $\overset{\frown}{AC}$

$AH^2 = \frac{3}{4} \cdot 6^2 = 27$

$x = \frac{30}{27} = \frac{10}{9}$





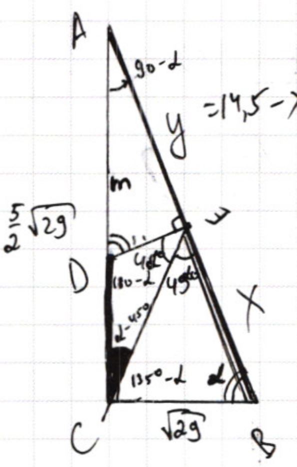
$90-\cancel{\beta} = 180-\alpha-\cancel{\beta}-\alpha$

$\boxed{\alpha = 45^\circ}$ ВЗ о прямой (а)

S_{AED} – ? $\quad \frac{AD}{AC}$ – ?

$180-\alpha-45 =$

$= 135^\circ - \alpha$



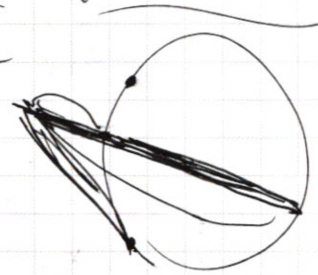
$\alpha = 45^\circ$

$\triangle ADE \overset{k}{\sim} \triangle ABC \quad k$ – ?

$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}$

$k = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{ED}{BC}$

Найти AE, EB, DE



$AB = \frac{CB}{\cos\alpha} = \frac{29}{2} = 14{,}5$

$DE = \sqrt{m^2 - (14{,}5-x)^2} =$

$= m^2 -$

$tg\alpha = \frac{\frac{5}{2}\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = \boxed{2{,}5}$

$\cancel{\sin\alpha}$ $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+2{,}5^2}} =$

$= \sqrt{\frac{1}{1+\frac{25}{4}}} =$

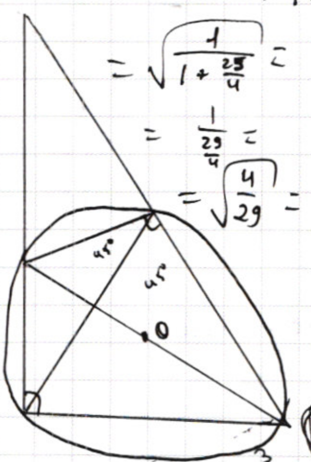
$= \frac{1}{\frac{29}{4}} =$

$= \sqrt{\frac{4}{29}} = \boxed{\frac{2}{\sqrt{29}}}$

$CD^2 + CB^2 = DE^2 + EB^2$

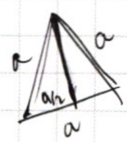
$AD^2 = AE^2 + ED^2 = (AB - EB)^2 + ED^2 =$

$= AB^2 - 2AB \cdot EB + EB^2 + ED^2 =$



$\frac{3}{4} \cdot 6^2 - AB^2 - 2AB \cdot EB + CD^2 + CB^2$

$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$



$\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{3}{4}$

$CB^2 - 2AB \cdot EB$

$(x+y)^2 = \frac{25}{4} \cdot 29 + 29 = 29 \cdot \left(\frac{25}{4}+1\right) = 29 \cdot \frac{29}{4} = \left(\frac{29}{2}\right)^2$

$x+y = \frac{29}{2} = 14{,}5 \Rightarrow y = 14{,}5 - x$

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{29}} = \sqrt{\frac{25}{29}} =$

$= \frac{5}{\sqrt{29}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

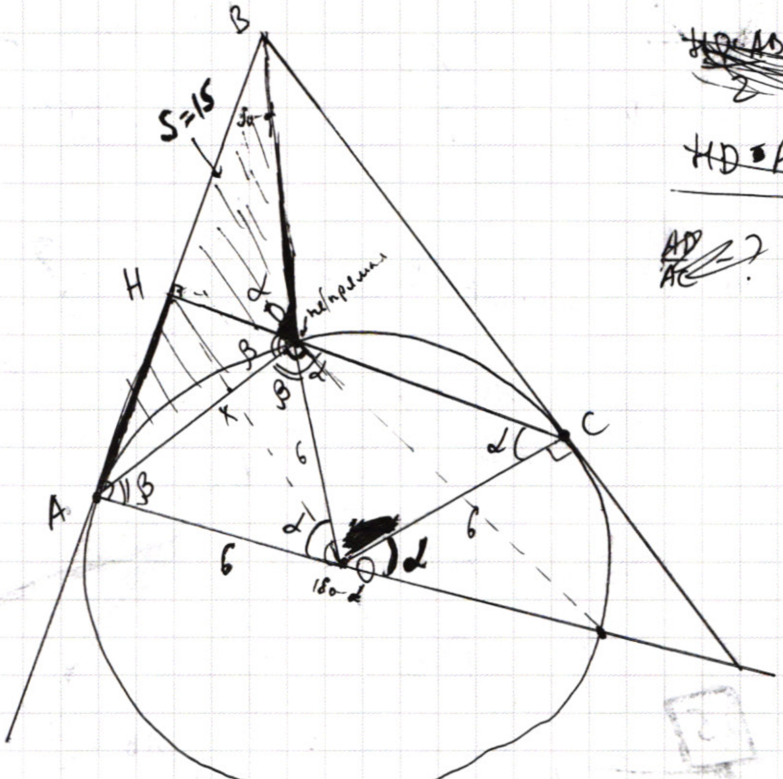
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\cancel{\frac{HD\cdot AD}{2}=15}$

$HD \cdot AB = 30$

$\frac{AD}{AC} - ?$ $\frac{AB}{CH} - ?$

$$\frac{HD}{DO} = \frac{HX}{XO}$$

$$\frac{HD}{6} = \frac{HX}{XO}$$

$$15 = \frac{BA \cdot BO \cdot \sin(90-\alpha)}{2} = \frac{BA\cdot BO \cdot \cos\alpha}{2}$$

$$S = \frac{OH \cdot AB}{2} = \cancel{pr} = \cancel{\frac{ab\sin\alpha}{2}} = \cancel{\frac{abc}{4R}} = \cancel{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}} =$$

$AB \cdot OH = 30$ $\frac{AB}{CH} = x$ $AB = xCH$

$x\,CH \cdot OH = 30$

$\cancel{CH = 30}$ $CH \cdot OH = \frac{30}{x}$

$=$ AH^2

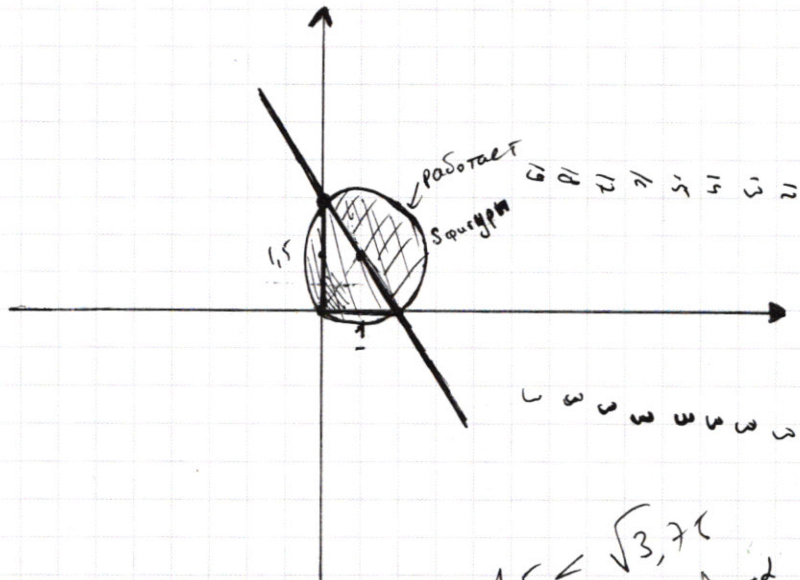
степень точки

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



x

$y: \; f(y) < f(x)$

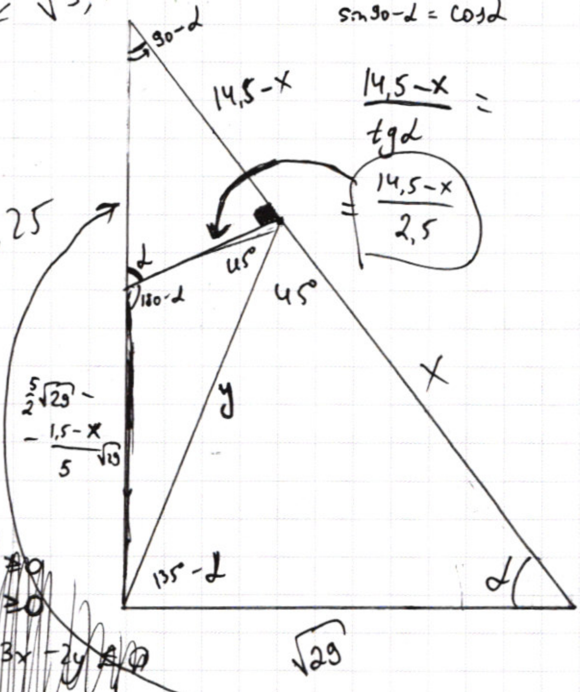
$1{,}5 < \sqrt{3{,}7}$

$1{,}5^2 = 2{,}25$

$1{,}5^2 + 1^2 = 2{,}25 + 1 = 3{,}25$

~~Sinα~~

$\sin(90-\alpha) = \cos\alpha$



$\frac{14{,}5-x}{tg\alpha} = \frac{14{,}5-x}{2{,}5}$

$\frac{14{,}5-x}{\sin\alpha} = \frac{1{,}5-x}{5:\sqrt{29}}$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6-3x-2y \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq -\frac{3}{2}x + 6 \end{cases}$

$3x + 2y + 6 - 3x - 2y = 6$ ✓ 3

$6 - 3x - 2y = 0$

$y = -\frac{3}{2}x + 3$

$x = 2$

$x = 0$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6-3x-2y \leq 0 \end{cases}$

$3x + 2y - 6 + 3x + 2y = 6x + 4y > 12$

$6x + 4y = 12$

$y = \frac{-6x+12}{4} = -\frac{3}{2}x + 3$

МФТИ

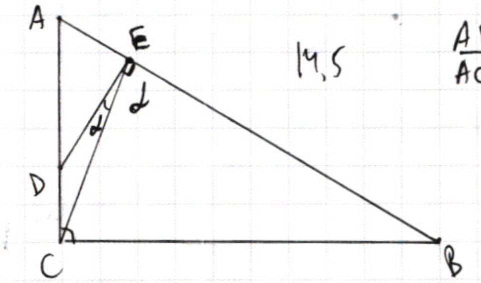
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



14,5

$\frac{AD}{AC}$ — ?

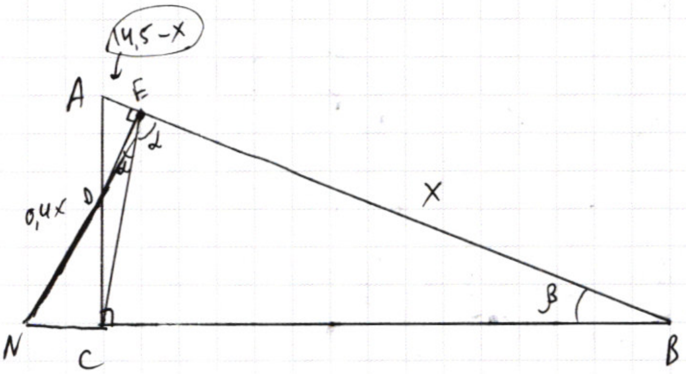
S_{AED}

$AC = \sqrt{29}$

$BC = \frac{5\sqrt{29}}{2}$ $\quad \angle CED = 45^0 = \angle$

$AB = \sqrt{29 + \frac{25 \cdot 29}{4}} = \sqrt{29} \cdot \sqrt{1 + \frac{25}{4}} = \sqrt{29} \cdot \sqrt{\frac{29}{4}} =$

$= \frac{29}{2} = \boxed{14,5}$



$tg\,\beta = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{29} \cdot 2}{5\sqrt{29}} = \frac{2}{5} = 0,4$

$tg\,\beta = EN / EB = 0,4$

$EN = 0,4x$

$|3x| + |2y| + |6 - 3x - 2y| > 6$

$x^2 - 2x - 3y + y^2 \leq 0$

$\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + (x-1)^2 - 1 \leq 0$

2,25

$\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (x-1)^2 \leq 3,25$

$\boxed{3x = 0 \\ x = 0}$

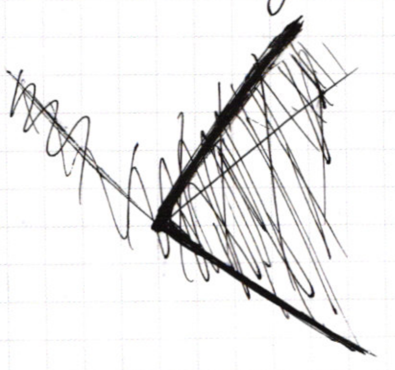
$2y = 0$

$y = 0$

$2y = -3x + 6$

$y = -\frac{3}{2}x + 3$

$6 - 3x - 2y = 0$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} y-2x=\sqrt{xy} \\ 2y+x^2=9 \end{cases} \quad |(\,)^2 \qquad \boxed{xy\geq 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{y=-\frac{x^2}{2}+\frac{9}{2}}$$

$$y^2-4xy+4x^2=xy$$

$$y^2-5xy+4x^2=0$$

$$y=\frac{5x\pm\sqrt{9x^2}}{2}=\frac{5x\pm 3|x|}{2}=\frac{5x\pm 3x}{2}$$

$$\begin{cases} y=\frac{8x}{2}=\boxed{4x} \\ y=\frac{2x}{2}=\boxed{x} \end{cases} \Rightarrow \quad xy\geq 0 \text{ всегда}$$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=p$

$f(p)=f(p\cdot 1)=f(p)+f(1)$

$p=p+f(1)$

$\boxed{f(1)=0}$

$f(x\cdot\frac{1}{x})=f(x)+f(\frac{1}{x})$

$f(1)=f(y)+f(\frac{1}{y})=0$

$f(\frac{1}{y})=-f(y)$

1.

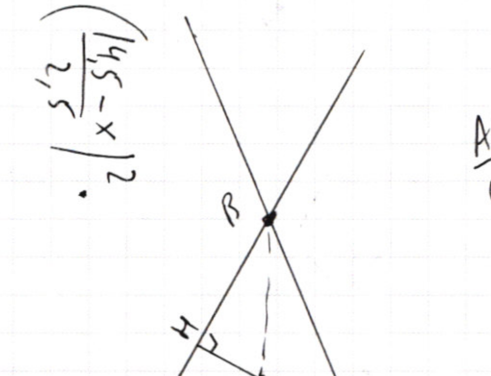
$\frac{AB}{CH}$ – ?

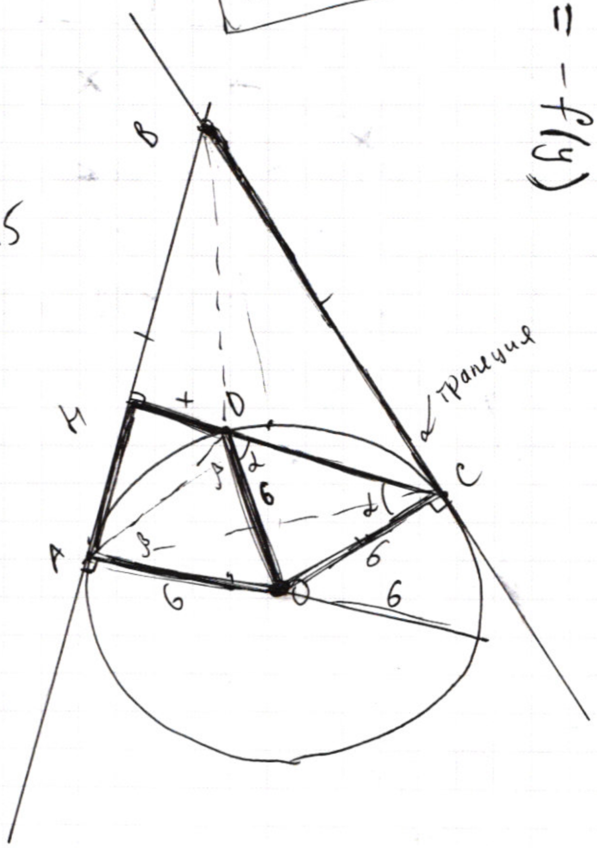
$S_{ABO}=15$

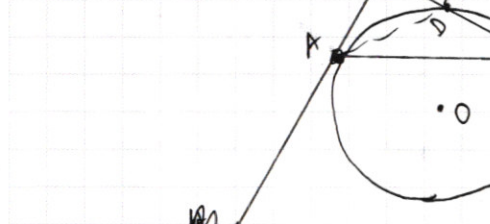
$R=6$

$S_{ABO}=\frac{DH\cdot AB}{2}$

$\boxed{DH\cdot AB=30}$







☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-2x+5-4|x-1|\geq 0\\ 4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|<0\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-2x+5-4|x-1|\leq 0\\ 4x^2-12x+|x|\cdot|x-3|>0\end{cases}\end{array}\right.$$

(*)

$y = x^2-2x+5-4|x-1|$

$x-1\geq 0$

$\boxed{x\geq 1}$

$y = x^2-2x+5-4(x-1) =$

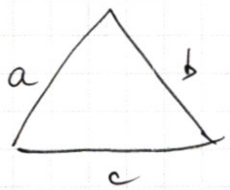
$= x^2-2x+5-4x+4 = x^2-6x+9 =$

$= (x-3)^2 \geq 0$

$x<1$

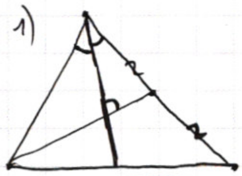
$y = x^2-2x+5-4(1-x) = x^2-2x+5-4+4x =$

$= x^2+2x+1 = (x+1)^2 \geq 0$

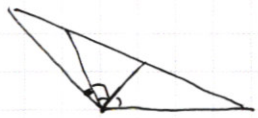


$P = a+b+c = 300$

1)



2)



$x \to 2x \to P-3x$

$\parallel$

$P-3x \to \cancel{2x} \to \cancel{x}$

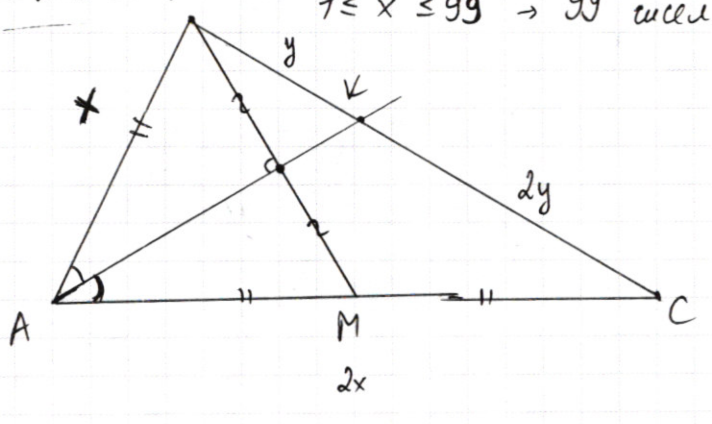
$\times$ $\to 2x$

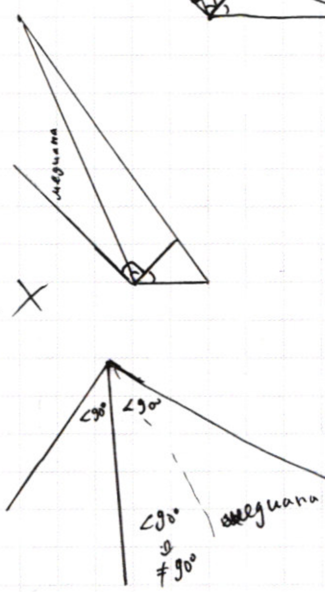
$3x < P$

$x < \frac{P}{3} = 100$

одно и то же

$1 \leq x \leq 99 \to 99$ чисел x

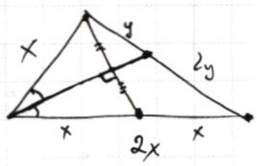


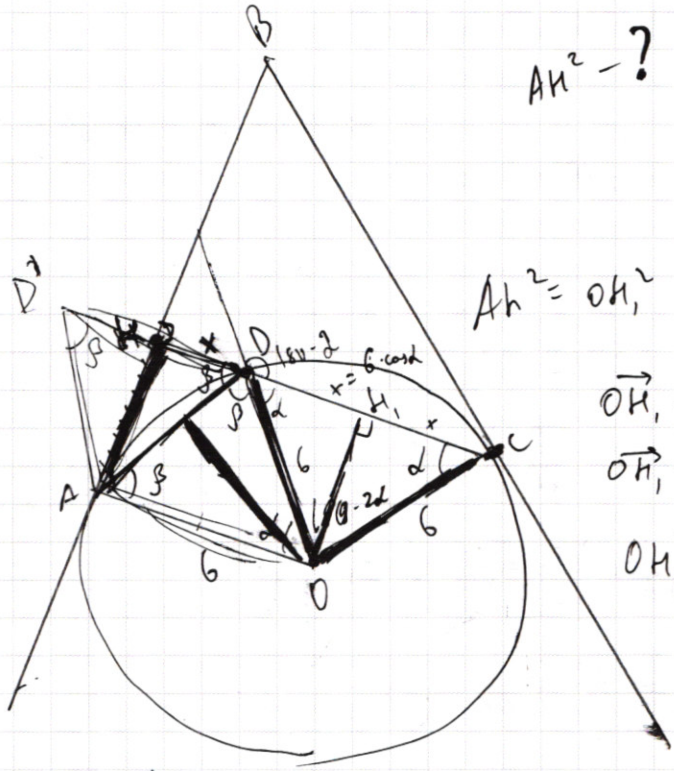


Одна сторона больше другой в 2 раза

$P-3x = x$

$P = 4x$





$AH^2 - ?$

$\cos(180-2\alpha) =$
$= -\cos 2\alpha = \cancel{-(1+2\cos^2\alpha)}$
$= -(2\cos^2\alpha - 1)$

$AH^2 = OH_1^2$

$\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha$

$\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DH_1}$

$\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CH_1}$

$OH_1^2 = \overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{CH_1} + \overrightarrow{DH_1}\cdot\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CH_1}\cdot\overrightarrow{DH_1} =$

$= 6\cdot 6\cdot\cos(180-2\alpha) +$

$+ 6\cdot 6\cos\alpha\cdot\cos(180-\alpha) +$

$+ 6\cos\alpha\cdot 6\cdot\cos\alpha +$

$\cancel{+} 6\cos\alpha\cdot 6\cos\alpha\cdot\cancel{\cos 180} =$

$= -6\cdot 6\cdot 2\cos^2\alpha + 6\cdot 6 +$

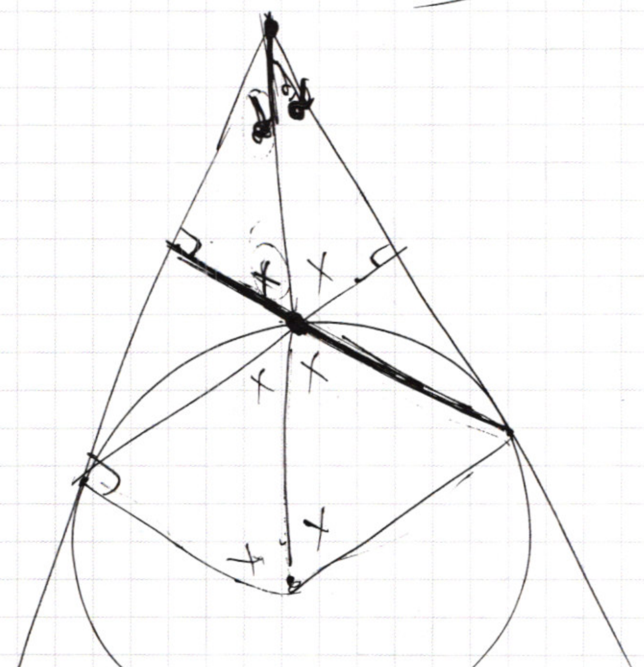
$+ \cancel{-6\cdot 6\cdot\cos^2\alpha} +$

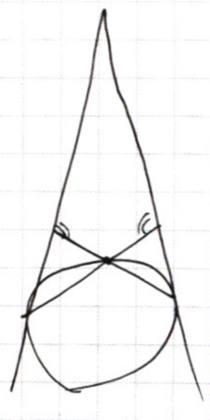
$+ \cancel{6\cdot 6\cdot\cos^2\alpha} -$

$- 6\cdot 6\cdot\cos^2\alpha =$

$= 36 - 6\cdot 6\cdot 3\cos^2\alpha =$

$= 36(1 - 3\cos^2\alpha)$





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 180-\alpha = -\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{29}}$

$EC^2 = ED^2 + DC^2 - 2ED\cdot DC\cdot \cos 180-\alpha =$

$= EB^2 + CB^2 - 2EB\cdot CB\cdot \cos\alpha$

$\frac{4}{29}x^2 + \left(\frac{5}{2}\sqrt{29}-x\right)^2 + 2\cdot\frac{2}{\sqrt{29}}x\cdot\left(\frac{5}{2}\sqrt{29}-x\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{29}} =$

$= \left(14,5-\frac{5}{\sqrt{29}}x\right)^2 + 29 - 2\cdot\left(14,5-\frac{5}{\sqrt{29}}x\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{29}}$

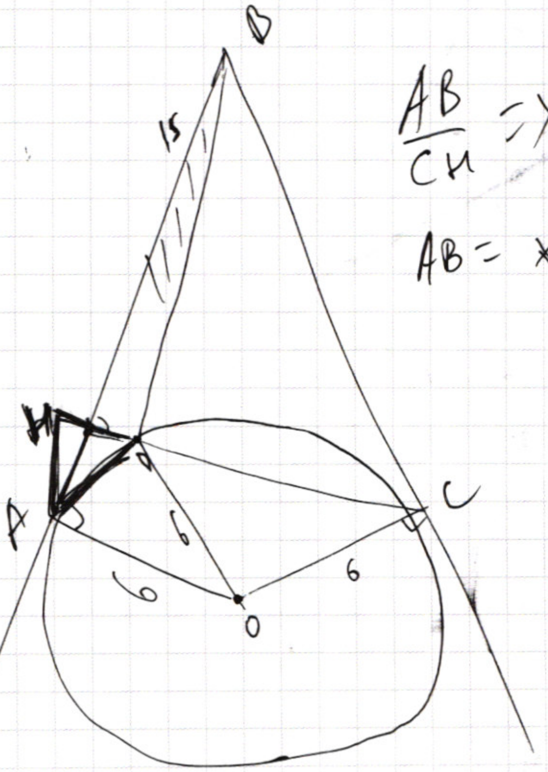
$\frac{4}{29}x^2 + \frac{25}{4}\cdot 29 - 5\sqrt{29}x + x^2 + \frac{8}{29}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{29}x - \frac{8}{29}x^2 =$

$= \frac{29^2}{4} + \frac{25}{29}x^2 - \frac{29\cdot 5}{\sqrt{29}}x + 29 - \frac{4}{\sqrt{29}}\cdot\frac{29}{2} + \frac{4}{\sqrt{29}}\cdot\frac{5}{\sqrt{29}}x$

$\frac{29+4-8}{29}x^2 + \left(\frac{20}{29}\sqrt{29} - 5\sqrt{29}\right)x + \frac{25}{4}\cdot 29 = \frac{25}{29}x^2 +$

$\frac{X}{\sin\alpha X} = \frac{AB}{AC}$

$\frac{1}{\sin\alpha}$



$\frac{AB}{CH} = X$

$AB = xCH$

$AB\cdot HD = 30$

$xCH\cdot HD = 30$

$AH^2 = CH\cdot HD = \frac{30}{x}$ — степень точки H

$x = \frac{30}{AH^2}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Задача 5~~

$$\cancel{EC^2 = \frac{4}{29}x^2 + \frac{25\cdot 29}{4} - 5\sqrt{29}\,x + x^2 + \frac{8\cdot 5}{29\cdot 2}\sqrt{29}\cdot x - \frac{8}{29}x^2 =}$$

$$\cancel{= \frac{29+4-8}{29}x^2 + \left(\frac{20}{29}\sqrt{29} - 5\sqrt{29}\right)x + \frac{25}{4}\cdot 29}$$

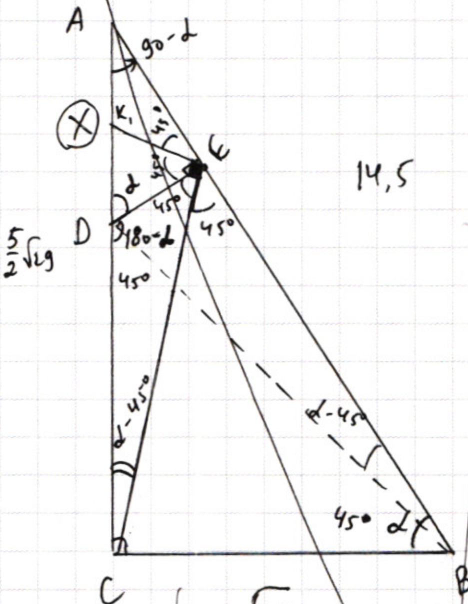
$$\cancel{CK_1^2 =}$$

☑ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5



14,5

Пусть $\angle B = \alpha$

$tg\alpha = \frac{\frac{5}{2}\sqrt{29}}{\sqrt{29}} = 2,5$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1+tg^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{25}{4}}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{29}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{29}}$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{4}{29}} = \sqrt{\frac{25}{29}} = \frac{5}{\sqrt{29}}$

Пусть $AD = x$

Тогда $DC = \frac{5}{2}\sqrt{29} - x$

$AE = \sin\alpha\, x = \frac{5}{\sqrt{29}} x$

$DE = \cos\alpha\, x = \frac{2}{\sqrt{29}} x$

$AB = \sqrt{\frac{25}{4}\cdot 29 + 29} = \sqrt{29}\cdot\sqrt{\frac{29}{4}} = \frac{29}{4} = 14,5$

$EB = 14,5 - \frac{5}{\sqrt{29}} x$

EK_1 – бис-са $\Rightarrow \angle KEC = 90°$

$\frac{AK_1}{K_1D} = \frac{AE}{DE} = \frac{\sin\alpha\, x}{\cos\alpha\, x} = tg\alpha = \frac{5}{2}$

$AK_1 = \frac{5}{2} K_1D$

$AK_1 + K_1D = x$

$\left(\frac{5}{2}+1\right) K_1D = x$

$K_1D = \frac{2}{7} x$

$K_1E^2 = K_1D^2 + ED^2 - 2K_1D\cdot ED\cdot\cos\alpha = \frac{4}{49}x^2 + \frac{4}{29}x^2 - 2\cdot\frac{2}{7}x\cdot\frac{2}{\sqrt{29}}x\cdot\frac{2}{\sqrt{29}} =$

$= \frac{4}{49}x^2 + \frac{4}{29}x^2 - \frac{4}{7}\cdot\frac{4}{29}x^2 = \frac{4\cdot 29 + 4\cdot 49 - 16\cdot 7}{29\cdot 49} x^2$

$EC^2 = DE^2 + DC^2 - 2DE\cdot DC\cdot\cos(180-\alpha) = \frac{4}{29}x^2 + \frac{25\cdot 29}{4} + x^2 - 2\cdot\frac{5}{2}\sqrt{29}\cdot x + 2\cdot\frac{2}{\sqrt{29}}\cdot\frac{2}{\sqrt{29}}x\cdot$

$\cdot\left(\frac{5}{2}\sqrt{29} - x\right)$