МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

ВАРИАНТ 13

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите неравенство

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|} \leqslant 0.$$

2. [4 балла] Найдите количество треугольников периметра 600 с целочисленными сторонами, у которых одна из биссектрис перпендикулярна одной из медиан.

3. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Окружность с центром O касается прямых AB и BC в точках A и C соответственно. Высота CH треугольника ABC пересекает эту окружность в точках C и D. Найдите отношение $AB:CH$, если площадь треугольника ABD равна 6, а радиус окружности равен 4.

5. [5 баллов] В прямоугольном треугольнике ABC на катете AC и гипотенузе AB отмечены точки D и E соответственно, такие что $DE \perp AB$. Найдите отношение $AD:AC$ и площадь треугольника AED, если известно, что $AC=\sqrt{7}$, $BC=2\sqrt{\frac{7}{3}}$, а $\angle CED=30^\circ$.

6. [5 баллов] Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек с координатами $(x;y)$, удовлетворяющими системе

$$\begin{cases} |2x|+|y|+|4-2x-y|>4, \\ x^2-2x-4y+y^2 \leqslant 0. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=p$ для любого простого числа p. Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 18$, $1 \leqslant y \leqslant 18$ и $f(x/y)<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Преобразуем выражение в числителе:

$$x^2-6x+10-2|x-3| = (x-3)^2-2|x-3|+1 = (|x-3|)^2-2|x-3|+1 =$$
$$= (|x-3|-1)^2 \geq 0.$$

Преобразуем знаменатель:

$$2x^2-4x+|x|\cdot|x-2| = 2x(x-2)+|x(x-2)| =$$
$$= 2\cdot|x(x-2)|\cdot \operatorname{sgn}(x(x-2)) + |x(x-2)| =$$
$$= |x(x-2)|\left(2\cdot \operatorname{sgn}(x(x-2))+1\right).$$

Заметим, что если $x(x-2)>0$, то выражение в знаменателе положительно, если $x(x-2)=0$, то это выражение равно 0, если $x(x-2)<0$, то и знаменатель отрицателен. Поэтому

$$\operatorname{sgn}\left(2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|\right) = \operatorname{sgn}\left(x(x-2)\right).$$

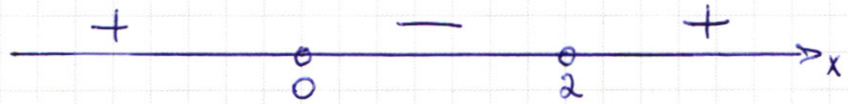
Значит, исходное неравенство равносильно такому:

$$\frac{(|x-3|-1)^2}{x(x-2)} \leq 0.$$

Заметим, что числитель неотрицателен. Найдём его нули:

$$(|x-3|-1)^2=0$$
$$|x-3|=1$$
$$\left[\begin{array}{l} x-3=1 \\ x-3=-1 \end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Нули знаменателя $x=2$ и $x=0$. Исследуем знаменатель на знак:



Если $x<0$, то знаменатель положителен и числитель положителен $\Rightarrow$ нер-во не выполнено

При $x=0$ или $x=2$ неравенство не имеет смысла

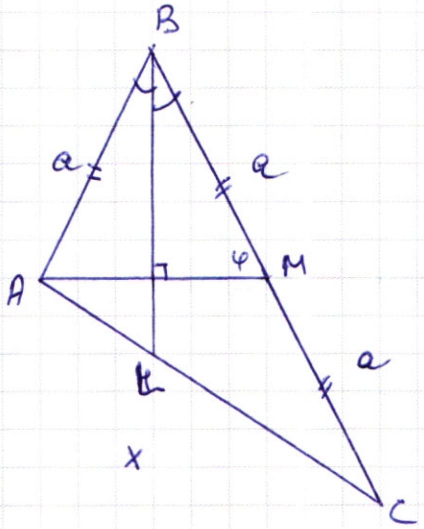
При $x \in (0,2)$ числитель положителен, знаменатель отрицателен $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ нер-во выполнено

При $x \in (2,3) \cup (3,+\infty)$ числитель и знаменатель положительны $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ нер-во не выполнено

При $x=3$ числитель равен 0, знаменатель имеет смысл $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ нер-во выполнено.

Ответ: $x \in (0,2) \cup \{3\}$.

№2



Пусть в треугольнике ABC медиана AM перпендикулярна биссектрисе BL. Тогда в $\triangle ABM$ биссектриса совпадает с высотой $\Rightarrow AB = BM$. Тогда можно обозначить $AB = BM = MC = a$; $AM = b$; $AC = x$; $\angle AMB = \varphi$.

Запишем т. косинусов для $\triangle ABM$ и $\triangle AMC$:

$\triangle ABM$: $$a^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi. \qquad (1)$$

$\triangle AMC$: $$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \varphi);$$

$$x^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\varphi. \qquad (2)$$

Сложим уравнения (1) и (2), получим

$$x^2 = a^2 + 2b^2;$$

$$x^2 - a^2 = 2b^2 > 0.$$

Нас интересуют треугольники с целыми сторонами, это означает $x, a \in \mathbb{Z}$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда количество треугольников, соответствующих условию, равно количеству решений системы

$$\begin{cases} x^2 - a^2 = 2b^2 \\ b < 2a & \leftarrow \text{условие существования } \triangle ABM \\ x + 3a = 600 & \leftarrow \text{периметр} = 600. \end{cases}$$

В самом деле, любому $\triangle ABC$ соответствует решение такой системы; и по каждому решению системы можно построить треугольник (строим $\triangle ABM$ со сторонами a, a, b и откладываем $MC = MB$ на продолжении BM за т. M).

В этой системе $x, a \in \mathbb{N}$, $b \in (0, +\infty)$.

Выразим $x = 600 - 3a$ и подставим:

$$\begin{cases} (600-3a)^2 - a^2 = 2b^2, \\ b < 2a; \end{cases}$$

Последнее уравнение можно записать в виде $2b^2 < 8a^2$.

~~Тогда эта система равносильна двойному неравенству~~

Тогда эта система имеет столько же решений, сколько двойное неравенство

$$0 < (600-3a)^2 - a^2 < 8a^2$$

Сначала решим $(600-3a)^2 - a^2 > 0$, что с учётом $x, a > 0$ равносильно

$$(600-3a)^2 > a^2$$

$$600 - 3a > a$$

$$a < 150.$$

Теперь решим $(600-3a)^2 - a^2 < 8a^2$

$(600-3a)^2 < 9a^2$, что с учётом $x, a>0$ равносильно:

$600-3a < 3a$

$600 < 6a$

$a > 100$.

Тогда решением будут $a=101$, $a=102$, ..., $a=148$, $a=149$.
Всего 49 решений, значит, 49 треугольников.

Ответ: 49.

№3

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)^2=xy, \\ x-2y\geq 0, \\ x+y^2=5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4xy+4y^2=xy, \\ x-2y\geq 0; \\ x+y^2=5; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-5xy+4y^2, \\ x-2y\geq 0, \\ x+y^2=5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x-4y)=0, \\ x-2y\geq 0; \\ x+y^2=5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=y, \\ x=4y, \end{array}\right. \\ x-2y\geq 0, \\ x+y^2=5; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y \\ x-2y\geq 0 \\ x+y^2=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=4y \\ x-2y\geq 0 \\ x+y^2=5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y \\ -y\geq 0 \\ y^2+y=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=4y \\ 2y\geq 0 \\ y^2+4y=5 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \begin{cases} x=y \\ y\leq 0 & (*) \\ y^2+y-5=0 & (1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x=4y \\ y\geq 0 & (**) \\ y^2+4y-5=0 & (2) \end{cases}$$

(1) $y^2+y-5=0$

$D=1+20=21$

$y=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

Корень $y=\dfrac{\sqrt{21}-1}{2}$ не подходит под условие (*), остаётся $y=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$

(2) $y^2+4y-5=0$

По т. Виета находим $y=1$ и $y=-5$. $y=-5$ не подходит под условие (**), остаётся $y=1$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Объединяя решения систем~~ Находим соответсвующие значения x, получаем в первой системе ~~$\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$, во второй (4,1)~~, $\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}, \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$, во второй $(4,1)$

Ответ: $\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2}, \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)$, $(4,1)$.

№ 7

Заметим, что $\forall a_1, \dots, a_n$ из области опрезеления $f(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) = f(a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) + f(a_1) =$

$= f(a_3 \cdot \ldots \cdot a_n) + f(a_2) + f(a_1) = \ldots = f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n)$.

Тогда для любого простого p и натурального n

$$f(p^n) = f(\underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{n}) = n \cdot f(p) = n \cdot p$$

Разложив по основной теореме арифметики число a в произведение простых в степенях: $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, можно получить явную формулу $f(a)$:

$$f(p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}) = f(p_1^{\alpha_1}) + \ldots + f(p_n^{\alpha_n}) = p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \ldots + p_n\alpha_n.$$

Пользуясь этой формулой, несложно вычислить $f(t)$ для всех натуральных t, таких, что $2 \le t \le 18$:

$f(2)=2$; $f(3)=3$; $f(4)=4$; $f(5)=5$; $f(6)=5$; $f(7)=7$;
$f(8)=6$; $f(9)=6$; $f(10)=7$; $f(11)=11$; $f(12)=7$; $f(13)=13$; $(*)$
$f(14)=9$; $f(15)=8$; $f(16)=8$; $f(17)=17$; $f(18)=8$.

Заметим, что $\forall a$ из области определения

$f(a) = f(1 \cdot a) = f(1) + f(a) \implies f(1) = f(a) - f(a) = 0$.

Далее заметим, что $\forall a$ из области определения

$$0 = f(1) = f(a \cdot \frac{1}{a}) = f(a) + f(\frac{1}{a})$$

тогда $f(\frac{1}{a}) = -f(a)$.

Это можно записать, так как если a принадлежало области определения, то и $f(\frac{1}{a})$ ей принадлежит.

Тогда заметим, что $\forall a$ и b из области определения

$$f(\frac{a}{b}) = f(a \cdot \frac{1}{b}) = f(a) + f(\frac{1}{b}) = f(a) - f(b).$$

Тогда ~~...~~ имеет место следующая равносильность

$$f(\frac{x}{y}) < 0 \iff f(x) < f(y).$$

Тогда для любого натурального x ~~...~~, такого, что $1 \le x \le 18$, можно, пользуясь найденными значениями (*), найти все подходящие значения y; но мы этого делать не будем, я передумал.

Рассмотрим мн-во A пар (x,y)[1], таких, что $f(x) < f(y)$, мн-во B пар (x,y)[2], таких, что $f(x) > f(y)$ и мн-во C пар (x,y)[3], таких, что $f(x) = f(y)$.

Ясно, что если пара $(x_0, y_0) \in A$, то пара $(y_0, x_0) \in B$. И наоборот, поэтому $n(A) = n(B)$

[1,2,3] забыл указать, указываю: все x, y в парах из множеств A, B, C таковы, что $1 \le x \le 18$; $1 \le y \le 18$, т.е., например, A – это мн-во пар (x,y) таких, что $f(x) < f(y)$ и $1 \le x \le 18$, $1 \le y \le 18$; для B и C аналогично.

Также $n(A) + n(B) + n(C)$ – это количество всех пар (x,y), таких, что $1 \le x \le 18$ и $1 \le y \le 18$, т.е.

$$n(A) + n(B) + n(C) = 18^2 = 324.$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Посчитаем $n(C)$ — количество пар (x,y), таких, что $f(x)=f(y)$.

~~Каждому значению~~ Пусть на множестве $\{1;2;\dots;18\}$ f принимает значение Z_i k_i раз. Тогда существует k_i^2 пар (x,y), таких, что $f(x)=f(y)=Z_i$.

Тогда $n(C)$ равно сумме по всем i k_i^2. Пользуясь найденными значениями $(*)$ можно найти просто все k_i, вот табличка:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Z_i	0	2	3	4	5	7	6	11	13	9	8	17
k_i	1	1	1	1	2	3	2	1	1	1	3	1

И тогда $n(C)=1^2+1^2+1^2+1^2+2^2+3^2+2^2+1^2+1^2+1^2+3^2+1^2=34$.

А так как $n(A)+n(B)+n(C)=324$, то $n(A)+n(B)=290$.

Но так как $n(A)=n(B)$, то $n(A)=\frac{290}{2}=145$.

$n(A)$ — это как раз количество искомых пар, победа

Ответ: 145.

N 6

Применим к выражению $|2x|+|y|+|4-2x-y|$ неравенство о том, что модуль суммы не превосходит суммы модулей:

$$|2x|+|y|+|4-2x-y| \overset{(1)}{\geq} |2x+y|+|4-2x-y| \overset{(2)}{\geq}$$

$$\overset{(2)}{\geq} |4|=4. \qquad (*)$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Неравенство $|u|+|v| \geq |u+v|$ обращается в равенство, когда $uv \geq 0$. Исследуем случай, когда неравенства (1) и (2) одновременно обращаются в равенства, то есть выполнено $|2x|+|y|+|4-2x-y| = 4$. ~~Для этого~~

Это равносильно системе

$$\begin{cases} 2xy \geq 0, & (3)\\ (2x+y)(4-2x-y) \geq 0; & (4) \end{cases}$$

Уравнения (3) и (4) задают множества на рис. 1 и 2 соотв.

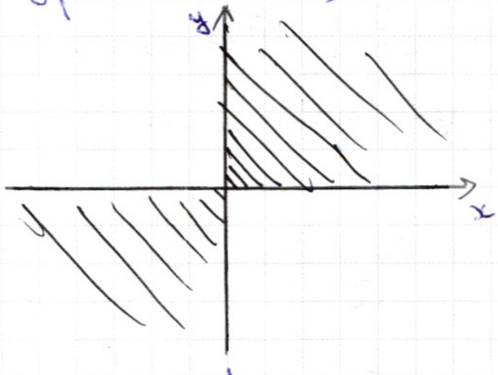


рис. 1

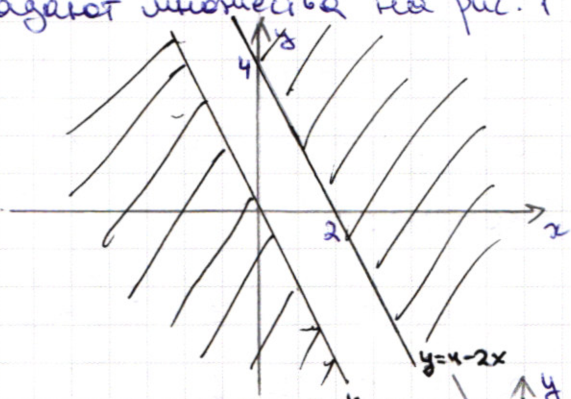


рис. 2

Пересекая их получаем рис. 3

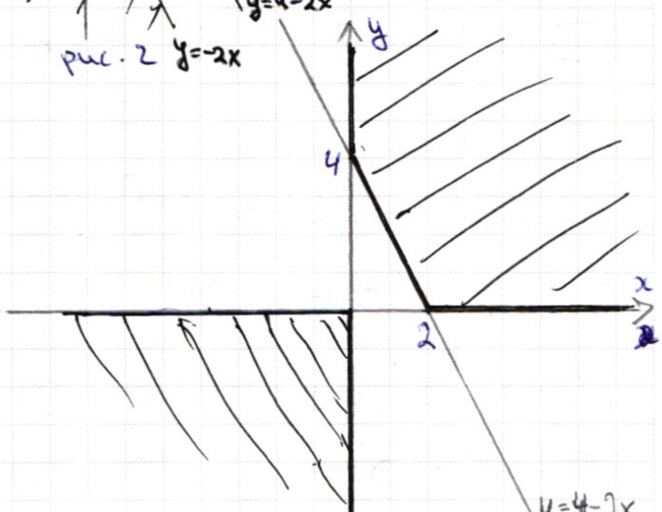


рис. 3

На множестве, изображённом на рис. 3, неравенство

$$|2x|+|y|+|4-2x-y|>4$$

<u>не выполнено</u>, а на всей оставшейся части плоскости оно выполнено, потому что нер-во (*) не обращается в р-во.

Построим на координатной плоскости нер-во

$$x^2-2x-4y+y^2 \leq 0$$

Преобразуем его:

$$x^2-2x+1 + y^2-4y+4 \leq 5$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2 \leq 5$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Это неравенство задаёт круг с центром в точке (1; 2) и радиусом $\sqrt{5}$ (рис. 4)

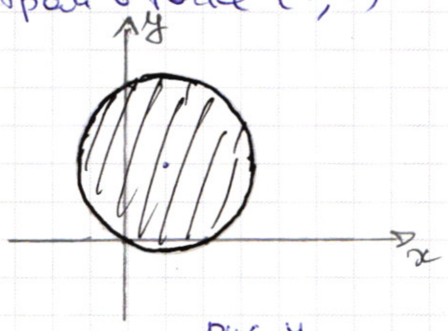


рис. 4

Чтобы построить график исходной системы, нужно из графика на рис. 4 исключить все точки графика на рис. 3.

Несложно заметить, что ~~коор~~ точки (2, 0) и (0, 4), в которых график на рис. 3 пересекает оси, принадлежат также и ~~графику~~ окружности, ограничивающей круг на рис. 4. Достаточно подставить:

(2, 0): $(2-1)^2+(0-2)^2=5$
$1+4=5$

(0, 4): $(0-1)^2+(4-2)^2=5$
$1+4=5$

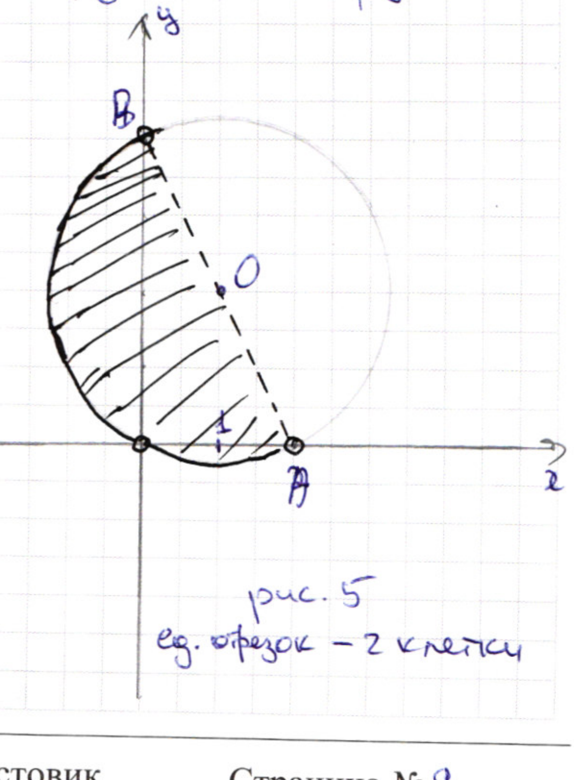
А также эта окружность проходит через начало координат.

Поэтому график системы такой:

Заметим, что O — центр круга — середина отрезка AB:

A(2, 0) B(0, 4)

$O(1,2)=\left(\frac{2+0}{2},\frac{0+4}{2}\right)$.



Поэтому AB — диаметр круга, а это значит, что площадь фигуры равна половине площади круга

рис. 5
ед. отрезок — 2 клетки

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Так как круг имеет радиус $\sqrt{5}$, то половина его площади это $\frac{\pi \cdot (\sqrt{5})^2}{2} = \frac{5\pi}{2}$.

Ответ: $\frac{5\pi}{2}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{x^2-6x+10-2|x-3|}{2x^2-4x+|x|\cdot|x-2|}\le 0$$

$x\ne 0 \quad x\ne 2$

$$\frac{\cancel{(x-3)^2+1-2|x-3|}}{\cancel{2x^2-4x+|x|}}$$

$2x(x-2)+|x|\cdot|x-2| =$

$=|x|\cdot|x-2|\,(2\,\mathrm{sgn}(\ldots)+1)$

Если $x(x-2)<0$, то знам. <0; если $x(x-2)>0$, то знам. >0, нулей быть не должно.

$(x-3)^2-2|x-3|+1 = |x-3|\left(\mathrm{sgn}(x-3)(x-3)-2\right)+1.$

~~если $x\in(0,2)$~~

Если $x\in(0,2)$, то $x-3<0$. (подходит)

числ $= x^2-6x+10+2(x-3) = x^2-4x+4 = (x-2)^2.$

знам <0.

~~Если $x\in(2;3)$, то~~

~~знам >0~~

Знаки знаменателя:

$+\quad 0 \quad -\quad 2\quad +$ $\quad x$

~~знаки числителя:~~

x

$x>3$:

$\cancel{x^2-6x+10-2x+6} = x^2$

В числителе полный квадрат

$+\quad 2\quad +\quad 3\quad +$

$x\in(0;2)\cup\{3\}.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy}, \\ x+y^2=5; \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-2y)^2=xy, \\ x-2y\geq 0, \\ x+y^2=5; \end{cases}$$

$x^2-4xy+4y^2=xy$ $\qquad x^2-5xy+4y^2=0 \qquad (x-y)(x-4y)=0.$

$x+y^2=5$

$$\left[\begin{aligned} x&=y, \\ x&=4y; \end{aligned}\right.$$

$$\begin{cases} x+y^2=5 \\ \left[\begin{aligned} x&=y \\ x&=4y \end{aligned}\right. \end{cases}$$

Случай 1) $\cancel{x=y}$ $x=y.$ $\cancel{x\leq 8}$ $\cancel{x^2+x-5=0}$ $x^2+x-5=0$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+20}}{2}=$

$=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

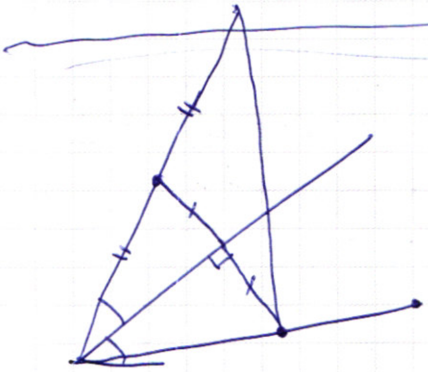
С учётом $x-2y\geq 0$

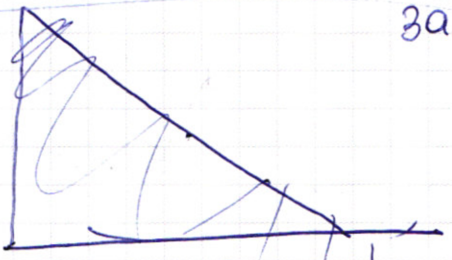
$-x\geq 0$

$x\leq 0$

$x=y=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}.$

Случай 2

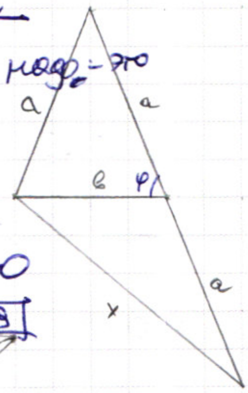




$3a+x=600$

$x=\cancel{600-a}$ $600-3a$

В принципе всё, что мне надо – это



$(600-3a)^2\geq a^2$

$600-3a>a$

$4a<600$

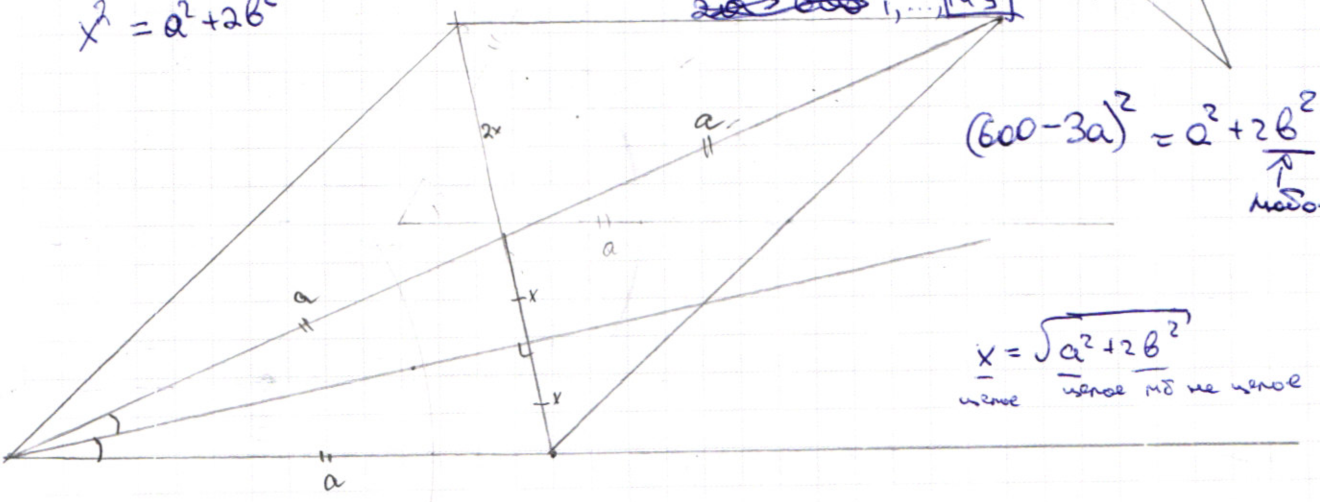
$a<150$

$1,\dots,\boxed{149}$

$a^2=a^2+b^2-2ab\cos\varphi$

$x^2=a^2+b^2+2ab\cos\varphi$

$x^2=a^2+2b^2$



$(600-3a)^2=a^2+2b^2$

любое

$x=\sqrt{a^2+2b^2}$

целое целое мб не целое

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(1)=0$

$f(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}) = p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \ldots + p_n\alpha_n$

$0 = f(a \cdot \frac{1}{a}) = f(a) + f(1/a)$

$f(\frac{1}{a}) = -f(a)$

$f(\frac{b}{a}) = f(b) + f(\frac{1}{a}) = f(b) - f(a)$

$f(1)=0$

$f(2)=2$

$f(3)=3$

$f(4)=4$

$f(5)=5$

$f(6)=5$

$f(7)=7$

$f(8)=6$

$f(9)=6$

$f(10)=7$

$f(11)=11$

$f(12)=7$

$f(13)=13$

$f(14)=9$

$f(15)=8$

$f(16)=8$

$f(17)=17$

$f(18)=8$

$18 \cdot 18 = (20-2)^2 = 400 - 80 + 4 = 324$.

1 — 0 1

1 — 2 1

1 — 3 1

1 — 4 1

2 — 5 4

3 — 7 9

2 — 6 4

1 — 11 1

1 — 13 1

1 — 9 1

3 — 8 9

1 — 17 1

34

290/2 = 145

$f(\frac{x}{y}) < 0$

$f(x) < f(y)$

(17) 1 — 2, …, 18

138 (16) 2 — 3, …, 18

112 (15) 3 — 4, …, 18

97 (14) 4 — 5, …, 18

83 (12) 5 — 7, …, 18

71 (12) 6 — 7, …, 18

59 (7) 7 — 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18

52 (10) 8 — 7, 10, …, 18

42 (10) 9 — 7, 10, …, 18

(7) 10 — 11, 13, …, 18

25 (2) 11 — 13, 17

23 (7) 12 — 11, 13, …, 18

(1) 13 — 17

(3) 14 — 11, ~~13~~, 17

(4) 15 — 14, 11, 13, 17

(4) 16 — 11, 13, 14, 17

12

(0) 17 — ~~X~~

(4) 18 — 11, 13, 14, 17

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot DH$

$\boxed{AB \cdot DH = 12}$

$\frac{AB}{CH} - ?$

$S_{ABD} = 6$

$R = 4$

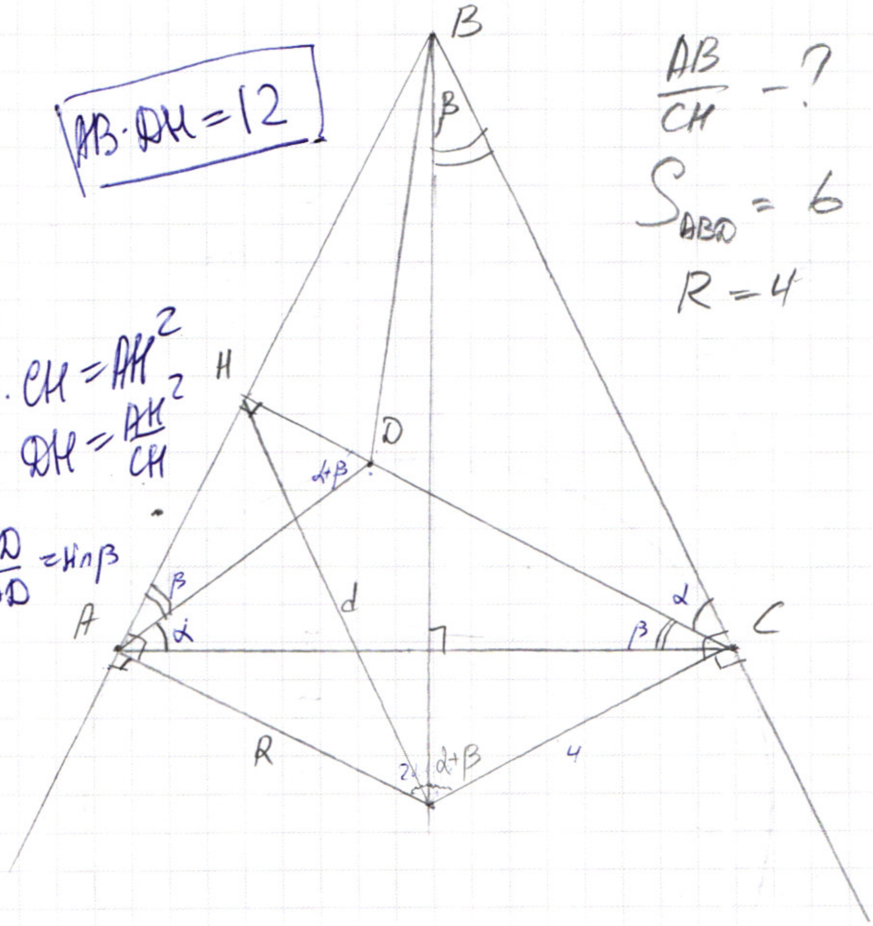
$\triangle AHD \sim \triangle CHA$

$$\boxed{\frac{AH}{CH} = \frac{HD}{HA} = \frac{AD}{AC}}$$

$AH^2 = CH \cdot HD$

$DH \cdot CH = AH^2$

$DH = \frac{AH^2}{CH}$



$\frac{AH}{AC} = \frac{HD}{AD} = \sin\beta$

$\frac{HD}{AH} = \frac{AD}{AC} = \cancel{\sin\beta}$

$\cancel{AD = \sin\beta \cdot AC}$

$AD = 2R \cdot \sin\beta$

$AD = \frac{HD}{\sin\beta}$

$HD = 2R \cdot \sin^2\beta.$

$\frac{AH}{AC} = \frac{4}{AB}$

$AH = 4 \cdot \frac{AC}{AB}$

$\alpha + 2\beta = 90^\circ.$

$\sin\alpha = \cos 2\beta$

$\frac{AB}{CH} \cdot AH^2 = 12.$

$AH^2 - ?$

$HD \cdot HC = HA^2.$

$AC/AB = \frac{\sin 2\beta}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}$

$HD \cdot HC - ?$

$\sin\beta = \frac{4}{AB}$

$f(2a) = f(a) + 2$

Для целых все ясно

$f(a) = f(1) + f(a)$

$f(1) = 0.$

$f(2) = 2$

$f(4) = 4$

$0 = f(1) = f(x \cdot \frac{1}{x}) = f(x) + f(1/x)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |2x| + |y| + |4-2x-y| \geq 4 \\ x^2-2x-4y+y^2 \leq 0 \end{cases}$$

$|u|+|v|+|t| = |u+v+t|$

$|u|+|v|+|t| \geq |u+v|+|t| \geq$

$\geq |u+v+t|$

1) $uv \geq 0$

2) если $(u+v)t \geq 0$.

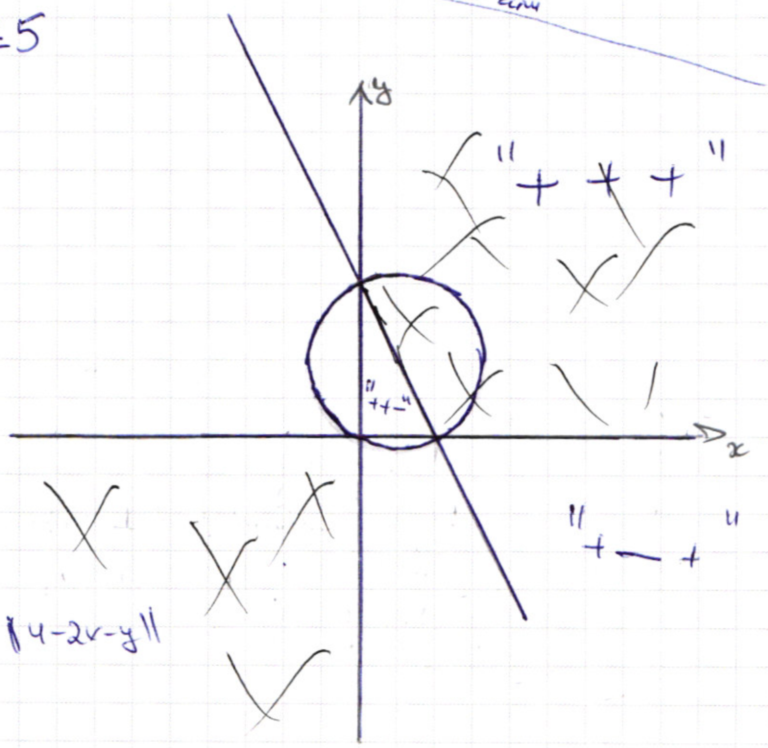
$(x-1)^2 + (y-2)^2 - 5 \leq 0$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 5$

$|2x|+|y| + |y+2x-4|$

$y+2x-4=0$

$y = 4-2x$



Стоять!

"$|2x+y| + |4-2x-y|$"

$|2x| + |y| + |4-2x-y| \geq |2x+y+4-2x-y| = 4$.

Когда равно?

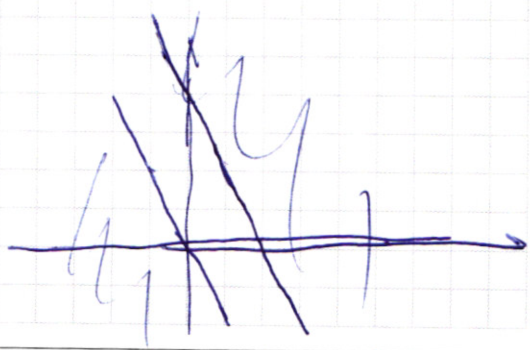
~~$u\geq0$, $v\geq0$~~ $uv \geq 0$

$|u|+|v| = |u+v|$

Если $x \geq 0$ и $y \geq 0$

$2xy \geq 0$.

$(2x+y)(4-2x-y) \geq 0$.



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)